普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下册）

主编◎阳平华

航空工业出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（下册）

主编　阳平华

航空工业出版社

北　京

内 容 提 要

本书是由拥有多年教学经验的教师，根据高等院校高等数学教学大纲要求编写而成的．本书分上、下册，下册共 7 章，主要内容包括：无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、数学模型初步和 MATLAB 软件应用．

本书可作为普通高等院校各专业的数学教材，还可作为读者的自学参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／阳平华主编．-- 北京：航空工业出版社，2018.7

ISBN 978-7-5165-1646-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①阳… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 152420 号

高等数学（下册）

Gaodeng Shuxue（xia Ce）

航空工业出版社出版发行

（北京市朝阳区北苑 2 号院　100012）

发行部电话：010-84936597　010-84936343

北京市科星印刷有限责任公司印刷　全国各地新华书店经售

2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：18.5　字数：427 千字

印数：1－3300　定价：46.00 元

前　言

高等数学是普通高等院校各专业的重要基础课. 为满足教育部高等学校教学指导委员会的基本要求，我们充分吸取当前优秀高等数学教材的精华，并结合多年来的教学实践经验，针对当前学生的知识结构和习惯特点精心编写了本书.

本书具有以下特色.

1. **内容全面，适用广泛**. 本书分上、下册，内容几乎涵盖了普通高等院校各专业对数学知识的要求. 书中标“*”的章节为选学内容，各专业可根据自己的课时和需要，酌情选择.

2. **引例先行，例题紧跟**. 本书在介绍较难理解的概念或定理时会先给出一些简单的实例，辅助学生理解. 例如，第 12.1 节中在介绍对弧长的曲线积分的概念之前，先讨论了求解曲线形构件质量的问题. 同时，本书在定义或定理后还配有大量的例题讲解，帮助学生熟练应用所学知识.

3. **互动讨论，加深理解**. 本书每一节都有针对本节知识的“问题讨论”. 学生可以通过课堂上的讨论互动及教师的解答，加深对知识重点、难点的理解与掌握.

4. **精选习题，随学随练**. 本书在每一节的最后都设置了习题，题型丰富，难度适中，能够帮助学生巩固所学知识，强化对知识的理解与掌握. 同时，书中还配有习题答案，以便于学生自主学习和检验学习效果.

本书由阳平华担任主编，吴丽镐、李菁、阳彩霞、詹涌强担任副主编，参加编写的还有杨荣领、张清平、卢珍、黄婷、陈妙玲、杨春侠、黄业文、冯兰和李海荣.

由于编者水平有限，加之编写时间紧凑，教材中难免有疏漏之处，恳请各位老师和广大读者批评指正，以不断提高本教材水平.

本书在编写过程中参考了大量优秀的高等数学教材，在此对书籍作者和资料提供者表示衷心的感谢.

本书配有丰富的教学资源包，读者可到北京金企鹅联合出版中心网站（www.bjjqe.com）下载.

编　者

2018 年 6 月

本书编委会

主　编：阳平华

副主编：吴丽镐　李　菁　阳彩霞　詹涌强

参　编：杨荣领　张清平　卢　珍　黄　婷
陈妙玲　杨春侠　黄业文　冯　兰
李海荣

目录

第 8 章　无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，是表示函数、研究函数性质以及用简单函数逼近复杂函数进行数值计算的有力工具. 无穷级数在自然科学、工程技术和数学的许多分支中都有着广泛的应用. 像其他数学理论一样，无穷级数理论也是在科学技术的发展和推动下，逐渐形成和完善起来的. 早在魏晋时代，我国数学家刘徽就已经用无穷级数的思想来计算圆的面积了. 直到 19 世纪，极限理论的建立，才给无穷级数奠定了理论基础.

本章在极限理论的基础上，首先介绍常数项级数及其基本性质，然后介绍幂级数的概念、性质、运算以及幂级数展开式的应用，最后简要介绍傅里叶级数.

8.1　常数项级数的概念和性质

8.1.1　常数项级数的概念

人们对事物数量特性方面的认识，往往有一个由近似到精确的过程，在这个认识过程中，常会遇到由有限个数量相加转到无限个数量相加的问题.

例如，我国古代重要典籍《庄子》一书中有“一尺之锤，日取其半，万世不竭”的说法. 从数学的角度上看，这就是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\approx 1 .$$

再如，计算半径为 R 的圆面积 A，具体做法如下：如图 8-1 所示，作圆的内接正六边形，算出这六边形的面积 a_1，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值. 为了比较准确地计算出 A 的值，我们以这个六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这六个等腰三角形的面积之和为 a_2，那么 a_1+a_2（即内接正十二边形的面积）就是 A 的一个较好的近似值. 同样地，再在正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这十二个等腰三角形的面积之和为 a_3，那么 $a_1+a_2+a_3$（即内接正二十四边形的面积）是 A 的一个更好的近似值. 如此继续下去，内接正 n 边形的面积就逐步逼近圆的面积，即

$$A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n .$$

图 8-1

如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 的极限就是所要求的圆的面积 A. 这时，和式中的项数无限增多，于是就出现了无穷多个数量依次相加的数学表达式.

定义 1 如果给定一个无穷数列

$$\{u_n\}: u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

按顺序用加号连接这个数列的所有项构成的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为（常数项）**无穷级数**，简称（常数项）**级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \tag{8-1}$$

其中第 n 项 u_n 称为级数（8-1）的**一般项或通项**.

这里，数的无限项相“加”，只是形式上的加法，这种加法是否有“和”？如果有“和”，其含义是什么？这些都是我们要解决的问题. 为此，我们记级数（8-1）前 n 项之和为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n,$$

S_n 称为级数（8-1）的部分和. 令 $n=1,2,3,\cdots$，则 $\{S_n\}$ 构成部分和数列

$$\{S_n\}: S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots,$$

根据这个数列是否有极限，引入无穷级数收敛和发散的概念.

定义 2 如果当 $n\to\infty$ 时，$\{S_n\}$ 的极限存在，记为 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数（8-1）**收敛**，并称 S 为级数（8-1）的和，写成

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}u_i=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots;$$

如果数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在，则称级数（8-1）**发散**.

按定义，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散，且在收敛时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n, \text{ 即 } \sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i .$$

例 1　讨论等比级数（又称几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解　当 $q \neq 1$ 时，根据等比数列的求和公式，所给级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

当 $|q|<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，此时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q|>1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，此时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

如果 $|q|=1$，则当 $q=1$ 时，$S_n = na \to \infty$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散；当 $q=-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 成为

$$a - a + a - a + \cdots,$$

因为 S_n 随着 n 为奇数或偶数而等于 a 或 0，所以 S_n 的极限不存在，这时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 也发散.

综上所述，如果 $|q|<1$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；如果 $|q| \geqslant 1$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

注意

几何级数是收敛级数中最著名的一个级数. 阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802—1829，挪威数学家）曾经指出“除了几何级数之外，数学中不存在任何一种它的和已被严格确定的无穷级数”. 几何级数在判断无穷级数的收敛性、无穷级数的求和以及将一个函数展开为无穷级数等方面都有广泛而重要的应用.

几何级数的增长速度令人震惊，有一个古老的传说可以说明这点。当时，古波斯国王对一种新发明的象棋游戏有极大的兴趣，于是要召见那个发明人并且要以皇宫的财富相赠. 当这个发明人（一个贫困但却十分精通数学的农民）被国王召见时，他要求在棋盘的第一个方格里放 1 粒麦粒，第二个方格里放 2 粒麦粒，第三个方格里放 4 粒麦粒，第四个格里放 8 粒麦粒，后一格麦粒是前一格麦粒的 2 倍，如此继续下去，直到整个棋盘都被麦粒覆盖上为止. 国王听后，立即命仆人拿来一袋小麦，并让仆人们按发明人的要求在棋盘上放置麦粒，但令他们十分吃惊的是，他们很快发现袋子里的麦粒甚至整个王国的麦粒也不足以完成这项任务，因为级数 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots$ 的第 64 项是一个十分大的数（$2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$）. 如果我们设法把如此多的麦粒（假设每个麦粒直径仅 1 mm）放在一条直线上，这条线将长约两光年.

例 2 证明级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

是发散的.

证明 此级数的部分和为

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，因此所给级数是发散的.

例 3 判别无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的收敛性.

解 由于

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

因此

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，所以该级数收敛，它的和是 1.

8.1.2 收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散的概念，可以得出收敛级数的几个基本性质.

性质 1 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和$S$，则它的各项同乘以一个常数$k$所得的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，且其和为$kS$.

证明 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$的部分和分别为$S_n$与$\sigma_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(ku_1+ku_2+\cdots+ku_n)=k\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=k\lim_{n\to\infty}S_n=kS.$$

这表明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$收敛，且收敛于$kS$.

性质 2 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于和$S$，$\sigma$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且其

和为 $S\pm\sigma$.

此性质也可以说成：两个收敛级数可以逐项相加或相减.

性质 3　在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

例如，由例 3 知级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 是收敛的，则级数

$$10\,000+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

也是收敛的，级数 $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 也是收敛的.

性质 4　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这个级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

注意

> 收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛. 例如，级数
>
> $$(2-2)+(2-2)+\cdots$$
>
> 收敛于零，但级数
>
> $$2-2+2-2+\cdots$$
>
> 发散.

推论：如果加括号后所成的级数发散，则原来的级数也发散.

性质 5（级数收敛的必要条件）　如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0\,.$$

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 S_n，且 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0\,.$$

由此性质可知，如果 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数发散. 但级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件. 例如，对于调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

虽然在 $n\to\infty$ 时，通项 $\frac{1}{n}\to 0$，但级数却是发散的，其证明如下：

假如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，且其和为 S，S_n 是它的部分和. 显然有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ 及 } \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$．但另一方面，

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

这与$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\neq 0$矛盾，说明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$必定发散.

注意

调和级数的发散速度非常缓慢．当n越来越大时，调和级数的项变得越来越小，然而，它的和将慢慢地增大并超过任何有限值．调和级数的这种特性使一代又一代的数学家困惑并为之着迷．它的发散性是由法国学者尼古拉·奥雷姆（1323—1382）在极限概念被完全理解之前约 400 年首次证明的．下面的数字将有助于我们更好地理解这个级数．

这个级数的前一千项相加约为 7.485，前一百万项相加约为 14.357，前十亿项相加约为 21，前一万亿项相加约为 28．更有学者估计过，为了使调和级数的和等于 100，必须把10^{43}项加起来．如果我们试图在一个很长的纸带上写下这个级数，直到它的和超过 100，即使每项只占 1 mm 长的纸带，也必须使用10^{43} mm 长的纸带，这大约为10^{25}光年．但是宇宙的已知尺寸估计只有10^{12}光年．

问题讨论

1．有穷数列的和与无穷级数的和有何区别和联系？

2．在级数中改变、去掉或增加前面有限项，为什么不会改变级数的收敛性？

3．举例说明如果级数的一般项u_n趋于零，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$不一定收敛.

习题 8.1

1．填空题：

（1）$u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则$u_1=$__________，$u_2=$__________；

（2）$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$，则$u_n=$__________；

（3）$1+\frac{1\times2}{2^2}+\frac{1\times2\times3}{3^3}+\frac{1\times2\times3\times4}{4^4}+\cdots$，则$u_n=$__________.