财政部规划教材
"十三五"普通高等教育规划教材

经济数学（一）

微积分 第2版

《微积分》编写组 编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

财政部规划教材
“十三五”普通高等教育规划教材

微积分

第2版

《微积分》编写组　编

“互联网+”立体化教材
广益教育

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/《微积分》编写组编．—2 版．—北京：中国财政经济出版社，2017.8
财政部规划教材 “十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978－7－5095－7674－8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①微… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 200574 号

责任编辑：王 芳 田明晖 责任校对：李 静
封面设计：赫 健 版式设计：王志强

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100142
营销中心电话：010－82333010 编辑部门电话：010－88190670
北京时捷印刷有限公司印刷 各地新华书店经销
787×1092 毫米 16 开 23.5 印张 594 000 字
2017 年 8 月第 2 版 2017 年 8 月北京第 1 次印刷
定价：48.00 元
ISBN 978－7－5095－7674－8
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

广益教育“九斗”APP 操作说明

本书为“互联网+”立体化教材，配有广益教育助学助教平台——“九斗”APP.

使用前，请按照以下步骤操作使用.

步骤一，先使用智能手机扫描本书封面图标中的二维码(见下图)，下载安装免费的“九斗”APP. 提示：下载界面会自动识别安卓或苹果手机.

步骤二，安装成功之后，点击“九斗”APP 进入使用界面.

步骤三，首次使用 APP 需注册. 注册时，如果您是教师用户，请提交相关资料进行审核，审核通过后即可获得教师用户的相关功能.

步骤四，注册成功后，使用时，请按照软件提示或宣传视频操作即可.

提示：

1. 浏览资源前请先扫描封底二维码进行教材验证；

2. 对教材中带有 AR 标志的图形图像，使用 AR 扫描即可显示相关资源；

3. 教材中的二维码资源请使用“九斗”APP 中的扫一扫功能进行浏览.

关于数字资源说明如下：

1. 微课：对教材中的重点、难点，从通俗易懂的角度进行诠释性补充讲解，有利于学生的自我学习和巩固学习.

2. 交互动画：从三维几何的角度，通过立体化、动画演示、交互体验来展现数学的本质，把几何图形的诠释作用极大化.

3. 释疑解难：对常见的疑惑，思维误区，难以理解的内容，进行答疑式解答，举例分析，释放学生的困惑，让学生少走弯路.

4. 参考答案及附录：把每章的参考答案放在 APP 里，便于学生练习时随时检验；附录里的积分表，可以帮助学生随时随地查找积分公式而不需翻看教材，减轻了学生的负担.

所有资源可以直接扫码使用，即扫即得；也可以在 APP 里列表式阅读. 在使用过程中，如有疑问，请使用下列联系方式与我们沟通！

联系电话：010-82330186、13811568712

客服 QQ：2158198813

电子邮箱：kf@guangyiedu.com

经济应用基础数学系列精品教材

微积分编委会

第2版前言

在目前经济全球化的大背景下，对经济发展规律的研究更加显得迫切和重要，而数学在这一过程中的作用更加突出，各种经济数学模型应运而生．“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”是三门重要的经济应用数学基础课．“微积分”这门课程的思想和方法是人类文明发展史上理性与智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供一种思维的训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才必需的文化素质和修养．

本书是“互联网+”创新型立体化教材，与手机APP平台相结合，提供丰富的微课、交互动画、释疑解难等助学、助教数字资源，为“微积分”的教授与学习提供更好的服务．

本书以提高所面向的高等学校学生的数学素质为目的，渗透了不少现代数学观点，着力培养和提高学生应用数学方法解决经济问题的能力．在内容选取上既注重微积分在传统领域中的知识内容，又加强了它在经济应用中的内容介绍．在叙述上力求清楚易懂，以几何意义对概念和定理加以解释说明，便于读者对相关概念和定理的理解和掌握．

本书内容包括集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数与微分、不定积分、定积分、一元函数微分学和积分学的应用、空间解析几何和向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程等．各节后配有适量的习题．

本书由《微积分》编写组编写，李建平、张保林、曹定华担任主编，盛春红、王爱银、周密担任副主编，参加编写的人员有韩萍、阿不都热西提·阿不力孜、王宏．黄立宏教授认真审查了本书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢．

由于编者的水平有限，在编写过程中疏忽与不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正！

编　者

2017 年 7 月

CONTENTS 目录

第1章 函 数

微积分的主要研究对象是函数. 通常人们应用两种方法研究函数. 一种方法是代数方法和几何方法的综合运用. 一般用这种方法只能研究函数的简单性质，并且有时会变得很复杂. 例如，初等数学应用这种方法研究了函数的单调性、奇偶性、周期性等性质. 另一种方法是应用微积分的方法，或者说是极限的方法. 用此方法能够研究函数的许多深刻性质，其过程相对简单. 微积分是用极限的方法研究函数的一门基础数学课程. 因此，首先介绍函数的概念及相关知识.

第 1 节　函数的概念及其基本性质

一、集合及其运算

自从德国数学家康托尔(Georg Cantor,1845—1918)在 19 世纪末创立集合论以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为现代数学的基础和语言. 一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体. 组成集合的各个对象称为该集合的元素.

习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 用 $a\in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素,读作"a 属于 A";用 $a\notin A$(或 $a\,\overline{\in}\,A$)表示 a 不是集合 A 中的元素,读作"a 不属于 A". 含有有限多个元素的集合称为有限集;含有无限多个元素的集合称为无限集;不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

集合的表示方法有两种:列举法和描述法. 列举法是把集合中的所有元素一一列出,写在一个花括号内的一种方法. 如 $A=\{-1,1\}$,$B=\{0,1,2\}$ 等. 描述法是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质的一种方法. 如 $C=\{x\mid x^2-1\geqslant 0\}$,$D=\{x\mid \sin x=0\}$ 等.

在人类的社会发展过程中,人们对数的认识是逐步发展的. 首先被人类所认识的是自然数,全体自然数构成的集合称为自然数集,记为 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$. 在做减法运算的过程中,人们引入了负数,数的集合扩大到整数集 $\mathbf{Z}=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\cdots\}$. 在除法运算的过程中数集扩大到了有理数集 $\mathbf{Q}=\{x\mid x=\dfrac{p}{q};p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\}$. 即一个数是有理数,当且仅当它可以写成分数.

在中学我们知道,有理数可以表示为有限小数或者是无限循环小数的形式. 如 $\dfrac{1}{2}=0.5$,$-\dfrac{1}{4}=-0.25$,$\dfrac{1}{3}=0.\dot{3}$.

我们知道,**数轴**是指定了原点、正方向和单位长度的直线. 任何一个有理数在数轴上都有相应的点与之对应,称为有理点. 有理点在数轴上是处处稠密的,即在任意的两个有理点之间,仍有有理点. 这是因为,对于任何不相等的两个有理数 a 和 b,均有有理数 $\dfrac{a+b}{2}$ 介于其间,虽然有理数在数轴上处处稠密,但有理点却未充满整个数轴. 如古代就已经发现的圆周率 π 和直角边均为 1 的直角三角形的斜边长度 $\sqrt{2}$,当用十进制小数表示时,都不

是有限的或无限循环的. 如 $\pi=3.1415926\cdots$, $\sqrt{2}=1.4142135\cdots$. 这种无限不循环小数称为**无理数**. 无理数在数轴上对应的点叫作无理点.

有理数与无理数统称为**实数**. 实数集记为 **R**. 实数的全体充满了整个数轴,每一个实数对应着数轴上一个点的坐标,数轴上一个点的坐标对应着一个实数,实数与数轴上的点一一对应,即实数不但是稠密的,而且是连续的. 为了表述方便,一般实数与数轴上的点不加区分,并且我们主要是在实数域上学习微积分.

对于集合 A 和 B,若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素,即若 $a\in A$ 则 $a\in B$,这时就称 A 是 B 的一个子集,记作 $A\subseteq B$,读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A");若 $A\subseteq B$,且存在 $b\in B$,使得 $b\notin A$,则称 A 是 B 的一个真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

规定:空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A,B 相等,记作 $A=B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素,反之,B 中的元素也都是 A 中的元素,即 A,B 中的元素完全一样.

设 A,B 是两个集合,称 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. 它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合.

称 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为集合 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合.

称 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为集合 A 与 B 的差集,记作 $A-B$,即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合.

集合的运算满足下述基本法则:

定理 1

设 A,B,C 为三个集合,则

(1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;　　(**交换律**)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;　　(**结合律**)

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,　　(**分配律**)
　$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$;

(4) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;　　(**幂等律**)

(5) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$;
　若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$, $A\cap B=A$.　　(**吸收律**)

特别地,由于 $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$,所以有

$$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A.$$

二、实数的绝对值

在实际计算中，实数的绝对值是经常用到的概念. 下面介绍实数绝对值的定义及一些性质.

定义 1 实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，它是一个非负实数，即

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如，$|3.78|=3.78$，$|-8|=8$，$|0|=0$.

$|x|$ 的几何意义为 $|x|$ 表示数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|\geqslant 0$. 当且仅当 $x=0$，才有 $|x|=0$.

(2)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$.

(3)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|=\sqrt{x^2}$.

(4)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(5)设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$.

(6)设 $a\geqslant 0$，则 $|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$.

(7)设 $a\geqslant 0$，则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或者 $x>a$.

(8)设 $a\geqslant 0$，则 $|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是 $x\leqslant -a$ 或者 $x\geqslant a$.

它们的几何解释是很直观的. 例如性质(5)，在数轴上 $|x|<a$ 表示所有与原点距离小于 a 的点 x 构成的点集，$-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 与点 a 之间点 x 构成的点集，它们表示同一个点集. 性质(6)～(8)可做类似的解释. 请读者用集合的形式表示性质(5)～(8).

由性质(5)可以推得不等式 $|x-A|<a$ 与 $A-a<x<A+a$ 是等价的，其中 A 为实数，a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值，有以下的结论：

对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有

(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ （三角不等式）.

(2) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|\geqslant|x|-|y|$.

(3) $|xy|=|x||y|$.

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

下面仅就结论(1)进行证明.

证 由性质(4)，有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$ 及 $-|y|\leqslant y\leqslant|y|$，从而有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

根据性质(6)，由于$|x|+|y|\geqslant 0$(相当于性质(6)中$a\geqslant 0$)，得

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

三、区间与邻域

设$a,b\in\mathbf{R}$，且$a<b$，记$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为开区间；记$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为闭区间；记$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左闭右开区间；记$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左开右闭区间；$a,b$分别称为区间的左端点和右端点.

另外，我们还记$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid a<x,x\in\mathbf{R}\}$，等等.

设$x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，记$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，称为$x_0$的$\delta$邻域，其中$x_0$称为该邻域的中心，$\delta$称为该邻域的半径. 容易知道

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

记$\mathring{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)-\{x_0\}=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为$x_0$的去心$\delta$邻域.

当不必知道邻域的半径δ的具体值时，常将x_0的邻域和去心邻域分别简记为$U(x_0)$和$\mathring{U}(x_0)$.

四、函数的概念

定义 2　设D为非空实数集，若存在对应法则f，使得对任意的$x\in D$，按照对应法则f，都有唯一确定的$y\in\mathbf{R}$与之对应，则称f为定义在D上的一个一元函数，简称函数. D称为f的定义域，记作$D(f)$(或D_f). 对于$x\in D(f)$，称其对应值y为函数f在点x处的函数值，记作$f(x)$，即$y=f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为f的值域，记作$f(D)$或$\mathbf{R}(f)$(或$\mathbf{R}_f$)，即

$$\mathbf{R}_f=\{f(x)\mid x\in D(f)\}.$$

应该注意：在定义 2 中，函数是f，它是一个对应法则，规定了$D(f)$中的x对应于哪个实数y；而$f(x)$(即y)则是函数值，是在对应法则f的规定下x所对应的值，这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因，我们习惯上也把$f(x)$(或y)称为x的函数，x称为自变量，y称为因变量.

由定义 2 可知，确定一个函数需确定其定义域和对应法则，因此，定义域和对应法则为确定函数的两个要素. 如果两个函数f和g的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数相同.

函数的表示法一般有三种：表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点，表格法一目了然；图像法形象直观；解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

例1　求 $\varphi(x)=\ln x^2$ 和 $g(x)=2\ln x$ 的定义域，并判断它们是否为同一个函数.

解　我们在中学时就已学过，对于用解析式表示的函数 $f(x)$，若其定义域未给出，则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此，要使 $\varphi(x)$ 有意义，x 必须满足

$$x^2>0,\quad 即\quad x\neq 0,$$

故 $\varphi(x)$ 是定义在 $D(\varphi)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数.

要使 $g(x)$ 有意义，x 必须满足

$$x>0,$$

故 $g(x)$ 是定义在 $D(g)=(0,+\infty)$ 上的函数. 由于 $D(\varphi)\neq D(g)$，所以 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

例2　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & 当\ x<0\ 时,\\ x^2+1, & 当\ x\geqslant 0\ 时.\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，并作出函数图形.

解　这是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个函数，在定义域的不同部分上，函数的表达式不同，这种函数称为**分段函数**. 当 $x<0$ 时，对应的函数值 $f(x)=x-1$[即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$]；而当 $x\geqslant 0$ 时，对应的函数值 $f(x)=x^2+1$[即用 x^2+1 来计算 $f(x)$]. 所以

$$f(-1)=(-1)-1=-2,$$
$$f(0)=0^2+1=1,$$
$$f(2)=2^2+1=5.$$

函数图形可分段描绘，并注意空心点和实心点的区别，如图1-1所示.

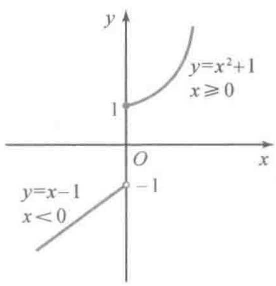

图1-1

五、复合函数和反函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$，$u\in U$，而 $u=\varphi(x)$，$x\in X$，此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为对任取 $x\in X$，由 u 是 x 的函数，可确定唯一的一个 u 与之对应，又由于 y 是 u 的函数，对由 x 所确定的 u（当 $u\in U$ 时），又可确定唯一一个 y 与 u 对应，即 $x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y$，所以由函数的定义知 y 是 x 的函数. 其函数式可通过代入运算得到：将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中，得 $y=f[\varphi(x)]$，称为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数.