



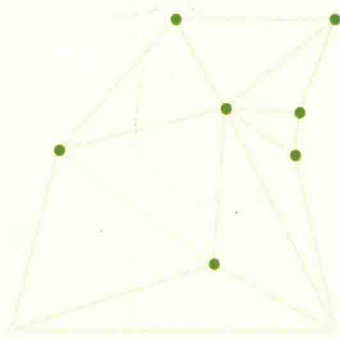
财 政 部 规 划 教 材
“十三五”普通高等教育规划教材

经济数学（一）

微 积 分

第2版

《微积分》编写组 编



中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社



财政部规划教材

“十三五”普通高等教育规划教材

微 积 分

第 2 版

《微积分》编写组 编



中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分/《微积分》编写组编. —2版. —北京: 中国财政经济出版社, 2017. 8
财政部规划教材 “十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5095-7674-8

I. ①微… II. ①微… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 200574 号

责任编辑: 王 芳 田明晖

责任校对: 李 静

封面设计: 赫 健

版式设计: 王志强

中国财经出版传媒集团 出版
中国财政经济出版社

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: jiaoyu@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100142

营销中心电话: 010-82333010 编辑部门电话: 010-88190670

北京时捷印刷有限公司印刷 各地新华书店经销

787×1092 毫米 16 开 23.5 印张 594 000 字

2017 年 8 月第 2 版 2017 年 8 月北京第 1 次印刷

定价: 48.00 元

ISBN 978-7-5095-7674-8

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

本社质量投诉电话: 010-88190744

打击盗版举报热线: 010-88190414、QQ: 447268889

广益教育“九斗”APP 操作说明

本书为“互联网+”立体化教材,配有广益教育助学助教平台——“九斗”APP.

使用前,请按照以下步骤操作使用.

步骤一,先使用智能手机扫描本书封面图标中的二维码(见下图),下载安装免费的“九斗”APP.提示:下载界面会自动识别安卓或苹果手机.



步骤二,安装成功之后,点击“九斗”APP 进入使用界面.

步骤三,首次使用 APP 需注册.注册时,如果您是教师用户,请提交相关资料进行审核,审核通过后即可获得教师用户的相关功能.

步骤四,注册成功后,使用时,请按照软件提示或宣传视频操作即可.

提示:

1. 浏览资源前请先扫描封底二维码进行教材验证;

2. 对教材中带有  标志的图形图像,使用 AR 扫描即可显示相关资源;

3. 教材中的二维码资源请使用“九斗”APP 中的扫一扫功能进行浏览.

关于数字资源说明如下:

1. 微课:对教材中的重点、难点,从通俗易懂的角度进行诠释性补充讲解,有利于学生的自我学习和巩固学习.

2. 交互动画:从三维几何的角度,通过立体化、动画演示、交互体验来展现数学的本质,把几何图形的诠释作用极大化.

3. 释疑解难:对常见的疑惑,思维误区,难以理解的内容,进行答疑式解答,举例分析,释放学生的困惑,让学生少走弯路.

4. 参考答案及附录:把每章的参考答案放在 APP 里,便于学生练习时随时检验;附录里的积分表,可以帮助学生随时随地查找积分公式而不需翻看教材,减轻了学生的负担.

所有资源可以直接扫码使用,即扫即得;也可以在 APP 里列表式阅读.在使用过程中,如有疑问,请使用下列联系方式与我们沟通!

联系电话:010-82330186、13811568712

客服 QQ:2158198813

电子邮箱:kf@guangyiedu.com

经济应用基础数学系列精品教材

微积分编委会

李建平 张保林 王 宏 涂晓青

吴 曦 白淑敏 崔红卫 黄立宏

盛春红 周 密

第2版前言

在目前经济全球化的大背景下,对经济发展规律的研究更加显得迫切和重要,而数学在这一过程中的作用更加突出,各种经济数学模型应运而生.“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”是三门重要的经济应用数学基础课.“微积分”这门课程的思想和方法是人类文明发展史上理性与智慧的结晶,它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具,同时还给学生提供一种思维的训练,帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才必需的文化素质和修养.

本书是“互联网+”创新型立体化教材,与手机 APP 平台相结合,提供丰富的微课、交互动画、释疑解难等助学、助教数字资源,为“微积分”的教授与学习提供更好的服务.

本书以提高所面向的高等学校学生的数学素质为目的,渗透了不少现代数学观点,着力培养和提高学生应用数学方法解决经济问题的能力.在内容选取上既注重微积分在传统领域中的知识内容,又加强了它在经济应用中的内容介绍.在叙述上力求清楚易懂,以几何意义对概念和定理加以解释说明,便于读者对相关概念和定理的理解和掌握.

本书内容包括集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数与微分、不定积分、定积分、一元函数微分学和积分学的应用、空间解析几何和向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程等.各节后配有适量的习题.

本书由《微积分》编写组编写,李建平、张保林、曹定华担任主编,盛春红、王爱银、周密担任副主编,参加编写的人员有韩萍、阿不都热西提·阿不力孜、王宏、黄立宏教授认真审查了本书,并提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢.

由于编者的水平有限,在编写过程中疏忽与不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正!

编者
2017年7月

CONTENTS 目录



第1章 函数 /1

第1节 函数的概念及其基本性质 /2

一、集合及其运算 /2

二、实数的绝对值 /4

三、区间与邻域 /5

四、函数的概念 /5

五、复合函数和反函数 /6

六、函数的基本性质 /9

习题 1-1 /11

第2节 初等函数 /12

一、基本初等函数 /12

二、初等函数 /15

习题 1-2 /17

第3节 经济学中常见的函数 /17

一、成本函数 收益函数 利润函数 /17

二、需求函数与供给函数 /19

习题 1-3 /20

第2章 极限与连续 /21

第1节 数列的极限 /22

一、数列的概念 /22

二、数列的极限 /23

三、数列极限的性质及收敛准则 /27

习题 2-1 /30

第2节 函数的极限 /31

一、 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限 /31

二、 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数的极限 /33

三、函数极限的性质 /36

习题 2-2 /37

第3节 无穷小量和无穷大量 /38

一、无穷小量 /38

二、无穷大量 /40

习题 2-3 /43

第4节 函数极限的运算 /43

一、极限的运算法则 /43

二、复合函数的极限 /47

习题 2-4 /49

第5节 两个重要极限 /49

一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ /49

二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ /51

习题 2-5 /54

第6节 无穷小量的比较和极限在经济学中的应用 /55

一、无穷小量比较的概念 /55

二、关于等价无穷小量的性质和定理	/56
三、极限在经济学中的应用	/58
习题 2-6	/61

第 7 节 函数的连续性	/61
一、函数连续性的概念	/61
二、函数的间断点	/64
三、连续函数的基本性质	/66
四、初等函数的连续性	/67
习题 2-7	/68

第 8 节 闭区间上连续函数的性质	/69
一、最值定理	/69
二、零点存在定理	/70
三、介值定理	/71
习题 2-8	/72

第 3 章 导数与微分 /73

第 1 节 导数的概念	/74
一、导数的引入	/74
二、导数的定义	/75
三、导数的几何意义	/79
四、可导与连续的关系	/80
习题 3-1	/81

第 2 节 求导法则	/82
一、函数四则运算的求导法则	/82
二、复合函数的求导法则	/85
三、反函数的求导法则	/87
四、基本导数公式	/88
五、隐函数的求导法则	/89
六、取对数求导法	/90
七、参数方程的求导法则	/91
习题 3-2	/92

第 3 节 高阶导数	/93
习题 3-3	/97

第 4 节 微分及其运算	/98
一、微分的概念	/98
二、微分与导数的关系	/98
三、微分的几何意义	/100
四、复合函数的微分及微分公式	/100
习题 3-4	/102

第 5 节 导数与微分在经济学中的应用	/102
一、边际分析	/102
二、弹性分析	/104
三、增长率	/108
习题 3-5	/109

第 4 章 微分中值定理与导数的应用 /110

第 1 节 微分中值定理	/111
一、罗定定理	/111
二、拉格朗日中值定理	/112
三、柯西中值定理	/115
习题 4-1	/116

第 2 节 洛必达法则	/116
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	/117
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	/119
三、其他未定式	/121
习题 4-2	/123

第 3 节 泰勒公式	/124
一、泰勒公式	/124
二、函数的泰勒展开式举例	/127

习题 4-3 /129

第 4 节 函数的单调性与极值 /129

一、函数的单调性 /129

二、函数的极值 /132

习题 4-4 /135

第 5 节 最优化问题 /135

一、闭区间上连续函数的最大值和最小值 /135

二、经济学中的最优化问题举例 /136

三、其他优化问题 /140

习题 4-5 /141

第 6 节 曲线的凹凸性和拐点及渐近线 /142

一、函数的凹凸性和曲线的拐点 /142

二、曲线的渐近线 /145

三、函数图形的描绘 /147

习题 4-6 /148

第 5 章 不定积分 /150**第 1 节 不定积分的概念与性质 /151**

一、原函数 /151

二、不定积分 /152

三、不定积分的性质 /153

四、基本积分表 /154

习题 5-1 /156

第 2 节 换元积分法 /156

一、第一类换元法 /156

二、第二类换元法 /161

习题 5-2 /166

第 3 节 分部积分法 /167

习题 5-3 /171

第 4 节 几种特殊类型函数的积分 /171

一、有理函数的积分 /171

二、三角函数有理式的积分 /174

习题 5-4 /176

第 6 章 定积分 /177**第 1 节 定积分概念 /178**

一、定积分问题举例 /178

二、定积分的定义 /180

三、定积分的几何意义 /181

四、定积分的性质 /182

习题 6-1 /185

第 2 节 微积分基本公式 /186

一、积分上限函数 /186

二、微积分基本公式 /188

习题 6-2 /190

第 3 节 定积分的换元法 /190

习题 6-3 /195

第 4 节 定积分的分部积分法 /195

习题 6-4 /197

第 5 节 定积分的应用 /198

一、建立定积分数学模型的微元法 /198

二、定积分的几何应用 /199

三、定积分的经济学应用 /203

四、定积分在其他方面的应用 /206

习题 6-5 /207

第6节 反常积分初步 /208

一、无穷积分 /208

二、瑕积分 /211

三、 Γ 函数 /213

习题 6-6 /213

第7章 空间解析几何与向量代数 /215

第1节 空间直角坐标系 /216

一、空间直角坐标系 /216

二、空间两点间的距离公式 /216

习题 7-1 /217

第2节 向量及其运算 /217

一、向量的概念 /217

二、向量的加(减)法、数与向量的乘积 /218

三、向量的分解与向量的坐标 /219

习题 7-2 /221

第3节 向量的数量积与向量积 /221

一、向量的数量积 /221

二、向量的向量积 /224

习题 7-3 /226

第4节 平面及其方程 /226

一、平面的点法式方程 /226

二、平面的一般方程 /227

三、两平面的夹角 /229

习题 7-4 /230

第5节 直线及其方程 /230

一、空间直线的一般方程 /230

二、空间直线的点向式方程和参数方程
/231

三、两直线的夹角 /233

四、直线与平面的夹角 /234

习题 7-5 /235

第6节 空间曲面及空间曲线 /236

一、空间曲面及曲面方程的概念 /236

二、空间曲线及其方程 /239

三、二次曲面 /241

习题 7-6 /243

第8章 多元函数微积分 /245

第1节 多元函数的概念 /246

一、平面区域 /246

二、多元函数的概念 /248

习题 8-1 /250

第2节 二元函数的极限与连续性 /250

一、二元函数的极限 /250

二、二元函数的连续性 /252

三、有界闭区域上二元连续函数的性质 /253

习题 8-2 /253

第3节 偏导数与全微分 /254

一、偏导数 /254

二、全微分 /257

习题 8-3 /260

第4节 多元复合函数与隐函数的微分法 /261

一、多元复合函数的微分法 /261

二、隐函数的微分法 /266

习题 8-4 /269

第5节 高阶偏导数 /270

习题 8-5 /272

第6节 偏导数的应用 /272

一、一阶偏导数在经济学中的应用 /272

二、多元函数的极值及其应用 /275

习题 8-6 /281

第 7 节 二重积分 /281

一、二重积分的概念与性质 /282

二、二重积分的计算 /284

三、无界区域上的广义二重积分 /294

习题 8-7 /296

第 9 章 无穷级数 /298

第 1 节 数项级数的概念和性质 /299

一、数项级数及其敛散性 /299

二、数项级数的基本性质 /301

三、数项级数收敛的必要条件 /303

习题 9-1 /304

第 2 节 正项级数及其敛散性判别法 /305

习题 9-2 /310

第 3 节 任意项级数 /310

一、交错级数 /311

二、任意项级数及其敛散性判别法 /313

习题 9-3 /314

第 4 节 幂级数 /315

一、函数项级数 /315

二、幂级数及其敛散性 /316

三、幂级数的运算 /320

习题 9-4 /323

第 5 节 函数的幂级数展开 /323

一、泰勒级数 /324

二、初等函数的幂级数展开式 /325

习题 9-5 /329

第 10 章 微分方程初步 /330

第 1 节 微分方程的基本概念 /331

习题 10-1 /333

第 2 节 一阶微分方程 /333

一、可分离变量的方程 /334

二、齐次微分方程 /335

三、一阶线性微分方程 /337

习题 10-2 /341

第 3 节 高阶微分方程 /342

一、几类可降阶的高阶微分方程 /342

二、二阶线性微分方程解的性质与结构 /346

三、二阶常系数线性微分方程的解法 /348

习题 10-3 /355

第 4 节 微分方程在经济学中的应用 /356

一、供需均衡的价格调整模型 /356

二、索洛(Solow)新古典经济增长模型 /358

三、新产品的推广模型 /359

习题 10-4 /360

第1章 函 数



微积分的主要研究对象是函数.通常人们应用两种方法研究函数.一种方法是代数方法和几何方法的综合运用.一般用这种方法只能研究函数的简单性质,并且有时会变得很复杂.例如,初等数学应用这种方法研究了函数的单调性、奇偶性、周期性等性质.另一种方法是应用微积分的方法,或者说是极限的方法.用此方法能够研究函数的许多深刻性质,其过程相对简单.微积分是用极限的方法研究函数的一门基础数学课程.因此,首先介绍函数的概念及相关知识.

第1节 函数的概念及其基本性质



一、集合及其运算

自从德国数学家康托尔(Georg Cantor, 1845—1918)在19世纪末创立集合论以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为现代数学的基础和语言.一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种确定性性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的元素.

习惯上,用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素,读作“ a 属于 A ”;用 $a \notin A$ (或 $a \in A$) 表示 a 不是集合 A 中的元素,读作“ a 不属于 A ”.含有有限多个元素的集合称为有限集;含有无限多个元素的集合称为无限集;不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

集合的表示方法有两种:列举法和描述法.列举法是把集合中的所有元素一一列出,写在一个花括号内的一种方法.如 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ 等.描述法是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质的方法.如 $C = \{x | x^2 - 1 \geq 0\}$, $D = \{x | \sin x = 0\}$ 等.

在人类的社会发展过程中,人们对数的认识是逐步发展的.首先被人类所认识的是自然数,全体自然数构成的集合称为自然数集,记为 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.在做减法运算的过程中,人们引入了负数,数的集合扩大到整数集 $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

在除法运算的过程中数集扩大到了有理数集 $\mathbf{Q} = \{x | x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$.即一个数是有理数,当且仅当它可以写成分数.

在中学我们知道,有理数可以表示为有限小数或者是无限循环小数的形式.如 $\frac{1}{2} = 0.5$, $-\frac{1}{4} = -0.25$, $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$.

我们知道,数轴是指定了原点、正方向和单位长度的直线.任何一个有理数在数轴上都有相应的点与之对应,称为有理点.有理点在数轴上是处处稠密的,即在任意的两个有理点之间,仍有有理点.这是因为,对于任何不相等的两个有理数 a 和 b ,均有有理数 $\frac{a+b}{2}$ 介于其间,虽然有有理数在数轴上处处稠密,但有理点却未充满整个数轴.如古代就已经发现的圆周率 π 和直角边均为1的直角三角形的斜边长度 $\sqrt{2}$,当用十进制小数表示时,都不

是有限的或无限循环的. 如 $\pi=3.141\ 592\ 6\cdots$, $\sqrt{2}=1.414\ 213\ 5\cdots$. 这种无限不循环小数称为**无理数**. 无理数在数轴上对应的点叫作无理点.

有理数与无理数统称为**实数**. 实数集记为 $\mathbf{R}$. 实数的全体充满了整个数轴, 每一个实数对应着数轴上一个点的坐标, 数轴上一个点的坐标对应着一个实数, 实数与数轴上的点一一对应, 即实数不但是稠密的, 而且是连续的. 为了表述方便, 一般实数与数轴上的点不加区分, 并且我们主要是在实数域上学习微积分.

对于集合 A 和 B , 若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素, 即若 $a \in A$ 则 $a \in B$, 这时就称 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subseteq B$, 读作“ A 包含于 B ”(或“ B 包含 A ”); 若 $A \subseteq B$, 且存在 $b \in B$, 使得 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的一个真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

规定: 空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A, B 相等, 记作 $A=B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素, 反之, B 中的元素也都是 A 中的元素, 即 A, B 中的元素完全一样.

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合.

称 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为集合 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合.

称 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为集合 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 即 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合.

集合的运算满足下述基本法则:

定理 1

设 A, B, C 为三个集合, 则

$$(1) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A; \quad (\text{交换律})$$

$$(2) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (\text{结合律})$$

$$(3) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (\text{分配律}) \\ (A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C);$$

$$(4) A \cup A = A, A \cap A = A; \quad (\text{幂等律})$$

$$(5) A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$$

若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B, A \cap B = A$. (吸收律)

特别地, 由于 $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, 所以有

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$$



二、实数的绝对值

在实际计算中,实数的绝对值是经常用到的概念.下面介绍实数绝对值的定义及一些性质.

定义 1 实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,它是一个非负实数,即

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例如, $|3.78| = 3.78$, $|-8| = 8$, $|0| = 0$.

$|x|$ 的几何意义为 $|x|$ 表示数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质:

(1) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $|x| \geq 0$. 当且仅当 $x = 0$, 才有 $|x| = 0$.

(2) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $|-x| = |x|$.

(3) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $|x| = \sqrt{x^2}$.

(4) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $-|x| \leq x \leq |x|$.

(5) 设 $a > 0$, 则 $|x| < a$ 的充分必要条件是 $-a < x < a$.

(6) 设 $a \geq 0$, 则 $|x| \leq a$ 的充分必要条件是 $-a \leq x \leq a$.

(7) 设 $a \geq 0$, 则 $|x| > a$ 的充分必要条件是 $x < -a$ 或者 $x > a$.

(8) 设 $a \geq 0$, 则 $|x| \geq a$ 的充分必要条件是 $x \leq -a$ 或者 $x \geq a$.

它们的几何解释是很直观的. 例如性质(5), 在数轴上 $|x| < a$ 表示所有与原点距离小于 a 的点 x 构成的点集, $-a < x < a$ 表示所有位于点 $-a$ 与点 a 之间点 x 构成的点集, 它们表示同一个点集. 性质(6)~(8)可做类似的解释. 请读者用集合的形式表示性质(5)~(8).

由性质(5)可以推得不等式 $|x-A| < a$ 与 $A-a < x < A+a$ 是等价的, 其中 A 为实数, a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值, 有以下的结论:

对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 恒有

(1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式).

(2) $|x-y| \geq ||x| - |y|| \geq |x| - |y|$.

(3) $|xy| = |x| |y|$.

(4) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$).

下面仅就结论(1)进行证明.

证 由性质(4), 有 $-|x| \leq x \leq |x|$ 及 $-|y| \leq y \leq |y|$, 从而有

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

根据性质(6), 由于 $|x| + |y| \geq 0$ (相当于性质(6)中 $a \geq 0$), 得

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

三、区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 记 $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为开区间; 记 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为闭区间; 记 $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为左闭右开区间; 记 $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为左开右闭区间; a, b 分别称为区间的左端点和右端点.

另外, 我们还记 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b, x \in \mathbf{R}\}$, $(a, +\infty) = \{x | a < x, x \in \mathbf{R}\}$, 等等.

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 记 $U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 称为 x_0 的 δ 邻域, 其中 x_0 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 容易知道

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

记 $\dot{U}(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) - \{x_0\} = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 称为 x_0 的去心 δ 邻域.

当不必知道邻域的半径 δ 的具体值时, 常将 x_0 的邻域和去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\dot{U}(x_0)$.

四、函数的概念

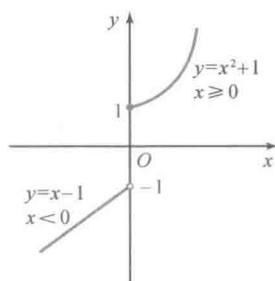
定义 2 设 D 为非空实数集, 若存在对应法则 f , 使得对任意的 $x \in D$, 按照对应法则 f , 都有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数, 简称函数. D 称为 f 的定义域, 记作 $D(f)$ (或 D_f). 对于 $x \in D(f)$, 称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域, 记作 $f(D)$ 或 $\mathbf{R}(f)$ (或 $\mathbf{R}_f$), 即

$$\mathbf{R}_f = \{f(x) | x \in D(f)\}.$$

应该注意: 在定义 2 中, 函数是 f , 它是一个对应法则, 规定了 $D(f)$ 中的 x 对应于哪个实数 y ; 而 $f(x)$ (即 y) 则是函数值, 是在对应法则 f 的规定下 x 所对应的值, 这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因, 我们习惯上也把 $f(x)$ (或 y) 称为 x 的函数, x 称为自变量, y 称为因变量.

由定义 2 可知, 确定一个函数需确定其定义域和对应法则, 因此, 定义域和对应法则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应法则都相同, 则称这两个函数相同.

函数的表示法一般有三种: 表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点, 表格法一目了然; 图像法形象直观; 解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.



→ 图 1-1

例 1 求 $\varphi(x) = \ln x^2$ 和 $g(x) = 2\ln x$ 的定义域, 并判断它们是否为同一个函数.

解 我们在中学时就已学过, 对于用解析式表示的函数 $f(x)$, 若其定义域未给出, 则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此, 要使 $\varphi(x)$ 有意义, x 必须满足

$$x^2 > 0, \quad \text{即} \quad x \neq 0,$$

故 $\varphi(x)$ 是定义在 $D(\varphi) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数.

要使 $g(x)$ 有意义, x 必须满足

$$x > 0,$$

故 $g(x)$ 是定义在 $D(g) = (0, +\infty)$ 上的函数. 由于 $D(\varphi) \neq D(g)$, 所以 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \\ x^2+1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, 并作出函数图形.

解 这是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个函数, 在定义域的不同部分上, 函数的表达式不同, 这种函数称为分段函数. 当 $x < 0$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x-1$ [即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$]; 而当 $x \geq 0$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x^2+1$ [即用 x^2+1 来计算 $f(x)$]. 所以

$$f(-1) = (-1) - 1 = -2,$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

函数图形可分段描绘, 并注意空心点和实心点的区别, 如图 1-1 所示.

五、复合函数和反函数

1. 复合函数

设 $y = f(u)$, $u \in U$, 而 $u = \varphi(x)$, $x \in X$, 此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为对任取 $x \in X$, 由 u 是 x 的函数, 可确定唯一的一个 u 与之对应, 又由于 y 是 u 的函数, 对由 x 所确定的 u (当 $u \in U$ 时), 又可确定唯一的一个 y 与 u 对应, 即 $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y$, 所以由函数的定义知 y 是 x 的函数. 其函数式可通过代入运算得到: 将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中, 得 $y = f[\varphi(x)]$, 称为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数.