GAODENG SHUXUE LIANXI YU TIGAO

高等数学

练习与提高（四）

王元媛　杨迪威　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

高等数学练习与提高

（四）

GAODENG SHUXUE LIANXI YU TIGAO

王元媛　杨迪威　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习与提高. 四/王元媛,杨迪威主编. —武汉:中国地质大学出版社,2018.2
ISBN 978-7-5625-4228-5

Ⅰ. ①高…
Ⅱ. ①王…②杨…
Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 020541 号

高等数学练习与提高(四)　　王元媛　杨迪威　主编

责任编辑:郑济飞　龙昭月　　责任校对:周　旭

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)　　邮政编码:430074
电　话:(027)67883511　　传真:67883580　　E-mail:cbb@cug.edu.cn
经　销:全国新华书店　　http://cugp.cug.edu.cn

开本:787 毫米×1 092 毫米 1/16　　字数:115 千字　印张:4.5
版次:2018 年 2 月第 1 版　　印次:2018 年 2 月第 1 次印刷
印刷:武汉市籍缘印刷厂

ISBN 978-7-5625-4228-5　　定价:11.00 元

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

第一节　向量及其线性运算

理解向量的概念，熟悉向量的线性运算，理解空间直角坐标系、坐标轴、坐标面，理解向量的坐标分解式，会用坐标进行向量的线性运算，理解向量的模、方向角的概念及坐标表示式，理解投影的思想.

知识要点

1. 向量的定义，向量的模，零向量，向量的平行，向量的加法运算法则和减法运算法则，向量与数的乘法，向量平行的充分必要条件；

2. 空间直角坐标系的建立，向量的坐标分解式，利用坐标作向量的线性运算，利用向量的坐标判断两个向量的平行；

3. 向量的模、方向角、方向余弦及坐标表示式.

典型例题

例 1　设点 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

分析： 根据点的位置特征设出坐标，再由两点间距离公式和题目条件解得未知数.

解： 设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$

$$|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$

由 $|PP_1|=2|PP_2|$，得 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$，得 $x=\pm 1$，　所求点为 $(1,0,0)$，$(-1,0,0)$.

例 2　求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

分析： 一个非零除以自己的模，即得与其同方向的单位向量。注意向量平行既包括同向也包括反向.

解：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,

$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{6}{11}\boldsymbol{i}+\dfrac{7}{11}\boldsymbol{j}-\dfrac{6}{11}\boldsymbol{k}$，$-\boldsymbol{a}^{\circ}=-\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\dfrac{6}{11}\boldsymbol{i}-\dfrac{7}{11}\boldsymbol{j}+\dfrac{6}{11}\boldsymbol{k}$.

A 类题

1. 指出下列点的特殊性：

(1) (4,0,0)；

(2) (0,−7,0)；

(3) (0,−7,2)；

(4) (5,0,3).

2. 求点(a,b,c)关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点对称的点的坐标.

3. 设某点与给定点(2,−3,−1)分别关于下列坐标面：(1) xoy 平面；(2) yoz 平面；(3) xoz 平面对称，求它的坐标.

4. 设某点与给定点(2,−3,−1)分别关于下列各轴：(1)x 轴；(2)y 轴；(3)z 轴对称，求它的坐标.

5. 求点 $M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.

6. 设 $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$，求 z.

7. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？

8. 在 y 轴上求与点 $M_1(1,2,3)$ 和 $M_2(2,3,2)$ 等距离的点坐标.

9. 求证：以 $A(2,1,9)$，$B(8,-1,6)$，$C(0,4,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰直角三角形.

10. 在 yoz 平面上求与已知三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

11. 设一向量与各坐标轴之间的夹角为 α,β,γ，其中 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，求 γ.

12. 分别求 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,5)$，$\boldsymbol{c}=(-2,-1,2)$ 的模，并且用单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$，$\boldsymbol{c}^0$ 表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

13. 已知两点 $A(4,0,5)$,$B(7,1,3)$,求$\overrightarrow{AB}$,$|\overrightarrow{AB}|$及方向与$\overrightarrow{AB}$一致的单位向量.

14. 给定两点 $M_1(2,5,-3)$和 $M_2(3,-2,5)$,设在线段$\overline{M_1M_2}$上的一点 M 满足$\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$,求向量$\overrightarrow{OM}$的坐标.

15. 设向量$|\boldsymbol{a}|=6$,$\boldsymbol{a}$ 与 x,y 轴的夹角分别为$\frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

16. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$,$M_2(3,0,2)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

17. 设 $M_1(1,3,4)$,$M_2(2,1,3)$,求$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$,$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$,$\overrightarrow{M_1M_2}$.

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴成相等的锐角,求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 若$|\boldsymbol{a}|=2$,求 $\boldsymbol{a}$.

B 类题

1. 从点 $A(2,-1,7)$沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取线段$\overline{AB}$，其长为$|AB|=34$，求点 B 坐标.

2. 已知不共线的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，求它们的夹角平分线上的单位向量.

3. 设平面上的一个四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

第二节　数量积　向量积

理解数量积的物理模型、定义、运算性质，理解向量积的定义和运算性质，掌握数量积和向量积的坐标表示式，能够熟练进行数量积和向量积的运算.

知识要点

1. 数量积的定义和物理模型，数量积的投影表示式，数量积的性质和运算律，数量积的坐标式，利用数量积求两向量的夹角；

2. 向量积的定义，向量积的性质和运算律，向量积的坐标表示式.

典型例题

例 1　已知 $\boldsymbol{a}=\{1,1,-4\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-2,2\}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

分析：(1) 代入数量积的坐标表示式；(2)代入夹角的坐标表示式；(3)基于数量积的投影表示式.

解:(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9$.

(2) $\because \cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad\therefore \theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

(3) $\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$, $\quad\therefore \mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=-3$.

例 2 证明向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

分析:两个向量垂直的充要条件是数量积为零.

证明:$[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{c}=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}]$

$=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}]=0$,得证.

例 3 求与 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量.

分析:两个向量的向量积同时垂直于这两个向量.

解:$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,$\pm\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\boldsymbol{c}}=\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}\right)$.

A 类题

1. 判断正误:

(1) 若 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$,则必有 $\boldsymbol{a}\geqslant\boldsymbol{b}$. (   )

(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影相等,则必有 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. (   )

(3) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. (   )

(4) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则必有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. (   )

(5) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则必有 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$. (   )

2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模、方向余弦及 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

3. 求与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

4. 求向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 在向量 $\boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 上的投影及分向量.

5. 若 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

6. 求同时垂直于 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

7. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

8. 证明：

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$.

9. 已知平行四边形的两对角线向量为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$，而 $|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2$，$(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=30°$，求此平行四边形面积.

B 类题

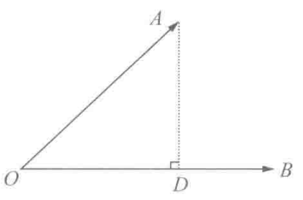
1. 已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是单位向量，且满足 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\vec{0}$，求 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3,|\boldsymbol{c}|=5,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=7,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=8$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=\dfrac{\pi}{3},(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=\dfrac{\pi}{6},|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

4. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，已知 $\boldsymbol{b}$ 在与 $\boldsymbol{a}$ 平行且正向与 $\boldsymbol{a}$ 一致的数轴上投影为 p，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

5. 如图，已知向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，求证：



(1) $\triangle ODA$ 的面积等于 $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2\,|\boldsymbol{b}|^2}$；

(2) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为何值时，$\triangle ODA$ 的面积取最大值？

6. 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(0,1,-2),\boldsymbol{c}=(2,-2,1)$，试在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 确定的平面内，求一个模为 3 的向量 $\boldsymbol{d}$，使 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{c}$.

7. 设点 C 是点 A 和 B 连线外一点，证明：A,C,B 三点共线的充要条件是$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$.

第三节　平面及其方程

理解曲面方程和空间曲线方程的概念，理解平面的点法式方程和一般方程，能够根据已知条件求平面的方程，理解并且会求平面的夹角，掌握点到平面的距离公式.

知识要点

1. 平面的点法式方程；

2. 平面的一般方程；

3. 平面的截距式方程；

4. 点到平面的距离公式.

典型例题

例 1　求过点 $M(2,4,-3)$ 且与平面 $2x+3y-5z=5$ 平行的平面方程.

分析：若两平面平行，则它们的法向量平行，可取已知平面的法向量为所求平面的法向量，从而得到所求平面的点法式方程.

解：因为所求平面和已知平面平行，而已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{2,3,-5\}$. 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{n}_1$，故可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1$，于是，所求平面方程为

$$2(x-2)+3(y-4)-5(z+3)=0,\text{即 } 2x+3y-5z=31.$$

例 2　设平面过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

分析：采用待定系数法，利用两平面垂直的条件和其他已知条件，求得参数的比例关系.

解：设为 $Ax+By+Cz+D=0$，由平面过原点知 $D=0$，由平面过点 $(6,-3,2)$ 知 $6A-3B+2C=0$. 又 $\{A,B,C\}\perp\{4,-1,2\}$，得 $4A-B+2C=0$，得 $A=B=-\dfrac{2}{3}C$，

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

例 3　求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

分析：设出平面方程并化为截距式，进而用截距表示四面体的体积.

解：设平面方程为 $6x+y+6z=k$，即 $\dfrac{x}{\frac{k}{6}}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{\frac{k}{6}}=1$，则 $\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{k}{6}\cdot k\cdot\dfrac{k}{6}\right|=1$.

得 $k=\pm 6$，所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6$.

A 类题

1. 判断正误：

(1) 一个平面的法线向量是唯一的. ( )

(2) 三个点可以决定唯一一个平面. ( )

(3)任何平面都有截距式方程. ( )

2. 求过点 $M_0(-2,-9,6)$ 且与连接坐标原点及 M_0 的线段 $\overline{OM_0}$ 垂直的平面方程.

3. 求过定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且经过 x 轴的平面方程.

4. 求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

5. 求过三点 $A(1,2,3)$，$B(-2,1,-3)$ 和 $C(-2,-2,2)$ 的平面方程.

6. 一平面通过点 $(2,1,-1)$，它在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 2 和 1，求该平面方程.

7. 一平面经过坐标原点和点 $A(6,3,2)$，并与平面 $5x+4y-3z=8$ 垂直，求其平面方程.

8. 经过点 $M(-5,16,12)$ 作两个平面，一个包含 x 轴，另一个包含 y 轴，计算这两个平面间的夹角.

9. 求点 $M(3,2,1)$ 到平面 $x-2y+3z-16=0$ 的距离.

10. 一平面经过 oz 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=7$ 的夹角为 $60°$，试求方程.

B 类题

1. 已知 $|\overrightarrow{OM_0}|=p$，$|\overrightarrow{OM_0}|$ 的方向角分别为 α,β,γ，试证明：过点 M_0 且垂直于 $|\overrightarrow{OM_0}|$ 的平面方程为 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$.

2. 设有一平面，它与 xoy 坐标平面的交线是 $\begin{cases}2x+y-2=0,\\ z=0,\end{cases}$ 且它与三个坐标面所围成四面体的体积等于 2，求该平面的方程.

3. 一平面通过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，且平行于矢量 $\boldsymbol{a}=\{m,n,p\}$，假定 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不平行，求此平面方程.

4. 设两平面 $\pi_1:2x-3y+\sqrt{3}z+4=0$，$\pi_2:3x+2y-2\sqrt{3}z-5=0$，求它们的两个平分角平面方程.

第四节　空间直线及其方程

理解直线的一般方程、对称式方程和参数方程，会把一般方程化为对称式方程和参数方程，理解并会求直线的夹角、直线与平面的夹角，会解与直线和平面有关的综合性问题.

知识要点

1. 空间直线的一般方程；
2. 空间直线的对称式方程；
3. 空间直线的参数方程；
4. 两直线的夹角，直线与平面的夹角；
5. 平面束方程.

典型例题

例 1　求过点$(-3,2,5)$且与两个平面 $2x-y-5z=1$ 和 $x-4z=3$ 的交线平行的直线的方程.

分析： 过已知点作与两个已知平面分别平行的平面，其交线即为所求直线.

解： 过点$(-3,2,5)$且分别与两个已知平面平行的平面为

$$\pi_1:2(x+3)-(y-2)-5(z-5)=0,\ \pi_2:(x+3)-4(z-5)=0,$$

即

$$\pi_1:2x-y-5z+33=0,\ \pi_2:x-4z+23=0.$$

所求直线的一般方程为：

$$\begin{cases}2x-y-5z+33=0,\\x-4z+23=0.\end{cases}$$

例 2　设一直线过点 $A(2,-3,4)$，且与 y 轴垂直相交，求其方程.

分析： 利用 y 轴上点的坐标的特殊性.

解： 因为直线和 y 轴垂直相交，所以交点为 $B(0,-3,0)$，$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}$，所求直线方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}$.

例 3　设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角 φ.

分析： 考察直线的方向向量与平面的法向量的夹角.

解： $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$，$\boldsymbol{s}=\{2,-1,2\}$，

$$\sin\varphi=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}},\ \varphi=\arcsin\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

A 类题

1. 试求直线 $\begin{cases}x-y+z+5=0,\\5x-8y+4z+36=0\end{cases}$ 的标准方程.

2. 求直线 $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ 与平面 $3x+5y-z-2=0$ 的交点.

3. 求两条直线 $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ 与 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的夹角.

4. 求直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-1}$ 与平面 $x+2y+z-3=0$ 的夹角.

5. 求直线 $L:\begin{cases}3x-4y+z-2=0,\\x-2y=0\end{cases}$ 在 xoy 面及 yoz 面上的投影直线方程 l_1，l_2.