

数据包络分析 第五卷

# 广义数据包络 分析方法II

马生昀 马占新 著



科学出版社

数据包络分析 第五卷

# 广义数据包络分析方法 II

马生昀 马占新 著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书主要是在《数据包络分析第二卷·广义数据包络分析方法》的基础上,对广义数据包络分析方法体系给出进一步拓展和完善,包括给出基于面向输出的广义 DEA 模型体系,面向输入及输出的广义 DEA 模型的性质探讨,以及广义 DEA 模型体系的延伸.第 1 章对传统与广义 DEA 方法的相关问题的进展进行了简要介绍.第 2 章从面向输入和面向输出两个角度给出了基于  $C^2R$ ,  $BC^2$ ,  $ST$  和  $FG$  模型的基本广义 DEA 方法.第 3 章给出了基于  $C^2W$  模型的广义 DEA 方法.第 4 章给出了基于  $C^2WY$  模型的广义 DEA 方法.第 5 章给出了只有输入(输出)的传统  $BC^2$  模型中决策单元效率的几何刻画.第 6 章给出了广义与传统 DEA 模型中决策单元相对效率差异及其几何刻画.第 7 章给出了广义 DEA 方法中决策单元相对于不同样本前沿面移动的有效性排序方法.第 8 章给出了基于  $C^2R$  模型的广义链式网络 DEA 方法.第 9 章给出了具有阶段最终产出的广义链式网络 DEA 方法.第 10 章给出了聚类分析在确定广义 DEA 方法样本单元集中的应用.第 11 章给出了带有随机因素的广义随机 DEA 方法.第 12 章给出了具有非期望输出的广义 DEA 方法.

本书可供数学、经济管理专业的本科生、研究生和教师使用,也适合经济、管理领域从事数据分析和评价的工作人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

广义数据包络分析方法 II/马生昫,马占新著. —北京:科学出版社,2017.5  
(数据包络分析;第五卷)

ISBN 978-7-03-051568-1

I. ①广… II. ①马… ②马… III. ①包络-系统分析 IV. ①N945.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 008317 号

责任编辑:王丽平/责任校对:邹慧卿  
责任印制:张 伟/封面设计:迷底书装

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**北京建宏印刷有限公司** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017 年 5 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017 年 5 月第一次印刷 印张:13 1/4

字数:260 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

数据包络分析 (Data Envelopment Analysis, DEA) 方法是美国著名运筹学家 Charnes 等于 1978 年提出的一种效率评价方法, 它将单输入单输出的工程效率概念推广到多输入多输出同类决策单元相对效率评价中, 使研究生产函数的主要技术手段由参数方法发展到参数方法与非参数方法并重, 同时在避免主观因素、简化算法、减少误差等方面具有很大的优势. 经过几十年的发展, DEA 方法已成为管理学、经济学、系统科学等领域中一种常用而且重要的分析工具.

从评价的参考集来看, DEA 方法主要是相对于决策单元全体 (实际上是相对于有效决策单元全体) 对决策单元进行相对效率评价, 即 DEA 方法评价决策单元的参照系为决策单元集. 但是在现实中, 许多评价问题并不是以有效决策单元为参照系去比较. 比如大学期末考试, 学生关心的并不一定是自己考试成绩与高分同学的差距, 而是更关心是否通过了考试. 如果将评价的参考集分成“决策单元集”和“非决策单元集”两类, 那么 DEA 方法只能给出相对于决策单元集的信息, 而无法根据任何非决策单元集进行相对效率评价, 这使得 DEA 方法在众多评价问题中的应用受到限制. 因此, 从 1996 年以来, 我们一直致力于广义参考集 DEA 方法的研究, 力求使 DEA 方法能在更广泛的领域上得到应用.

本书主要是在《数据包络分析第二卷·广义数据包络分析方法》的基础上, 对广义 DEA 方法体系给出进一步拓展和完善, 包括给出基于面向输出的广义 DEA 模型体系, 面向输入及输出广义 DEA 模型的性质探讨, 以及广义 DEA 模型体系的延伸. 本书的主要工作是由马生昫和我共同完成的. 马生昫于 2003 年考入内蒙古大学理工学院数学系, 攻读运筹学与控制论方向硕士学位, 开始在我的指导下从事 DEA 方法研究, 2008 年考入内蒙古大学数学科学学院, 攻读应用数学专业博士学位, 继续开展 DEA 方法的研究工作. 在 14 年的科学研究过程中, 我们不仅开展了 DEA 方法的多方面的研究, 而且也建立了深厚的师生友谊, 作为导师, 我非常感谢他对 DEA 方法的热爱, 以及 14 年的执着相伴. 我为有这样一个学生而感到骄傲和幸福. 同时, 通过我们的努力能为 DEA 方法的发展尽一份绵薄之力, 我们也甚感欣慰. 本书主要围绕广义 DEA 理论和模型, 系统论述了面向输出的广义 DEA 方法模型体系、广义 DEA 方法的性质以及其模型方面的拓展情况, 本书主要内容为马生昫博士在整个研究生学习期间与我共同完成的工作. 包括面向输入和面向输出的基于  $C^2R$ ,  $BC^2$ ,  $ST$ ,  $FG$  模型的广义 DEA 方法 (数学的实践与认识, 2011), 面向输入和面向输出的基于  $C^2W$  模型的广义 DEA 方法 (系统工程与电子技术, 2009;

系统工程理论与实践, 2014), 面向输入的基于  $C^2WY$  模型的广义 DEA 方法 (系统工程学报, 2011), 广义 DEA 方法中利用样本前沿面移动对决策单元进行有效性排序 (系统工程学报, 2014), 传统与广义  $BC^2$  模型中决策单元效率的几何刻画 (数学的实践与认识, 2014), 统计学方法在广义 DEA 方法中的应用 (数学的实践与认识, 2012, 2013; 内蒙古农业大学学报, 2012), 具有非期望输出的广义 DEA 模型 (内蒙古农业大学学报, 2014), 其中本书的第 8 章、第 9 章介绍了广义网络 DEA 方法 (数学的实践与认识, 2014, 2015), 为我的研究生吉日木吐、媛媛与马生昀和我共同完成。

本书的出版得到了国家自然科学基金 (71661025, 71661027, 71261017) 的资助, 在此表示深深的感谢!

马占新

2016 年 10 月

# 目 录

前言	
第 1 章 DEA 模型的研究进展	1
1.1 传统 DEA 方法与广义 DEA 方法的研究背景	1
1.2 传统 DEA 模型的研究进展	1
1.3 广义 DEA 模型的研究进展	3
第 2 章 基于样本评价的基本广义数据包络分析方法	4
2.1 基于样本评价的基本广义数据包络分析模型	4
2.1.1 样本生产可能集的构造与广义 DEA 有效性的定义	4
2.1.2 基本广义数据包络分析模型	6
2.2 基本广义数据包络分析模型的性质	8
2.3 广义 DEA 有效与相应多目标规划 Pareto 有效之间的关系	19
2.4 决策单元在样本生产可能集中的投影性质	26
2.5 决策单元的广义 DEA 有效性排序方法	29
2.6 算例	30
2.7 结束语	31
第 3 章 基于 $C^2W$ 模型的广义数据包络分析方法	32
3.1 基于 $C^2W$ 模型的广义数据包络分析模型	32
3.1.1 样本生产可能集构造与样本有效性的定义	32
3.1.2 基于 $C^2W$ 模型的广义数据包络分析模型及其性质	34
3.2 无效决策单元的投影	54
3.3 利用广义数据包络分析的排序方法	57
3.4 算例	58
3.5 结束语	59
第 4 章 基于 $C^2WY$ 模型的广义数据包络分析方法	60
4.1 综合的广义数据包络分析模型	60
4.1.1 样本生产可能集的构造与广义 DEA 有效性	61
4.1.2 广义数据包络分析模型	63
4.2 综合的广义 DEA 模型与传统 DEA 模型之间的关系	68
4.3 广义数据包络前沿面与决策单元的投影性质	69
4.4 应用举例	81

4.5	结束语	84
<b>第 5 章</b>	<b>只有输出 (输入) 的传统 BC<sup>2</sup> 模型中决策单元效率的几何刻画</b>	<b>85</b>
5.1	只有输出的传统 BC <sup>2</sup> 模型效率值的几何刻画	85
5.2	只有输入的传统 BC <sup>2</sup> 模型效率值的几何刻画	89
5.3	结束语	94
<b>第 6 章</b>	<b>广义与传统 DEA 模型相对效率差异及其几何刻画</b>	<b>95</b>
6.1	只有输出的广义与传统 DEA 模型相对效率差异及其几何刻画	95
6.2	只有输入的广义与传统 DEA 模型相对效率差异及其几何刻画	102
6.3	结束语	108
<b>第 7 章</b>	<b>广义 DEA 方法中决策单元的有效性排序</b>	<b>109</b>
7.1	相对于输出的基于样本前沿面 $d$ 移动的有效性排序	109
7.2	相对于输入的基于样本前沿面 $b$ 移动的有效性排序	116
7.3	利用样本前沿面移动排序的几种情形	122
7.4	相对于输入输出的基于样本前沿面 $b + d$ 移动的有效性排序	124
7.5	样本前沿面移动排序与其他排序方法比较	127
7.6	结束语	128
<b>第 8 章</b>	<b>基于 C<sup>2</sup>R 模型的广义链式网络 DEA 方法</b>	<b>129</b>
8.1	传统链式网络 DEA 简介	129
8.1.1	链式网络结构	129
8.1.2	传统链式网络 DEA 方法	129
8.2	基于 C <sup>2</sup> R 模型的广义链式网络 DEA 模型	131
8.3	算例	135
8.4	结束语	138
<b>第 9 章</b>	<b>具有阶段最终产出的广义链式网络 DEA 方法</b>	<b>139</b>
9.1	具有阶段最终产出的传统链式网络 DEA 简介	139
9.1.1	具有阶段最终产出的链式网络结构	139
9.1.2	具有阶段最终产出的传统链式网络 DEA 方法	140
9.2	具有阶段最终产出的广义链式网络 DEA 模型	142
9.3	算例	147
9.4	结束语	148
<b>第 10 章</b>	<b>聚类分析在确定广义 DEA 方法样本单元集中的应用</b>	<b>149</b>
10.1	广义 DEA 方法中决策单元集与样本单元集的关系	149
10.2	聚类分析在确定样本单元集中的应用	150
10.3	带有虚拟决策单元的聚类分析在确定样本单元集中的应用	154
10.4	中国各省份人均经济发展状况的综合评价	155

---

10.5	结束语	160
<b>第 11 章</b>	<b>广义随机数据包络分析方法</b>	<b>161</b>
11.1	基于 $C^2R$ 和 $BC^2$ 模型的广义与传统 DEA 模型回顾	161
11.2	基于期望值模型的广义随机 DEA 方法	165
11.3	基于机会约束规划的广义随机 DEA 方法	169
11.4	广义随机 DEA 模型举例	174
11.4.1	基于期望值模型情形下决策单元有效性的评价与排序	175
11.4.2	基于机会约束规划情形下决策单元有效性的评价与排序	175
11.5	结束语	176
<b>第 12 章</b>	<b>具有非期望输出的广义 DEA 方法</b>	<b>177</b>
12.1	具有非期望输出的广义 DEA 模型及其有效性判别	177
12.2	G-DEA <sub>d</sub> 有效与 Pareto 有效的等价性	187
12.3	算例	192
12.4	结束语	194
<b>参考文献</b>		<b>195</b>
<b>索引</b>		<b>202</b>



# 第1章 DEA 模型的研究进展

## 1.1 传统 DEA 方法与广义 DEA 方法的研究背景

数据包络分析 (Data Envelopment Analysis, DEA) 是一种相对效率评价方法, 将单输入单输出的工程效率概念推广到多输入多输出同类决策单元相对效率评价中, 是运筹学、管理科学和数理经济学研究的交叉领域<sup>[1-5]</sup>. DEA 方法极大丰富了微观经济学的生产函数理论及其应用技术, 扩大了对生产函数理论的认识, 为多目标评价提供了有效途径, 使研究生产函数理论的主要技术手段由参数方法发展到参数方法与非参数方法并重, 同时在避免主观因素、简化算法、减少误差等方面具有很大的优势. 从第一个 DEA 模型 C<sup>2</sup>R 模型<sup>[1]</sup> 产生以来, DEA 方法在理论研究和实际应用方面都得到了迅速的发展, 已经成为运筹学、管理学、系统工程、决策分析和评价技术领域常用的并且重要的分析工具和研究手段<sup>[6-8]</sup>.

依据 DEA 方法评价决策单元相对效率的参照集的不同, 可将 DEA 方法分为传统 DEA 方法和广义 DEA 方法<sup>[9]</sup>. 传统 DEA 方法相对于决策单元全体 (实质上是相对于有效决策单元全体) 对决策单元进行相对效率评价, 即传统 DEA 方法评价决策单元的参照系为决策单元集. 但是在现实中, 许多评价问题并不需要相对于有效决策单元去比较. 比如大学期末考试, 某些学生不关心考试成绩与高分同学的差距, 更关心是否达到及格线. 如果将评价的参考集分成决策单元集和非决策单元集两类, 那么传统 DEA 方法只能给出相对于决策单元集的信息, 而无法根据任何非决策单元集进行相对效率评价, 这使得传统 DEA 方法在众多评价问题中受到限制. 应用传统的 DEA 方法可以根据决策单元集进行评价, 却不能根据非决策单元集进行评价. 基于样本单元集评价的广义 DEA 方法的提出, 解决了传统 DEA 方法不能相对于非决策单元集的评价问题, 广义 DEA 方法可以相对于任意参照集进行相对效率评价, 包括决策单元集和非决策单元集.

下面从传统和广义的角度简述 DEA 模型的研究进展.

## 1.2 传统 DEA 模型的研究进展

1978 年, Charnes, Cooper 和 Rhodes 提出了第一个传统 DEA 模型 C<sup>2</sup>R 模型, 将单输入单输出工程效率概念推广到多输入多输出的相对效率评价中<sup>[1]</sup>. C<sup>2</sup>R 模型满足规模收益不变, 该模型下的 DEA 有效决策单元同时满足规模有效和技术有

效. 1984 年, 针对相对效率评价问题中生产可能集的锥性假设有时不满足的问题, Charnes 和 Cooper 等给出了规模收益可变的 DEA 模型  $BC^2$  模型<sup>[10]</sup>, 该模型下的 DEA 有效决策单元为技术有效, 未必满足规模有效.  $C^2R$  模型和  $BC^2$  模型是 DEA 方法中最基本的两个模型, 在此基础上派生出一系列新的 DEA 模型. 1985 年, Färe 和 Grosskopf 给出了满足规模收益非递增的 DEA 模型 FG 模型<sup>[11]</sup>. 1990 年, Seiford 和 Thrall 给出了满足规模收益非递减的 DEA 模型 ST 模型<sup>[12]</sup>.  $C^2R$  模型、 $BC^2$  模型、FG 模型和 ST 模型完善了具有不同规模收益条件下的 DEA 模型, 构成了一个完整的规模收益评价体系. 1986 年, Charnes, Cooper 和魏权龄利用半无限规划理论给出了  $C^2W$  模型<sup>[13]</sup>, 将  $C^2R$  模型从有限个决策单元推广到无限多个决策单元的情形. 1989 年, Charnes, Cooper, 魏权龄和黄志民将偏好锥引入 DEA 方法中, 给出了  $C^2WH$  模型<sup>[14]</sup>, 通过偏好锥的选择可以体现出决策者的偏好, 解决了以上模型把决策单元的输入输出指标同等对待的问题. 同年, Charnes, Cooper, 魏权龄和岳明给出了一个综合的 DEA 模型  $C^2WY$  模型<sup>[15]</sup>, 包含了  $C^2R$  模型、 $BC^2$  模型和  $C^2W$  模型.  $C^2R$ ,  $BC^2$ , FG, ST,  $C^2W$ ,  $C^2WH$  和  $C^2WY$  模型都是经典的传统 DEA 模型.

以上的经典传统 DEA 方法中把生产过程看作一个“黑箱”, 评价决策单元相对效率时, 只考虑生产的最初输入和最终输出, 不考虑生产的中间过程, 无法刻画中间过程对整个生产过程相对效率的影响. 针对这个问题, Färe 等于 1996 年提出了网络 DEA<sup>[16]</sup> 的概念, 打开“黑箱”考虑生产过程的各个环节对决策单元进行评价. 此后网络 DEA 方法的理论体系逐渐发展和完善, 研究了多种形式的网络 DEA 模型的效率评价<sup>[17-27]</sup>、投影问题<sup>[28]</sup> 以及灵敏度分析<sup>[29]</sup> 等.

对传统 DEA 模型及其相关理论的研究不断丰富. 其中包括对 DEA 有效性的研究<sup>[30-33]</sup>, 有效决策单元集结构<sup>[34-37]</sup>, 如何改变非有效决策单元输出使之变为有效<sup>[38,39]</sup>, 灵敏度分析<sup>[40-44]</sup>, 要素在有限范围变化的 DEA 模型及其投影问题<sup>[45,46]</sup>, 只有输出或只有输入的 DEA 模型<sup>[47]</sup>, 博弈论与 DEA 方法相结合解决固定成本分摊问题<sup>[48-50]</sup>, 决策单元相对效率排序<sup>[51-68]</sup> 等.

马占新将 DEA 方法与偏序集理论联系起来, 建立了新的基于偏序集的 DEA 理论基础<sup>[69]</sup>, 证明了  $C^2R$  和  $BC^2$  模型刻画的 DEA 有效性实际就是经验状态下决策者偏好的极大<sup>[70]</sup>, 应用偏序集理论讨论了 DEA 方法的数据变换性质<sup>[71]</sup>, 证明了  $C^2R$ ,  $BC^2$ ,  $C^2W$ ,  $C^2WH$  和  $C^2WY$  模型中的 DEA 有效决策单元的本质特征就是相应偏序集的极大元<sup>[72,73]</sup>, 探讨了偏序集理论在 DEA 相关理论中的应用<sup>[74]</sup>. 基于偏序集理论的 DEA 理论体系, 从偏序集理论角度刻画了 DEA 有效的本质特征, 对 DEA 有效给出了不同于 Charnes 等的原始解释, 为离散型 DEA 模型建立找到出路, 打通了 DEA 方法与其他传统评价理论间的关系. 尤其重要的是传统 DEA 方法产生的基础是经济系统的公理体系, 未必适合非经济领域的评价问题, 基于偏序

集理论的 DEA 理论体系为 DEA 方法在非经济领域的研究找到了理论根据。

在实际评价过程中,有时输入输出指标数据为非确定值,非确定性传统 DEA 方法的研究也有一定的进展,比如传统随机 DEA 方法<sup>[75-89]</sup>、传统灰色 DEA 方法<sup>[90-93]</sup>以及传统模糊 DEA 方法<sup>[94-100]</sup>等。

### 1.3 广义 DEA 模型的研究进展

针对传统 DEA 方法不能相对于非决策单元集对决策单元进行评价这一问题,马占新于 2002 年提出了基于样本评价的广义 DEA 方法<sup>[101]</sup>。广义 DEA 方法可以相对于非决策单元集进行相对效率评价,这与传统超效率 DEA 模型不同<sup>[102]</sup>。传统超效率 DEA 模型评价决策单元的参照系是从决策单元集中剔除该被评价决策单元所得集合,评价每个决策单元时的参照系是互不相同的,即评价标准不统一。广义 DEA 方法评价决策单元的参照系是样本单元集,评价标准是一致的。当决策单元集与样本单元集相同时,广义 DEA 模型与相应的传统 DEA 模型相同。

最初的广义 DEA 方法是基于  $C^2R$  模型和  $BC^2$  模型的面向输入的广义 DEA 方法,马占新探讨了相应方法中有效单元性质、相对样本前沿面移动进行相对效率排序、组合有效性等问题<sup>[101,103]</sup>。此后,马占新等分别研究了基于  $C^2WH$ ,  $C^2W$  和  $C^2WY$  模型的面向输入的广义 DEA 方法<sup>[104-107]</sup>。对几个经典的传统 DEA 模型从面向输入的角度基本完成了到广义 DEA 模型的拓展。进一步,马占新等又研究了基于  $C^2R$ ,  $BC^2$ ,  $FG$  和  $ST$  模型的面向输入和面向输出的广义 DEA 方法<sup>[108]</sup>,基于  $C^2W$  模型的面向输出的广义 DEA 方法<sup>[109]</sup>。

广义 DEA 方法和模型不断完善和发展。比如利用样本前沿面移动对决策单元的有效性排序<sup>[110]</sup>,决策单元效率的几何刻画<sup>[111,112]</sup>,统计学方法在广义 DEA 方法中的应用<sup>[113-115]</sup>,样本单元数和指标数变化对有效性的影响<sup>[116]</sup>,组合有效性评价<sup>[117-119]</sup>,多准则评价<sup>[120]</sup>,灵敏度分析<sup>[121]</sup>,企业并购效率评价<sup>[122]</sup>,企业联盟效率评价<sup>[123]</sup>,多属性决策单元有效性评价<sup>[124]</sup>,具有非期望输出的广义 DEA 模型<sup>[125-127]</sup>,广义链式网络 DEA 模型<sup>[128,129]</sup>和广义模糊 DEA 模型<sup>[130-135]</sup>等都有了一定的研究。

## 第 2 章 基于样本评价的基本广义数据包络分析方法

传统的  $C^2R$  模型<sup>[1]</sup>、 $BC^2$  模型<sup>[10]</sup>、 $FG$  模型<sup>[11]</sup> 与  $ST$  模型<sup>[12]</sup> 是分别评价规模报酬不变、可变、非增和非减四种情形的基本传统 DEA 模型。但传统 DEA 方法是一种依据自评体系评价的方法, 无法自主选择参照系。为了解决 DEA 方法可以根据任意参考系进行评价这一问题, 文献 [101] 和文献 [103] 中对面向输入的基于  $C^2R$  模型和  $BC^2$  模型的广义 DEA 方法进行了初步研究, 但相应的研究还不够系统和完善。本章对基于样本单元评价的广义 DEA 方法进一步进行系统的研究, 给出基于  $C^2R$  模型、 $BC^2$  模型、 $FG$  模型与  $ST$  模型的面向输入的广义 DEA 模型、面向输出的广义 DEA 模型以及加性广义 DEA 模型, 分析上述这些模型与传统 DEA 模型之间的关系, 探讨广义 DEA 有效与相应多目标规划 Pareto 有效之间的关系, 给出决策单元的投影性质以及决策单元的有效性排序方法。

### 2.1 基于样本评价的基本广义数据包络分析模型

以下首先给出了一类基于样本单元评价的基本广义 DEA 模型, 包括面向输入的广义 DEA 模型、面向输出的广义 DEA 模型以及加性广义 DEA 模型, 然后, 探讨了这些模型与传统 DEA 模型之间的关系。

#### 2.1.1 样本生产可能集的构造与广义 DEA 有效性的定义

假设共有  $n$  个待评价的决策单元和  $\bar{n}$  个样本单元或标准 (以下统称样本单元), 它们的特征可由  $m$  种输入和  $s$  种输出指标表示。

第  $p$  个决策单元的输入指标值为

$$\mathbf{x}_p = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{mp})^T,$$

第  $p$  个决策单元的输出指标值为

$$\mathbf{y}_p = (y_{1p}, y_{2p}, \dots, y_{sp})^T,$$

第  $j$  个样本单元的输入指标值为

$$\bar{\mathbf{x}}_j = (\bar{x}_{1j}, \bar{x}_{2j}, \dots, \bar{x}_{mj})^T,$$

第  $j$  个样本单元的输出指标值为

$$\bar{\mathbf{y}}_j = (\bar{y}_{1j}, \bar{y}_{2j}, \dots, \bar{y}_{sj})^T,$$

并且它们均为正数.

令

$$T_{\text{SU}} = \{(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{y}}_1), (\bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{y}}_2), \dots, (\bar{\mathbf{x}}_{\bar{n}}, \bar{\mathbf{y}}_{\bar{n}})\},$$

称  $T_{\text{SU}}$  为样本单元集.

令

$$T_{\text{DMU}} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \dots, (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\},$$

称  $T_{\text{DMU}}$  为决策单元集.

根据数据包络分析方法构造生产可能集的思想, 样本单元确定的生产可能集如下:

$$T = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left| \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j, \right. \right. \\ \left. \left. \delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1 \right\},$$

其中  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  为取值为 0,1 的参数.

令

$$T(d) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left| \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^{\bar{n}} d \bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j, \right. \right. \\ \left. \left. \delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1 \right\}$$

为样本单元确定的生产可能集的伴随生产可能集, 其中  $d$  为正数, 称为移动因子. 显然,  $T(1) = T$ .

**定义2.1** 如果不存在

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T,$$

使得

$$\mathbf{x}_p \geq \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_p \leq \mathbf{y},$$

且至少有一个不等式严格成立, 则称决策单元  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$  相对于样本生产前沿面有效, 简称G-DEA有效. 反之, 称  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$  为G-DEA无效.

**定义2.2** 如果不存在

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T(d),$$

使得

$$\mathbf{x}_p \geq \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_p \leq \mathbf{y},$$

且至少有一个不等式严格成立, 则称决策单元  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$  相对于样本生产前沿面的  $d$  移动有效, 简称  $G\text{-DEA}_d$  有效. 反之, 称  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$  为  $G\text{-DEA}_d$  无效.

定义 2.1 相当于定义 2.2 中  $d = 1$  时的情形, 即此时  $G\text{-DEA}_1$  有效与  $G\text{-DEA}$  有效相同.

### 2.1.2 基本广义数据包络分析模型

根据  $G\text{-DEA}$  有效与  $G\text{-DEA}_d$  有效的概念, 构造如下三种基本广义 DEA 模型.

(1) 面向输入的基本广义 DEA 模型及对偶 ( $G\text{-DEA}_I$ ) 与 ( $DG\text{-DEA}_I$ ).

$$(G\text{-DEA}_I) \left\{ \begin{array}{l} \max \mu^T \mathbf{y}_p - \delta_1 \mu_0, \\ \text{s.t. } \omega^T \bar{\mathbf{x}}_j - \mu^T d \bar{\mathbf{y}}_j + \delta_1 \mu_0 \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n}, \\ \omega^T \mathbf{x}_p = 1, \\ \omega \geq \mathbf{0}, \mu \geq \mathbf{0}, \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{array} \right.$$

$$(DG\text{-DEA}_I) \left\{ \begin{array}{l} \min \theta, \\ \text{s.t. } \theta \mathbf{x}_p - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j \geq \mathbf{0}, \\ -\mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{\bar{n}} d \bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j \geq \mathbf{0}, \\ \delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1, \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1. \end{array} \right.$$

(2) 面向输出的基本广义 DEA 模型及对偶 ( $G\text{-DEA}_O$ ) 与 ( $DG\text{-DEA}_O$ ).

$$(G\text{-DEA}_O) \left\{ \begin{array}{l} \min \omega^T \mathbf{x}_p + \delta_1 \mu_0, \\ \text{s.t. } \omega^T \bar{\mathbf{x}}_j - \mu^T d \bar{\mathbf{y}}_j + \delta_1 \mu_0 \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n}, \\ \mu^T \mathbf{y}_p = 1, \\ \omega \geq \mathbf{0}, \mu \geq \mathbf{0}, \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{array} \right.$$

$$(DG-DEA_O) \left\{ \begin{array}{l} \max z, \\ \text{s.t. } \mathbf{x}_p - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j \geq \mathbf{0}, \\ -z\mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{\bar{n}} d\bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j \geq \mathbf{0}, \\ \delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1, \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1. \end{array} \right.$$

(3) 加性基本广义 DEA 模型及对偶 (G-DEA<sub>A</sub>) 与 (DG-DEA<sub>A</sub>).

$$(G-DEA_A) \left\{ \begin{array}{l} \min \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}_p - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_p + \delta_1 \mu_0, \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}^T \bar{\mathbf{x}}_j - \boldsymbol{\mu}^T d\bar{\mathbf{y}}_j + \delta_1 \mu_0 \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n}, \\ \boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu} \geq \hat{\mathbf{e}}, \\ \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \end{array} \right.$$

$$(DG-DEA_A) \left\{ \begin{array}{l} \max \mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{s}^-, \\ \text{s.t. } \mathbf{x}_p - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j - \mathbf{s}^+ = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{\bar{n}} d\bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j - \mathbf{s}^- = \mathbf{0}, \\ \delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1, \\ \mathbf{s}^+ \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1. \end{array} \right.$$

其中  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in E^m, \hat{\mathbf{e}} = (1, 1, \dots, 1)^T \in E^s$ .

(1) 当

$$\delta_1 = 0$$

时, 以上三对模型分别为基于  $C^2R$  模型的面向输入、面向输出和加性的广义 DEA 模型.

(2) 当

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 0$$

时, 以上三对模型分别为基于  $BC^2$  模型的面向输入、面向输出和加性的广义 DEA 模型.

(3) 当

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 0$$

时, 以上三对模型分别为基于 FG 模型的面向输入、面向输出和加性的广义 DEA 模型.

(4) 当

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 1$$

时, 以上三对模型分别为基于 ST 模型的面向输入、面向输出和加性的广义 DEA 模型.

## 2.2 基本广义数据包络分析模型的性质

**定理 2.1** 以下三个条件两两等价:

- (1) 决策单元  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$  为  $G\text{-DEA}_d$  无效;
- (2)  $(DG\text{-DEA}_I)$  存在可行解

$$\theta, \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1,$$

使得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j &\geq \mathbf{0}, \\ -\mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{\bar{n}} d\bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j &\geq \mathbf{0}, \\ \delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) &= \delta_1, \end{aligned}$$

且至少有一个不等式严格成立;

- (3)  $(DG\text{-DEA}_O)$  存在可行解

$$z, \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1,$$

使得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j &\geq \mathbf{0}, \\ -\mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{\bar{n}} d\bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$



$$\delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1,$$

且至少有一个不等式严格成立.

**证明** ((1)  $\Rightarrow$  (2), (1)  $\Rightarrow$  (3)) 若  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$  为 G-DEA<sub>d</sub> 无效, 由定义 2.2 可知, 存在

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T(d),$$

使得

$$\mathbf{x}_p \geq \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_p \leq \mathbf{y},$$

且至少有一个不等式严格成立. 即存在

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1,$$

使得

$$\mathbf{x}_p \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j,$$

$$\mathbf{y}_p \leq \sum_{j=1}^{\bar{n}} d\bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j,$$

$$\delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1,$$

且至少有一个不等式严格成立. 移项即得

$$\mathbf{x}_p - \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{x}}_j \lambda_j \geq \mathbf{0},$$

$$-\mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{\bar{n}} d\bar{\mathbf{y}}_j \lambda_j \geq \mathbf{0},$$

$$\delta_1 \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{\bar{n}+1} \right) = \delta_1,$$

且至少有一个不等式严格成立.

令  $\theta = 1$ , 则可知  $\theta, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1$  为 (DG-DEA<sub>I</sub>) 的可行解.

令  $z = 1$ , 则可知  $z, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1$  为 (DG-DEA<sub>O</sub>) 的可行解.

((2)  $\Rightarrow$  (1), (3)  $\Rightarrow$  (1)) 假设 (DG-DEA<sub>I</sub>) 存在可行解

$$\theta, \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n} + 1,$$