GONGKE SHUXUE FENXI LIANXI YU TIGAO

工科数学分析练习与提高（三）

肖莉 刘婷 张玉洁 主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

工科数学分析练习与提高

GONGKE SHUXUE FENXI LIANXI YU TIGAO

（三）

肖 莉 刘 婷 张玉洁 **主编**

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析练习与提高. 三、四/肖莉，刘婷，张玉洁主编. —武汉：中国地质大学出版社，2018. 7

ISBN 978 - 7 - 5625 - 4372 - 5

Ⅰ. ①工…

Ⅱ. ①肖…②刘…③张…

Ⅲ. ①数学分析-高等学校-习题集

Ⅳ. ①O17 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 166298 号

工科数学分析练习与提高(三)(四) 肖 莉 刘 婷 张玉洁 **主编**

责任编辑：谌福兴 郑济飞 责任校对：周 旭

出版发行：中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号) 邮政编码：430074

电 话：(027)67883511 传真：(027)67883580 E-mail：cbb@cug. edu. cn

经 销：全国新华书店 http://cugp. cug. edu. cn

开本：787 毫米×1 092 毫米 1/16 字数：250 千字 印张：9.75

版次：2018 年 7 月第 1 版 印次：2018 年 7 月第 1 次印刷

印刷：武汉市籍缘印刷厂 印数：1—4000 册

ISBN 978 - 7 - 5625 - 4372 - 5 定价：30.00 元(全 2 册)

目　录

第一章　空间解析几何

第一节　平面与直线

了解平面和直线的概念,会用向量代数的知识求解平面和直线的方程.

知识要点

1. 平面的表示

	方程的形式	相关系数的意义
点法式方程	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	$M(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点,$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面的法向量
一般式	$Ax+By+Dz+D=0$	$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面的法向量
三点式方程	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$为平面上的三点
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	a,b,c 分别为平面在 x,y,z 轴上的截距

2. 直线的表示

	方程的形式	相关系数的意义
参数式方程	$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$	$M(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点,$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$为直线的方向向量
标准方程(对称式)	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$	$M(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点,$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$为直线的方向向量
一般式方程(两平面交线)	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$
两点式方程	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为直线上两点,直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$

典型例题

例 1　求通过点 $A(0,0,0)$ 与直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-4}{1}$ 的平面的方程.

解　设通过点 $A(0,0,0)$ 的平面方程为 $A(x-0)+B(y-0)+C(z-0)=0$,即

$$Ax+By+Cz=0 \tag{1}$$

又直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-4}{1}$ 在平面上,则直线的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 与平面法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直,所以

$$2A+B+C=0 \tag{2}$$

直线上的点 $(3,-4,4)$ 也在该平面上,则

$$3A-4B+4C=0 \tag{3}$$

由(1),(2),(3)得知,将 A,B,C 作为未知数,有非零解的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}=0$$

即 $8x-5y-11z=0$,这就是所求的平面方程.

例 2　求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $3x-y+z=1$ 平行的直线方程.

解　直线与两平面平行,则直线的方向向量垂直于这两平面法向量所确定的平面,即直线的方向向量为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

将已知点代入直线的标准方程得

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-5}{1}.$$

例 3　求经过点 $A(3,2,1)$ 和 $B(-1,2,-3)$ 且与坐标平面 xOz 垂直的平面方程.

解　与 xOy 平面垂直的平面平行于 y 轴,方程为

$$Ax+Cz+D=0 \tag{1}$$

把点 $A(3,2,1)$ 和点 $B(-1,2,-3)$ 代入上式得

$$3A+C+D=0 \tag{2}$$

$$-A-3C+D=0 \tag{3}$$

由(2),(3)得　$A=-\frac{D}{2},C=\frac{D}{2}$

代入(1)得　$-\frac{D}{2}x+\frac{D}{2}z+D=0$

消去 D 得所求的平面方程为 $x-z-2=0$.

A 类题

1. 判断题

(1)若已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{a}(1,-2,4)$ 与 α 上一点 $A(3,5,1)$，就能确定平面 α 的方程. (　　)

(2)若向量 $\boldsymbol{a}(1,-2,4)$ 平行于平面 α 且点 $A(3,5,1)$，$B(2,6,7)$ 在 α 上，则能确定平面 α 的方程. (　　)

(3)若已知点 $A(1,2,3)$，$B(-2,5,0)$，$C(7,-4,9)$ 在平面 α 上，则能确定平面 α 的方程. (　　)

(4)若已知平面 α 与三条坐标轴的交点分别为 $X(3,0,0)$，$Y(0,-2,0)$，$Z(0,0,-5)$，则能确定平面 α 的方程. (　　)

2. 填空题

(1)垂直于向量 $\boldsymbol{a}(-2,5,0)$ 且到点 $A(-2,5,0)$ 的距离为 5 的平面的方程是__________.

(2)平面 $2x+3y+4z=12$ 与三坐标轴分别交于点 A,B,C,则 $\triangle ABC$ 的面积为__________.

(3)通过 z 轴和点 $A(1,3,2)$ 的平面方程是__________.

(4)一动点移动时与点 $A(3,4,2)$ 及坐标平面 yOz 等距离,则该点的轨迹方程为__________.

3. 指出下列平面方程的位置特点,并作示意图:

(1) $y-3=0$；(2) $3y+2z=0$；(3) $x-2y+3z-8=0$.

4. 求下列平面的法向量:

(1) $2x+4y-5z=6$；(2) $3(x-y)+2(z-x+1)=3(y-z)$.

5. 指出下列直线的方向向量：

(1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-3}$；

(2) $x=3t-1, y=-t+2, z=4-3t$；

(3) $\begin{cases}2x+3y-z=6;\\4x-y+2z=2.\end{cases}$

6. 一平面过原点且垂直于平面 $\pi_1: x-y+z-7=0$ 与 $\pi_2: 3x+2y-12z+5=0$ 的交线，求它的方程.

7. 求过点 $M(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

8. 求过点(1,2,3)且平行于平面 $2x+y+2z+5=0$ 的平面方程.

9. 用对称式方程以及参数式方程表示直线$\begin{cases} x-y+2z=3; \\ 3x+2y-z=5. \end{cases}$

10. 求过两点 $A(1, 2, 3)$和 $B(-1, 0, 2)$的直线的一般式方程.

11. 已知直线 L_1:$x-1=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$,直线 L_2:$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$,求过 L_1 且平行 L_2 的平面方程.

第二节　关于直线与平面的基本问题

了解平面与平面、平面与直线、直线与直线间的几何位置关系，会利用平面、直线的相互关系解决有关问题.

知识要点

1. 掌握点到直线以及点到平面距离的求法；

2. 平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角；

3. 会利用直线与直线、直线与平面、平面与平面之间平行、垂直、相交等关系解决有关问题；

4. 掌握平面束的概念及方程，能用平面束的性质解决有关问题；

5. 与投影有关的问题.

典型例题

例 1　求直线 l：$\begin{cases}3x-4y+z-2=0\\x-2y=0\end{cases}$ 在 xOy 及 yOz 面上的投影直线方程 l_1，l_2.

解　先求 l 在 xOy 面上的投影，已知直线在 $x-2y=0$ 上，平面 $x-2y=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-2,0\}$，$xOy$ 平面的法向量 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$

因 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0$，则 $x-2y=0$ 为 l 的投影平面

即投影直线为$\begin{cases}x-2y=0\\z=0\end{cases}$

再求 l 在 yOz 面上的投影，过 l 的平面束方程为

$$x-2y+\lambda(3x-4y+z-2)=0, \tag{1}$$

其法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1+3\lambda,-2-4\lambda,\lambda\}$，由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=0$，得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$，将 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$代入(1)得投影直线为

$$\begin{cases}2y+z-2=0\\x=0\end{cases}$$

例 2　证明直线 l：$\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$和平面 π：$2x-y+z+9=0$ 相交，并求它们的交点与交角.

解　将直线 l 的方程化为参数方程

$$\begin{cases}x=-t-1\\y=2t+1\\z=t\end{cases} \tag{1}$$

将(1)代入平面 π 的方程整理得

$$3t-6=0$$

解得 $t=2$,将此值代入(1)得

$$x=-3,y=5,z=2$$

因此直线 l 与平面 π 相交,且交点 $P_0(-3,5,2)$. 由于直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{-1,2,1\}$,平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,-1,1\}$,应用公式得

$$\sin\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{2}$$

由此得直线 l 与平面 π 的交角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

例 3　已知点 $A(2,-1,2)$,直线 $l_1:\begin{cases}x+y+z-6=0\\3x+y-z-2=0\end{cases}$,点 B 是点 A 关于 l_1 的对称点,求过点 B 且平行于直线 l_1 的直线方程.

解　设 $B(x_0,y_0,z_0)$,由于 A,B 关于 l_1 对称,则线段 AB 的中点 $C\left(\frac{2+x_0}{2},\frac{y_0-1}{2},\frac{2+z_0}{2}\right)$在 l_1 上,即

$$\begin{cases}x_0+y_0+z_0-9=0\\3x_0+y_0-z_0-1=0\end{cases}$$

所以$\begin{cases}x_0=\dfrac{5-y_0}{2}\\z_0=\dfrac{13-y_0}{2}\end{cases}$　直线 l_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=(-2,4,-2)$

因 A,B 关于 l_1 对称,则$\overrightarrow{AB}$与 l_1 垂直,即

$$-2\left(\frac{5-y_0}{2}-2\right)+4(y_0+1)-2\left(\frac{13-y_0}{2}-2\right)=0$$

所以　　$y_0=1,B(2,1,6)$

l_1 方程为 $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-6}{-2}$.

A 类题

1. 填空题

(1)平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 平行但不重合的条件为____________.

(2)过点(3, 1, −1)且与平面 $3x-2y+5z-12=0$ 平行的平面方程为____________.

(3)过点(1, −2, −1)且与直线$\begin{cases}x=-t+1\\y=2t-4\\z=3t+2\end{cases}$ 垂直的平面方程为____________.

(4)与两直线$\begin{cases}x=2\\y=-2+t\\z=1+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$都平行,且过原点的平面方程是____________.

(5)过点(2,3,−1)且与平面 $x+2y-z=1$ 垂直的直线方程为____________.

(6)点(1,4,2)到平面 $x-y+2z=3$ 的距离为____________.

(7)两条平行直线 L_1:$x=2t-1,y=t+1,z=3t$;L_2:$x=2t-4,y=t+3,z=3t+2$ 之间的距离为____________.

(8)若两直线 L_1:$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{\lambda}$,$L_2$:$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$相交,则 $\lambda=$____________.

2. 选择题

(1)直线 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$与平面 $4x-2y-2z=3$ 的关系为(　　).

(A) 平行但直线不在平面上　　(B) 直线在平面上

(C) 垂直相交　　(D) 相交但不垂直

(2)设空间直线的对称式方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$,则该直线必(　　).

(A) 过原点且垂直于 x 轴　　(B) 过原点且垂直于 y 轴

(C) 过原点且垂直于 z 轴　　(D) 过原点且平行于 x 轴

(3)设空间三直线的方程分别为

L_1:$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z}{3}$,$L_2$:$\begin{cases}x=3t\\y=-1+3t\\z=2+7t\end{cases}$,$L_3$:$\begin{cases}x+2y-z+1=0\\2x+y-z=0\end{cases}$ 则必有(　　).

(A) $L_1 /\!/ L_2$　　(B) $L_1 /\!/ L_3$　　(C) $L_2 \perp L_3$　　(D) $L_1 \perp L_2$

3. 求到两平面 α:$3x-y+2z-6=0$ 和 β:$x+2y-3z=5$ 距离相等的点的轨迹方程.

4. 已知两平面 α:$mx+7y-6z-24=0$ 与平面 β:$2x-3my+11z-19=0$ 相互垂直,求 m 的值.

5.判别下列各直线之间的位置关系：

(1) $L_1: -x+1=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{3}$ 与 $L_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3 \end{cases}$；

(2) $L_1: -x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 与 $L_2: \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x+z-2=0 \end{cases}$.

6.判定下列两平面之间的位置关系：

(1) $x+2y-4z=0$ 与 $2x+4y-8z=1$；

(2) $2x-y+3z=1$ 与 $3x-2z=4$.

7. 试确定下列直线与平面之间的关系：

(1) 直线$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$与平面$-2x+y+3z=6$；

(2) 直线$\begin{cases}5x-3y+2z=5\\5x-3y+z=2\end{cases}$与平面$15x-9y+5z=12$.

8. 求点$A(-1,2,1)$在平面$x+2y-z=1$上的投影.

B 类题

1. λ 取何值时直线$\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-\lambda z-15=0\end{cases}$与 z 轴相交？

2. 求过点 $A(1,0,-1)$ 且与平面 $2x-y+z=5$ 平行，又与直线 L_1：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

3. 已知直线 L_1：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，

(1)求 L_1 与 L_2 之间的距离；(2)求 L_1 与 L_2 的公垂线方程.

4. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $P(1,-1,1)$ 到直线 L：$\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面方程.

5. 求直线 $L_1:\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-2y+z+1=0\end{cases}$和直线 $L_2:\begin{cases}x-y-z-1=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}$ 之间的夹角.

6. 求通过直线 $L:\begin{cases}x-y+z-1=0\\2x+y+z-2=0\end{cases}$ 的两个互相垂直的平面,其中一个平面平行于直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

C 类题

1. 求证直线$\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ 在平面 $4x-3y+7z-7=0$ 上.

2. 求直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$在平面 $x+y+2z-5=0$ 上的投影直线的方程.

第三节　曲面和曲线

理解曲面方程的概念,了解母线平行于坐标轴的柱面方程及以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程;了解常用的二次曲面方程及用截痕法分析其图形特征;了解空间曲线的一般方程和参数方程;了解曲线及立体在坐标平面上的投影.

知识要点

1. 曲面方程的概念，曲面的一般方程和参数方程；

2. 母线平行于坐标轴的柱面方程；

3. 旋转曲面的有关概念，以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程的求法，几个常见的旋转曲面，锥面的有关概念，尤其是圆锥面方程的求法；

4. 二次曲面的基本概念，椭球面、双曲抛物面、椭圆抛物面、双曲面的概念及方程，用截痕法分析其图形特征；

5. 空间曲线的一般方程及参数方程；

6. 空间曲线的投影柱面和投影曲线；立体在坐标面上的投影.

典型例题

例 1　求以 z 轴为母线，经过点 $A(4,2,2)$ 以及 $B(6,-3,7)$ 的圆柱面的方程.

解　设以 z 轴为母线的圆柱面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{1}$$

因为点 $A(4,2,2)$，$B(6,-3,7)$ 在柱面上，则有

$$(4-a)^2+(2-b)^2=R^2 \tag{2}$$

$$(6-a)^2+(-3-b)^2=R^2 \tag{3}$$

又以 z 轴为母线，计算点 $(a,b,0)$ 到 z 轴距离可得

$$(a-0)^2+(b-0)^2=R^2 \tag{4}$$

联立(2)、(3)、(4)求出 $a=\dfrac{25}{8}$，$b=-\dfrac{5}{4}$，$R^2=\dfrac{725}{64}$

代入(1)式得所求的柱面方程为

$$\left(x-\frac{25}{8}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{725}{64}$$

例 2　求顶点为 $O(0,0,0)$，轴与平面 $x+y+z=0$ 垂直，且经过点 $(3,2,1)$ 的圆锥面的方程.

解　设轨迹上任一点的坐标为 $P(x,y,z)$，依题意，该圆锥面的轴线与平面 $x+y+z=0$ 垂直，则轴线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,1,1)$，又点 $O(0,0,0)$ 与点 $(3,2,1)$ 在锥面上过这两点的直线的方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=(3,2,1)$，点 $O(0,0,0)$ 与点 $P(x,y,z)$ 连线的方向向量为 $\boldsymbol{l}_2=(x,y,z)$，则有 $\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角和 $\boldsymbol{l}_2$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角相等，即

$$\frac{x\times1+y\times1+z\times1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3\times1+2\times1+1\times1}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

化简得所求的圆锥面方程为

$$11x^2+11y^2+11z^2-14xy-14yz-14xz=0$$