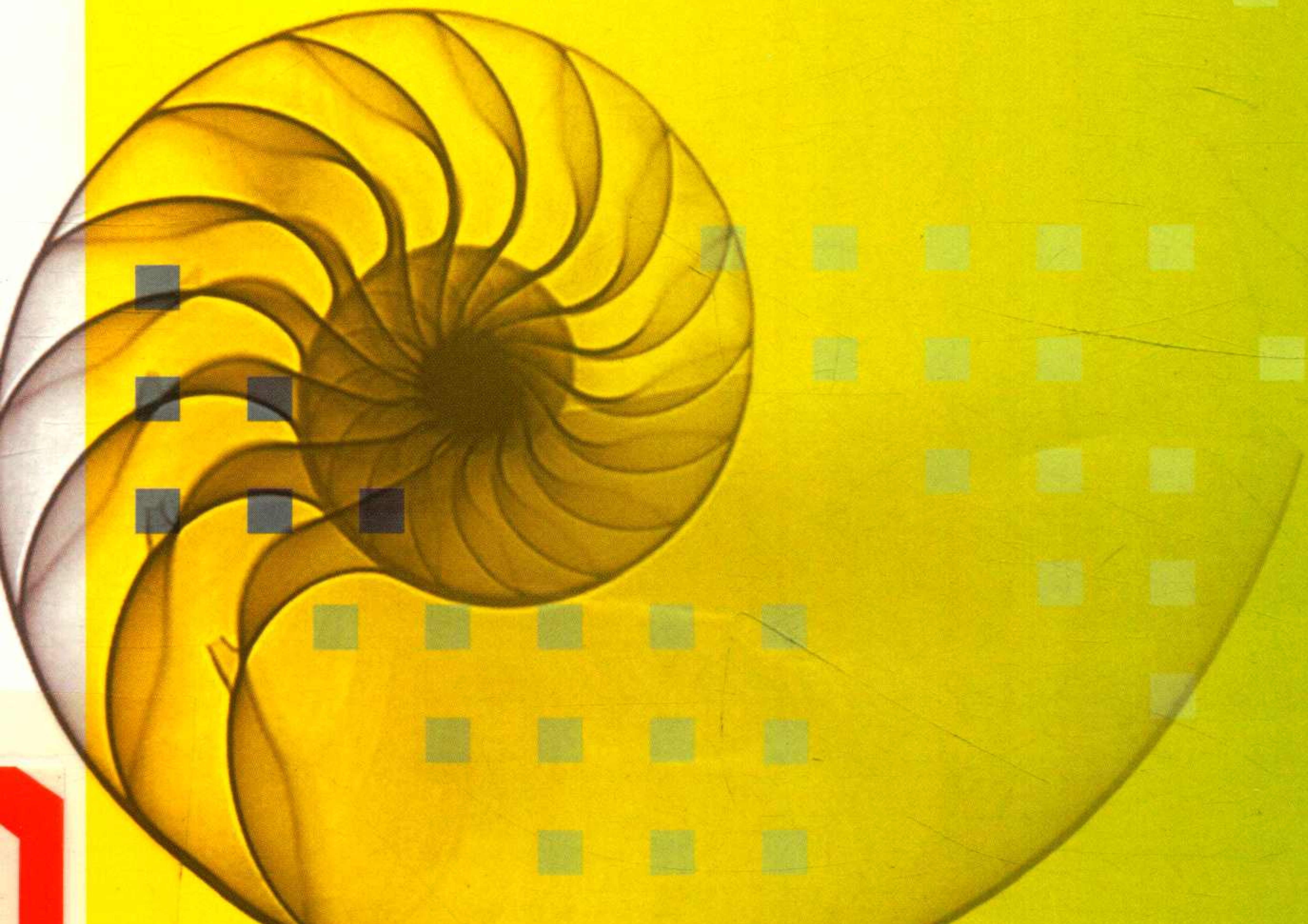
微分方程基础教程

（上册）

郑志明　李翠萍
彭临平　郭定辉　编



高等教育出版社

微分方程基础教程

Weifen Fangcheng Jichu Jiaocheng

（上册）

郑志明　李翠萍　彭临平　郭定辉　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本套教材包含微分方程的基础内容。教材分上、下册。上册主要内容为常微分方程理论基础，包括绪论、初等积分法、高阶微分方程、线性微分方程组、基本定理、定性与稳定性理论初步和离散动力系统简介等。下册主要内容为偏微分方程理论，包括绪论、一阶偏微分方程、二阶线性偏微分方程的经典解法、偏微分方程解的性质、广义函数及 Sobolev 空间、偏微分算子的基本解及其应用、偏微分方程的广义解及其正则性和非线性偏微分方程的典型解法。

本套教材可作为高等学校数学专业微分方程课程的教材，也可供相关专业的教师、学生以及研究人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

微分方程基础教程．上册 / 郑志明等编．-- 北京：高等教育出版社，2017. 12

ISBN 978-7-04-047369-8

Ⅰ．①微… Ⅱ．①郑… Ⅲ．①微分方程 - 高等学校 - 教材 Ⅳ．① O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 024754 号

策划编辑	李冬莉	责任编辑	李冬莉	封面设计	王　鹏	版式设计	王艳红
插图绘制	邓　超	责任校对	刘娟娟	责任印制	耿　轩		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787 mm × 960 mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	14.75		
字　　数	260 千字	版　　次	2017 年 12 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017 年 12 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	28.70 元

物 料 号　47369-00

前言

微分方程是带有未知函数及其导数的等式。它是数学理论与其他数学分支、科学和工程实践相结合的桥梁，其目标是利用数学理论解决来源于科学、工程实践等的实际问题。

在现行数学课程中，微分方程常常以常微分方程和偏微分方程两个课程出现。常微分方程基本上只涉及含有未知函数的单变元的导数的微分方程，而偏微分方程涉及含有多变元的未知函数及其偏导数的微分方程。经过长期发展，常微分方程和偏微分方程两个课程各自都已经有了十分完美的教材。然而，大多数常微分方程教材和偏微分方程教材自成体系，很少有作者将两者的内容统一起来，相互呼应和借鉴。但从常微分方程和偏微分方程这种分类方法就不难明白，它们之间存在千丝万缕的联系。例如，Fourier 变换和 Laplace 变换之类的积分变换方法以及 Fourier 级数之类的级数方法既可以用于常微分方程问题也可以用于偏微分方程问题。另外，很多偏微分方程问题可以通过数学方法转换为常微分方程问题来求解。

为了避免课程之间的重复讲授，同时也为了加深学生对微分方程的整体理解与融会贯通，我们决定把常微分方程和偏微分方程作统一处理，尝试将它们结合起来。经过近 5 年的教学实践，我们对微分方程课程进行了多次优化与提炼，将使用多年的讲义编写成教材。

本书是整套教材的上册，主要内容涉及常微分方程的古典理论、稳定性理论、定性理论及初步的离散动力系统理论。在本书中，我们力图通过实际例子或重要的应用背景来引入概念和定理，把定理的建立与证明尽可能处理成一个“发现”的过程，这种处理方法将有利于学生创新意识与创新能力的培养。我们还强调一些重要的定义、定理和公式的物理与几何内涵，既强调它们在数学上的作用，也强调它们在物理或几何上的解释。这样做能使得数学专业的学生认识到数学在作为一门自然科学语言使用时所具有的精确描述能力，也能使他们认识到数学应用的广泛性，从而激发学生学习数学的浓厚兴趣；在应用公式解决实际问题时采用数学建模的观点与方法，即强调“分析实际问题（抽象简化）→建立数学模型（转化成数学问题）→获得数学解（应用公式和算法）→解释实际问

题(讨论解的合理性)”的解题过程。例如在线性微分方程中,对弹性振子运动的建模与分析,对R-L-C回路中电流随时间变化规律的分析等,这样做将有利于培养数学专业学生对实际问题提炼、抽象成数学问题的能力。

本书在第6章对离散动力系统作了简单介绍,重点是一维映射的性质及不动点与周期轨的讨论。这是因为近年来,离散动力系统发展迅速,其在生态学、计算机网络等领域有大量的应用。而作为数学专业本科生,应该对微分方程学科的最新发展动态与最新研究领域、内容和方法有所了解。

本书第0、1、2、3章由彭临平教授执笔,第4、5、6章由李翠萍教授执笔,全书由郑志明教授、李翠萍教授与郭定辉教授统稿。

虽然本书的每一位编者都长期从事微分方程及相关领域的教学与研究,但是不妥与错误之处在所难免,真诚地希望有关专家、读者给予批评指正。

编　者

2015年6月

目录

第 0 章

绪　论

自然科学和工程技术中的许多现象都可以用微分方程作为其数学模型来描述. 下面我们介绍有关方面的几个实例,见[1,2].

§0.1　微分方程的例子

例 1　一容器在开始时盛有盐水 100 L,其中含净盐 10 kg. 现以每分钟3 L的速率注入清水,同时以每分钟 2 L 的速率将冲淡的溶液放出,容器中装有搅拌器使容器中的溶液保持均匀,求实验开始后 1 h 溶液的含盐量.

解　设在实验开始 t min 后容器内含盐 x(单位:kg),求 x 与 t 的函数关系式. 因为在时刻 t,容器内的溶液总量(单位:L)为

$$100+3t-2t=100+t,$$

故此时溶液的浓度(单位:kg/L)为

$$\frac{x}{100+t}.$$

考察从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 这一小段时间. 在这段时间内,放出的溶液为 $2\mathrm{d}t$,因为时间短,浓度改变很小,所以可以认为浓度$\dfrac{x}{100+t}$保持不变,于是得到**放出的溶液中含盐量微元**

$$\frac{x}{100+t}2\mathrm{d}t.$$

由于容器中的含盐量随时间的增加而减少,所以得到的微分方程为

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-2x}{100+t},$$

这是一个可分离变量的一阶微分方程(在第 1 章中会有详细的介绍),于是将其变量分离,得

$$\frac{dx}{x}=\frac{-2dt}{100+t},$$

两边积分得

$$\ln x = -2\ln(100+t)+\ln c,$$

故有

$$x=\frac{c}{(100+t)^2}.$$

由题意知当 $t=0$ 时 $x=10$,将其代入上式得 $c=10^5$,因此得到 x 与 t 的函数关系式

$$x=x(t)=\frac{10^5}{(100+t)^2}.$$

在实验开始 1 h 后,亦即当 $t=60$ min 时,容器内溶液的含盐量为

$$x(60)=\frac{10^5}{160^2}\approx 3.9\ \text{kg}.$$

例 2 R-L-C 电路.

R-L-C 电路是由电阻 R、电感 L、电容 C 和电源 $e(t)$ 串联组成的电路,其中 R,L 及 C 为常数,电源电动势 E 是时间 t 的已知函数,即 $E=e(t)$,如图 0.1. 试建立当开关 K 合上后电路中的电流强度随时间的变化关系.

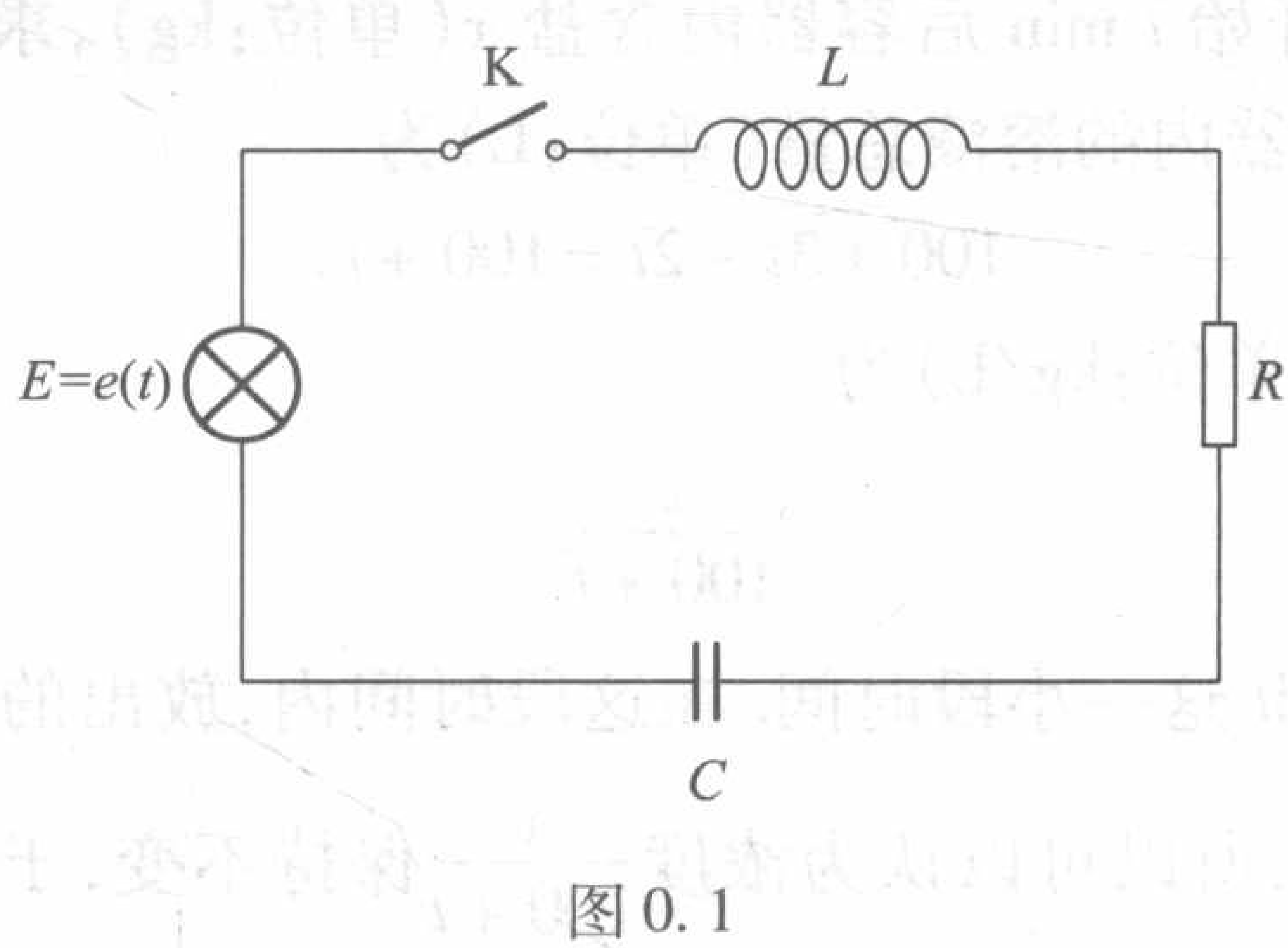


图 0.1

解 当开关 K 合上后,R-L-C 电路中电流经过电感 L、电阻 R 和电容 C. 设两极板间的电压为 U,电感电动势为 E_l,电流强度为 I,电容器上的电量为 $Q(t)$,则

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},\quad U=\frac{Q(t)}{C},\quad E_l=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

由 Kirchhoff(基尔霍夫)第二定律知

$$e(t)=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q(t)}{C}.$$

对上式两边求导则有

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t},$$

此即为开关 K 合上后 R－L－C 电路中电流强度随时间的变化规律.

特别地,当电源电动势 $e(t)$ 为常数时,方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=0.$$

进一步,若电路中不含电阻,即 $R=0$,则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{I}{LC}=0.$$

例 3 单摆(力学模型).

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M 受重力的作用,在垂直于地面的平面上做圆周运动,如图 0.2 所示,试确定摆的运动方程.

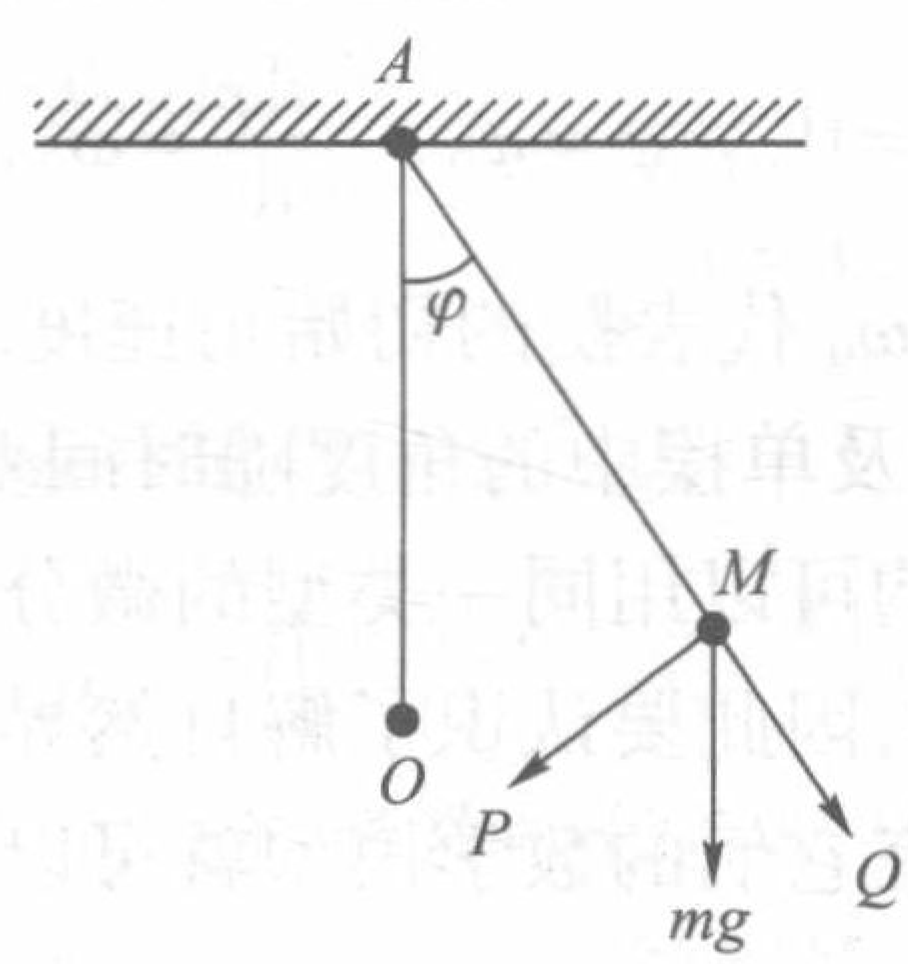


图 0.2

解 取逆时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向. 质点 M 沿圆周切方向的速度为 $v=l\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. 作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 O. 把重力 mg 分解成两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$,第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿着半径 AM 的方向,与线的拉力相抵消,它不会引起质点的速度 v 的数值的改变;第二个分量 $\overrightarrow{MP}$ 沿着

圆周的切线方向,它引起质点的速度 v 的数值的改变. 因为$\overrightarrow{MP}$总是使质点 M 向着平衡位置 O 的方向运动,即当角 φ 为正时,向减少 φ 的方向运动;当角 φ 为负时,向增大 φ 的方向运动,所以$\overrightarrow{MP}$的数值等于 $-mg\sin\varphi$. 因此,摆的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg\sin\varphi,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi.$$

如果只研究摆的微小振动,即当 φ 比较小时,我们可以取 $\sin\varphi$ 的近似值 φ,代入方程,得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0.$$

如果我们假设摆是在黏性的介质中运动,那么沿着摆的运动方向就存在一个与速度成比例的阻力. 如果阻力系数是 μ,则摆的运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0.$$

如果沿着摆的运动方向恒有一个外力 $F(t)$ 作用于它,这时摆的运动称为**强迫微小振动**,其方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t).$$

当要确定摆的某一特定运动时,我们需要给出摆的初始状态

$$t=0,\quad \varphi=\varphi_0,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0,$$

这里 φ_0 代表摆的初始位置,ω_0 代表摆的初始角速度.

上述电路中的电流强度及单摆中的角度随时间变化的现象从表面上看是完全不相关的,但实质上它们均可以用同一类型的微分方程进行描述,而关于模型的求解等数学过程完全一样,因此要认识了解自然界的一些现象,并对其未来的发展趋势进行预测,只要研究它们的数学模型就可以了.

§0.2 微分方程的基本概念

0.2.1 常微分方程与偏微分方程

所谓微分方程就是联系着自变量、未知函数及其导数或微分的关系式. 如果

在微分方程中,自变量只有一个,则称这种方程为**常微分方程**;如果自变量的个数多于一个,则称为**偏微分方程**.

如在前面的实例中建立起来的微分方程都是常微分方程.

下面是几个微分方程的例子:

$$y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(变量分离方程)},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \qquad \text{(Riccati(里卡蒂)方程)},$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad \text{(n 阶 Bessel(贝塞尔)方程)},$$

$$y = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),\text{其中} f(p) \text{ 为 } p \text{ 的连续函数} \qquad \text{(Clairaut(克莱罗)方程)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(Laplace(拉普拉斯)方程)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(热传导方程)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(波动方程)},$$

其中前四个是常微分方程,后三个是偏微分方程. 本书中我们着重研究常微分方程,有时为方便起见,在不致混淆的前提下也将常微分方程简称为**微分方程**或**方程**. 在微分方程中,必定含有的项是未知函数关于自变量的导数,否则不能称其为微分方程,其中出现的**导数的最高阶数**称为该微分方程的**阶数**.

一般 n 阶微分方程的形式为

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0. \tag{0.1}$$

但在实际讨论中,常将其写成所谓的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right), \tag{0.2}$$

即方程的左边只有系数为 1 的未知函数的最高阶导数(n 阶导数),而方程的右边为含有自变量、未知函数及其低于 n 阶的导数的已知函数.

0.2.2 线性和非线性微分方程

若方程(0.1)中的函数 F 是关于 $y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的一次多项式,则称其为 **n 阶线性微分方程**,它的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

其中 $y^{(i)}=\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}x^i}(i=1,2,\cdots,n)$. 不是线性方程的微分方程称为**非线性微分方程**,如

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi.$$

0.2.3 解和隐式解(积分)

如果把函数 $y=f(x)$ 代入方程(0.1)后,能使(0.1)式为恒等式,则称函数 $y=f(x)$ 为方程(0.1)的**解**. 但有时会遇到所求方程的解无法写成显式,如果由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 是方程的解,则称 $\Phi(x,y)=0$ 为方程(0.1)的**隐式解**,这种隐式解也称为方程(0.1)的积分.

例 1 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{1+\mathrm{e}^y}$ 有隐式解

$$y+\mathrm{e}^y-x^2=C,$$

这里 C 为任意常数.

无论是显式解还是隐式解,我们不加区分地称为方程的解.

例 2 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sin x$ 有解

$$y=x\left(C+\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right),$$

其中 C 为任意常数,而 $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是初等函数.

0.2.4 通解、定解问题和特解

对于 n 阶微分方程,如果它的解的表达式 $y=\varphi(x;C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,则称此解为方程的**通解**. 这里 φ 关于 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为独立的含义是指在 $(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 的某个邻域中有

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}\neq 0.$$

注 1 φ 关于 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的独立性的实质在于方程存在唯一满足条件

的解.

例 3 $y''=2x$ 的通解为 $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$，但 $y=\frac{1}{3}x^3+C_1+C_2$ 不是它的通解.

注 通解并不一定就包含了方程的所有解. 如 Clairaut 方程

$$y=xy'+f(y') \qquad (\text{其中 } f(p) \text{ 为 } p \text{ 的连续函数}),$$

有通解 $y=Cx+f(C)$，其中 C 为任意常数. 但此方程还有一个奇解，即从方程组 $\begin{cases}x+f'(p)=0,\\ y=px+f(p)\end{cases}$ 中消去 p 得到的解，不被包括在它的通解中.

当微分方程的通解中的任意常数取特定值时就得到了**特解**，因此要确定它的某个特解，还必须给出该特解所满足的某种条件，这种条件就称为**定解条件**. 由于实际情况的差异，常见的定解条件有两种：一种是初始条件，另一种是边界条件.

所谓**初始条件**是指当自变量在其区间上取某一给定值时，未知函数及它的低于方程阶数的导函数应取给定的数值. 对于方程的初始条件一般具有下列形式：

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

其中 $y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$ 为给定的常量.

所谓**边界条件**一般是指当自变量取其变化区间的两个端点时，未知函数以及可能还有它的一些低于方程阶数的导函数在其中一个端点或两个端点处取给定的值.

例如，对于二阶方程

$$y''=f(x,y,y'),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

给出的边界条件可以是

$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1,$$

或者为

$$y(a)=y_0,\quad y'(b)=y_1,$$

等等.

注 定解条件的个数应与方程的阶数相同.

所谓**定解问题**就是求满足微分方程定解条件的解的问题. 求满足微分方程初始条件解的问题称为**初值问题**，或称为 **Cauchy（柯西）问题**，如 §0.1 中的例 1，即为初值问题. 而求出满足微分方程边界条件的解的问题称为**边值问题**，如经常出现在数学物理问题中的 Sturm-Liouville（施图姆-刘维尔）型边值问题

$$(p(x)u')'+(q(x)+\lambda r(x))u=g(x),$$

$$\begin{cases}\alpha_1 u(a)+\alpha_2 p(a)u'(a)=\eta_1,\\ \beta_1 u(b)+\beta_2 p(b)u'(b)=\eta_2,\end{cases}$$

其中 p,q,r,g 均为$[a,b]$上的已知函数，λ 为参数，$\alpha_i,\ \beta_i,\ \eta_i(i=1,2)$ 为给定常数.

满足微分方程定解条件的解（亦即定解问题的解）称为该方程的**特解**.

0.2.5 积分曲线

设 D 为平面上的区域（连通开集），考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),(x,y)\in D, \tag{0.3}$$

其中 $f(x,y)$ 在 D 中连续. $y=\varphi(x)$ 为方程的解，它的几何表示是 D 中的一条光滑曲线且在其上的点 $(x,\varphi(x))$ 处切线的斜率等于 $f(x,\varphi(x))$，我们称此光滑曲线为方程(0.3)的**一条积分曲线**. 对于方程的通解 $y=\varphi(x,C)$，当 C 变动时，它表示 D 中的一族曲线，称这族曲线为方程(0.3)的**积分曲线族**. 于是满足微分方程初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就表示这族曲线中通过点 $(x_0,y_0)\in D$ 的那条积分曲线. 此外，在方程的积分曲线上的任一点 $(x,\varphi(x))$ 处，其切线斜率 $\varphi'(x)$ 正好等于函数 $f(x,y)$ 在该点处的函数值 $f(x,\varphi(x))$. 反之，如果对于 D 中的一条光滑曲线 $y=\varphi(x)$，在其上任一点处的切线斜率 $\varphi'(x)$ 刚好就是函数 $f(x,y)$ 在该点处的值 $f(x,\varphi(x))$，则此曲线必定是方程的一条积分曲线.

0.2.6 切线场

在 D 中的每一点 (x,y) 处，画上斜率为 $f(x,y)$ 的一条小直线段，我们把每点都有一小直线段的区域 D 称为由方程(0.3)定义的**切线场**，如图 0.3. 因此求方程过点 (x,y) 的积分曲线，就是在区域 D 中找出一条过点 (x,y) 的光滑曲线，使得在它上面每一点处的切线与在该点处的小直线段一致.

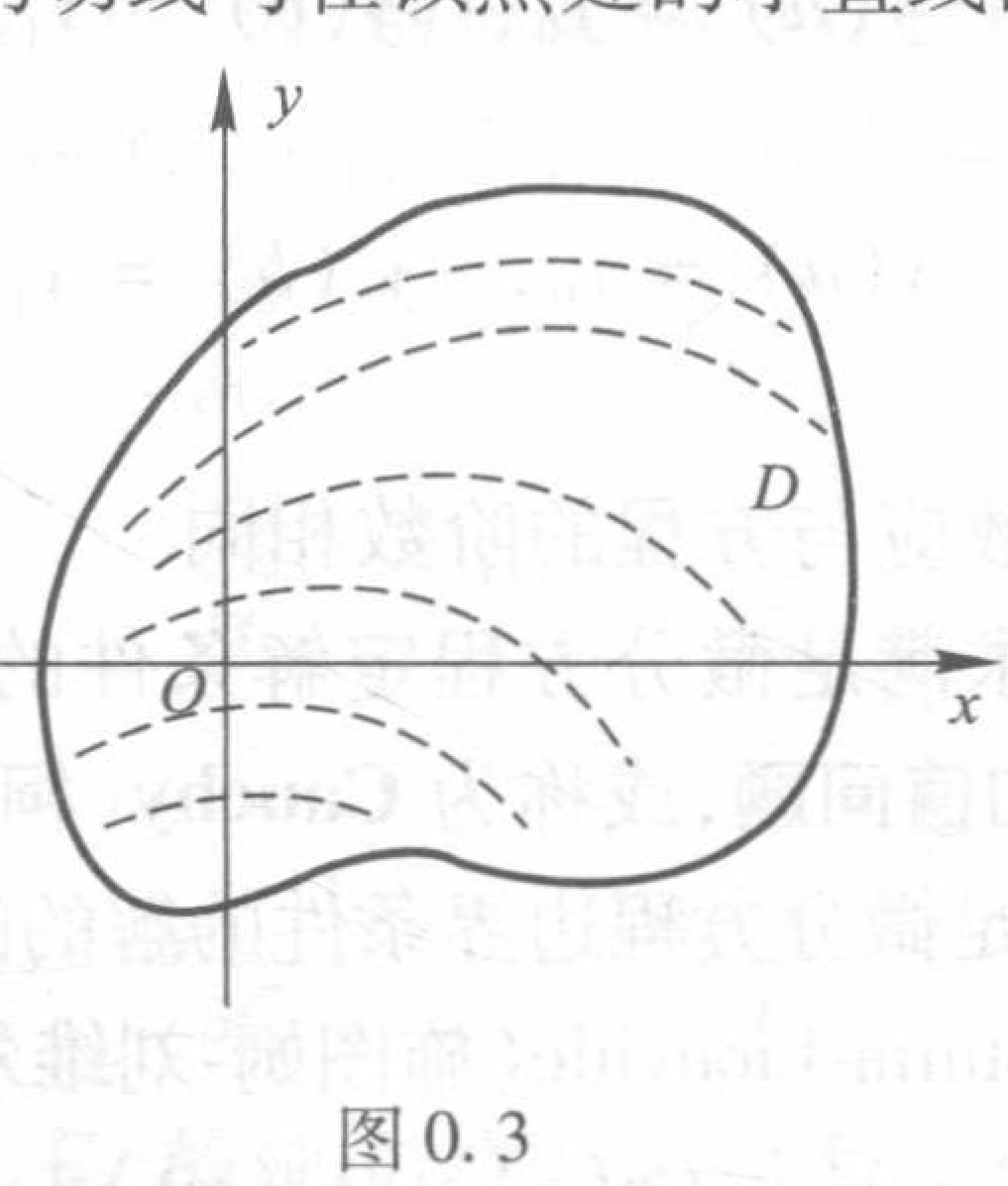


图 0.3

在切线场中，具有相互平行的小直线段的点的几何轨迹称为**等斜线**. 对于方程(0.3)来说，其斜率等于 k 的等斜线方程为

$$f(x,y)=k.$$

当参数 k 取一系列充分接近的值时，就可以得到足够密集的等斜线族. 利用这些等斜线就可以近似地作出方程的积分曲线. 如果想要更精确地作出积分曲线，还必须进一步弄清楚积分曲线的极值点和拐点等. 显然，极值点和拐点如果存在的话，一般地，它们将分别满足方程

$$f(x,y)=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}f(x,y)=0.$$

例 4 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2+xy.$

解 令 $2+xy=k$，则该方程的等斜线为双曲线. 特别当 $k=2$ 时，双曲线退化为 x 轴和 y 轴，即积分曲线在 x 轴和 y 轴上有相同的切线方向.

$k=0$ 对应着函数极值点曲线 $xy=-2$. 进一步分析可知，在双曲线 $xy=-2$ 上，$y''=y+x(2+xy)=y$，因此双曲线上半支取得极小值，下半支取得极大值. 拐点曲线为 $y=-\dfrac{2x}{1+x^2}$.

综合上面的信息即可得到方程的近似积分曲线图(图 0.4).

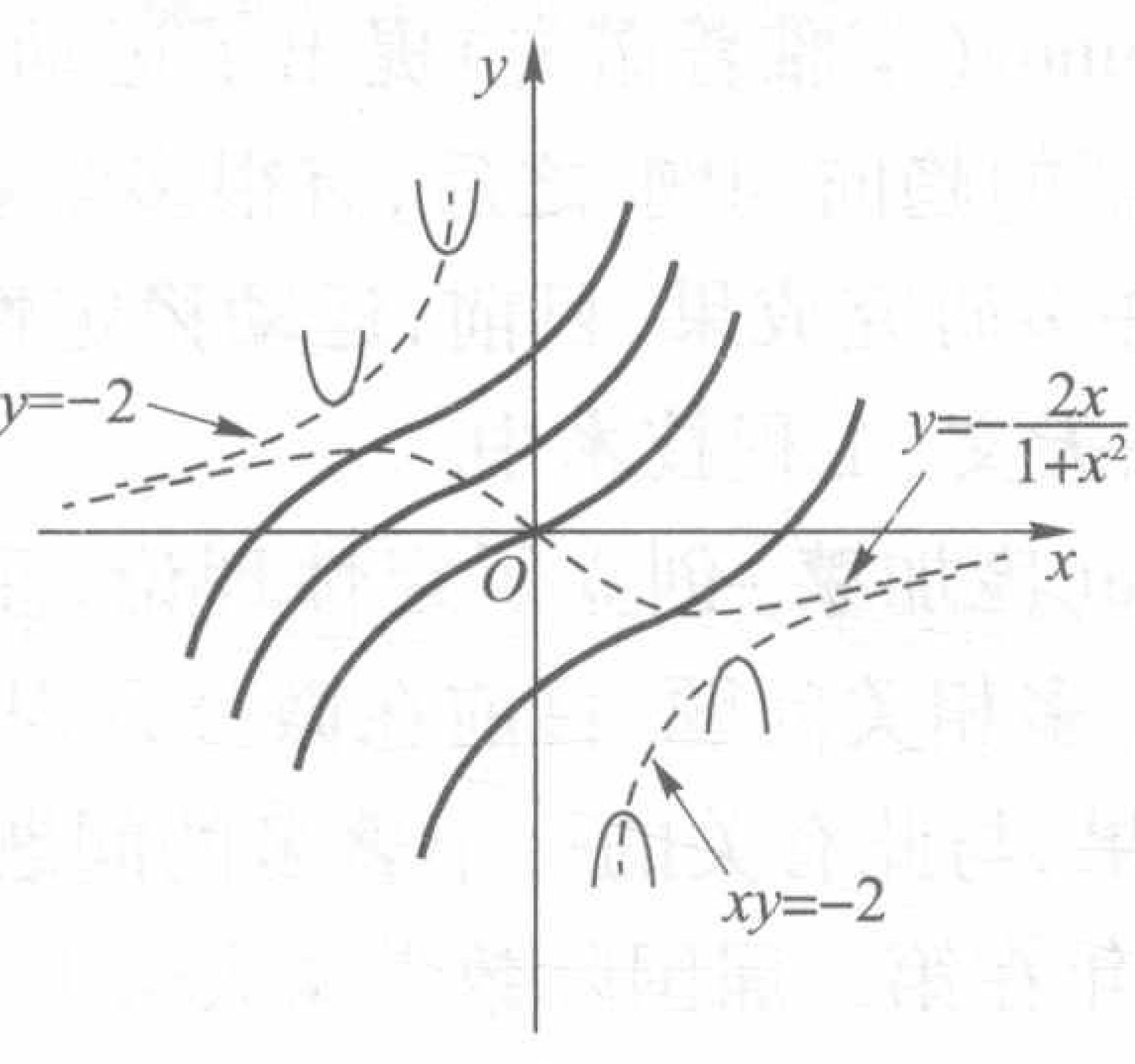


图 0.4

§0.3 微分方程的发展和问题

常微分方程是研究自然科学、工程技术及社会科学中系统演化规律最为基本的数学理论和方法，更具体地讲是用微积分的思想，结合线性代数，解析几何和普通物理学的知识，来解决数学理论本身和其他学科中出现的若干最重要也

是最基本的微分方程问题. 物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融等领域中的许多原理和规律都可以用常微分方程来描述. 如牛顿运动定律、万有引力定律、能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、基因变异、股票的涨跌趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化等,对这些规律的描述、认识和分析就可以归结为对相应的常微分方程数学模型的研究,因此常微分方程理论是很多数学分支乃至其他学科的基础.

历史上对常微分方程的研究分为以下几个阶段(具体参见[3]):

1. 求通解时代. 发展初期一般是解方程,求具体的微分方程的通解.

2. 求定解时代. Liouville 在 1841 年证明了 Riccati 方程不存在一般的初等解,从而结束了求通解时代,加上 Cauchy 初值问题的提出,常微分方程求解步入求定解时代. 首先,常微分方程定解问题包括初边值问题的解的存在性、唯一性等解的性质的研究. 其次是针对线性微分方程,特别是一些特殊的二阶线性微分方程,通过定义一些特殊函数如 Bessel(贝塞尔)函数、Legendre(勒让德)多项式来求解,这促进了微分方程解析理论的发展.

19 世纪末,天体力学中的太阳系稳定性问题迫使人们研究常微分方程解的大范围性态,从而使对常微分方程的研究从“求定解问题”进入了“求所有解”的新时代.

俄罗斯数学家 Lyapunov(李雅普诺夫)提出了运动稳定性,即关于方程解的初值扰动不影响原方程解的趋向问题. 之后,有很多学者围绕运动稳定性进行了大量的研究,并取得了许多研究成果,目前,运动稳定性方面的理论发展已比较成熟,且被广泛地应用在天文、工程技术中.

法国数学家 Poincaré(庞加莱)创立了定性理论,而且研究了常微分方程解的大范围性态,解决了许多相关问题. 目前在微分方程的定性理论、分岔理论等方面已取得很多研究成果,与此有关的一个著名的问题是 Hilbert(希尔伯特)第 16 问题,该问题是 1900 年在第二届国际数学家大会上,由著名数学家 Hilbert 提出的,其中问题的后半部分是平面 n 次多项式系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y) \end{cases}$$

(其中 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 为次数不超过 n 次且其中至少有一个是 n 次多项式)的极限环(即孤立的闭轨)个数的最小上界 $H(n)$ 是多少? 极限环相对位置关系如何? 一个多世纪,特别是最近几十年以来,围绕此问题展开了大量的研究工作,发现并证明了许多有趣的结论. 如 Ilyashenko(伊利亚先科)和 Écalle(埃卡