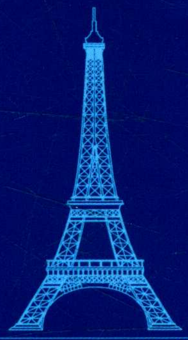


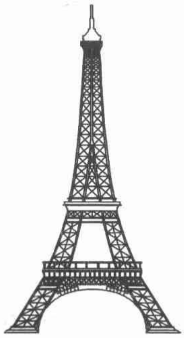
法兰西数学
精品译丛

分析与代数原理（及数论）

（第二卷）（第2版）

Pierre Colmez 著
胥鸣伟 译

高等教育出版社



法兰西数学
精品译丛

分析与代数原理（及数论）

（第二卷）（第2版）

□ Pierre Colmez 著
□ 胥鸣伟 译

高等教育出版社·北京

图字：01-2018-0877 号

图书在版编目（CIP）数据

分析与代数原理（及数论）：第 2 版．第二卷 /（法）皮埃尔·科尔梅（Pierre Colmez）著；胥鸣伟译．--北京：高等教育出版社，2018. 7
ISBN 978-7-04-049869-1

Ⅰ．①分… Ⅱ．①皮… ②胥… Ⅲ．①代数②数论 Ⅳ．① O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 110194 号

分析与代数原理（及数论）
FENXI YU DAISHU YUANLI (JI SHULUN)

策划编辑 吴晓丽　　责任编辑 吴晓丽　　封面设计 杨立新　　版式设计 徐艳妮
责任校对 胡美萍　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京汇林印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787 mm × 1092 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	28.75		
字　数	610 千字	版　次	2018 年 7 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2018 年 7 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	99.00 元

物 料 号　49869-00

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 做出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗散发着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗瓦、庞加莱、嘉当、勒贝格、韦伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续做出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与

影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学（包括纯粹数学与应用数学）的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

序　言

在这本书中人们会发现一些以非常规方式反映出的法国高等教育结构的某些特性 (像大多数这类书一样, 这绝非是唯一的讨论对象). 这些特性平行地表现在传统的大学里, 在那里存在一个 "名门望校" [1] 的精英人才体系, 它极其类似于印度的种姓制(虽然每个学校具有相对的特点, 但这个系统却被在学校之间的一个相当固定的等级划分制度所支配). 要进入名门大学必须经过竞争: 在预科班上进行两年激烈的竞争性准备.

我在巴黎综合理工大学[2] 讲授了一门课, 并由此写出这本书. 我讲课的这个学校离上述的体系还是稍稍有些距离的: 它是一所军事院校, 在那里体育运动颇多, 而且它首要的目标是培养工程师, 以充实到法国各大企业的各个岗位上. 但是它却具有科学的传统, 其中数学起了重要的作用: 蒙日、拉格朗日、泊松、拉普拉斯、傅里叶、柯西、刘维尔、埃尔米特, 还有更近代的 P. 莱维、L. 施瓦兹, 都曾是那里的教授, 同时还培养出了为数颇多的杰出数学家, 包括泊松、柯西、刘维尔、埃尔米特、庞加莱和

[1]法文是 "Grandes Écoles", 这是一个专有名词, 是指法国教育体制中独立于公共大学教育架构的高等教育机构, 是法国对通过入学考试 (concours) 来录取学生的高等院校的总称, 用来区别于大学 (université), 即持有高中会考毕业证书的学生都可以申请进入的普通高等学校. 但是只有优秀学生可以进入 "Grandes Écoles" 的预科; 经过两年的专门培养, 再经过竞争激烈的、淘汰率高的竞考, 通过者才可根据成绩双向选择, 然后进入某一所 "名门望校", 在那里学习三到四年. —— 译者注, 用方括号标出, 而书中原注用圆括号标出.

[2]法文名称是 "École Polytechnique", 有人译为巴黎综合理工学院或学校, 于 1794 年由拿破仑建立, 称得上真正的 "名门望校". 它的昵称为 "X", (见脚注 (1) 中 (X⋯) 的 X) 即表达了此意.

莱维[1].

催生了本书的这门课程力主在学生中发展数学文化 (特别关注现代数学的统一性和强大能力), 即充分展示数学在巴黎综合理工大学所教其他学科 (物理、化学、信息、经济) 中的运用. 本书可分为四个部分:

- 长长的一部数学词典, 它将预科班上见过的材料加以重组和精确化 (这不是一部教材而仅仅是一个浓缩的汇总, 并用解答习题和在书页底部给出有关的文化注解加以充实).
- 在此词典的基础上, 教程本体 (第 I 章到第 VII 章) 介绍了三个基础理论: 群表示论, 实分析 (巴拿赫空间、勒贝格积分以及傅里叶变换), 还有全纯函数论. 这里有大量习题, 有些在给出习题时已做了解答; 对于大多数习题也准备在后面给出它们正确结果的证明.
- A 到 G 七个附录开启了通向更加深刻、更为新近结果的道路, 其中在最后两个附录中所用到的完全是本教材中讲述的技术.
- 十四个习题解答 (称作习题校正): 每次应用教材中的数学对它们进行解答的同时也就是给出了对某个深刻结果的证明. 这种类型的问题似乎具有一种法国特质, 这种特质在法国数学学派的成就中多有显现. 它们对消化吸收所遇到的那些概念和结果, 对教材中所讲述的工具的威力进行评价提供了不可替代的帮助; 我的忠告则是, 在试图把握这些基本定理的证明前, 自己先去寻找解决方法 (倘若失败了, 去看一下答案; 对于根本不懂的情形, 阅读一个未曾考虑过的问题的解答无疑是个理想的方案; 反之, 尝试自己解答问题则是接受和消化这个解答的最好的准备方式); 它们也以较为初等的方式解释了数学的统一性.

---

[1]不用追溯太远, 下面是巴黎综合理工大学校友的名单 (名字后面是他们入校的年份), 他们曾受邀在国际数学家大会报告他们的工作, 这个大会每四年举行一次, 其作用在于定期地更新数学的进展 (也颁发菲尔兹奖): 1970 (尼斯), F. Pham (X1957); 1974 (温哥华), A. Bensoussan (X1960) 和 B. Maurey (X1966); 1978 (赫尔辛基), A. Raviart (X1958); 1982 (华沙), B. Mandelbrot (X1944), R. Glowinski (X1958), J.-M. Fontaine (X1962), B. Teissier (X1964) 和 G. Pisier (X1969); 1986 (伯克利), J.-M. Bismut (X1967); 1990 (东京), L. Tartar (X1965), J. Ecalle (X1966) 和 J.-M. Coron (X1975); 1994 (慕尼黑), P. Ciarlet (X1959), F. Ledrappier (X1965), A. Louveau (X1966) 和 E. Pardoux (X1967); 1998 (柏林), M. Herman (X1963), G. Iooss (X1964), A. Lascoux (X1964), J.-M. Bismut (X1967), G. Pisier (X1969), S. Mallat (X1981), F. Hélein (X1983) 和 F. Béthuel (X1983); 2002 (北京), J.-M. Fontaine (X1962), A. Chenciner (X1963), P. Flajolet (X1968), P. Delorme (X1970), A. Cohen (X1984) 和 T. Rivière (X1987); 2006 (马德里), F. Morel (X1984), C. Lebris (X1986) 和 E. Candès (X1990); 2010 (海得拉巴), J.-M. Coron (X1975), F. Pacard (X1984) 和 C. Breuil (X1989). 但这远不能与巴黎高等师范学院及其十位菲尔兹奖得主 (施瓦兹 (L. Schwartz)、塞尔 (J.-P. Serre)、托姆 (R. Thom)、孔涅 (A. Connes)、利翁斯 (P.-L. Lions)、约科茨 (J.-C. Yoccoz)、拉弗格 (L. Lafforgue)、维尔纳 (W. Werner)、维拉尼 (C. Villani) 和吴宝珠 (Ngô Bao Châu)) 相比肩, 然而作为一所工科加军事的院校, 这已是非常卓越了 (巴黎高等师范学院的作用是培养高水平的学者).

在写这本书的过程中我也学到了许多, 也希望读者在这里能找到满足他们好奇心的东西. 作为一位数论学家, 我为能从数论中给出解释数学统一性[2] 问题颇感荣耀; 但愿有与物理学关系密切的人能够写出由物理学启迪的附录, 以及它所涉及的数学术语和第 I 到第 VII 章的数学.

Pierre Colmez

[2] 观察一些概念如何与一个理论相互印证或者从一个领域过渡到另一个是十分迷人的; 小词典的注 47 给出了一个相当令人吃惊的解释. 同样地, 问题 H.9 也受到 p-adic 理论的定理 D.3.2 的启发, 对此我曾自问, 它在实域 (或复域) 中会变成什么样? 后来我才意识到, 按照 Paley-Wiener 定理的思路看来, 它完全是一个经典的结果.

前　　言

数学是一个具有惊人威力的工具, 其他的科学分支都以不同的方式在不同程度应用它, 同时它又是人类最不可思议的集体造物中的一个, 并且人类一代接一代地使得这座大厦不断地升高但仍矗立在坚实的基础之上. [1]

本书介绍了作为数学基石的理论中的三个. 第一个 (第 I 章) 是有限群的表示论及其特征标; 这个理论是在 1895 到 1905 年间由弗罗贝尼乌斯 (F. Frobenius)、伯恩赛德 (W. Burnside) 和舒尔 (I. Schur) 发展起来的, 它是线性代数的一个推广 (涉及对由多个同构生成的群在一个有限维向量空间上的共同作用的理解), 而特征标理论则是在有限架构上的傅里叶变换的一个最重要的表现方式, 在此架构上没有分析上的难点. 在数学中, 在一些物理分支 (譬如粒子物理) 中, 或者还在经典化学的一个小方向 (晶体) 上, 群表示论处于中心的位置; 有限群的情形也常常被作为在更加复杂情形中进行合理推测的一个先导.

第二个 (第 II, III, IV 章) 是在 1900 到 1930 年发展起来的泛函分析 (巴拿赫空间、勒贝格积分、傅里叶变换), 为此做出贡献的有贝尔 (R. Baire)、巴拿赫 (S. Banach)、弗雷歇 (M. Fréchet)、哈恩 (H. Hahn)、希尔伯特 (D. Hilbert)、勒贝格 (H. Lebesgue)、普朗谢雷尔 (M. Plancherel)、里斯 (F. Riesz)、施坦豪斯 (H. Steinhaus),…… 这个理论因 20 世纪对微分方程和偏微分方程等锲而不舍的追求而诞生, 它形成了现代实分析的基础. 在由物理提出的偏微分方程 (热传导方程、波动方程、薛定谔方程, ……) 的研究中, 它有着多不胜数的应用.

最后一个 (第 V, VI, VII 章) 介绍了单复变量的解析函数理论, 它是在 1820 到 1840 年间由柯西一手发展起来的, 后来他还定期地返回这个领域; 本书所依照的讲述方式大多应归于魏尔斯特拉斯和庞加莱在 19 世纪后半叶所做的贡献. 这个理论, 还有 [2]
群的一般理论, 大概是在别的数学分支或理论物理中用的最多的两个了. 例如, 平面开集的共形表示在具平面区域边界条件的热传导方程、空气动力学、布朗运动或者聚合

物等的研究中都有应用, 我们将只简短提及它们 (第 VI 章的注 1).

这类教材的一个主要问题在于, 虽然它们着重关注那些将来有很大应用的结果, 但却将这些应用只是作为趣味数学归入到习题之中, 这就好像人们只是为了对教堂立柱基座的经年的坚固性感兴趣而去参观它那样. 为了努力改变这种倾向, 我们将注意力集中在来自数论方面的分析课题上; 数论具有与几乎所有数学领域 (甚至理论物理) 相互作用的惊人能力, 从而对这些领域的进展做出强有力的贡献. 它涉及 L 函数, 它的原型是黎曼 ζ 函数 (定义为: 当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$). 有关这些对象的主要结果之一大概要数欧拉 (1734) 的著名公式 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 了, 它回答了在 1644 年提出的知名的"巴塞尔 (Bâle) 问题". 同样是欧拉, 揭示了 ζ 函数与素数分布之间的关联, 但它一直没有被严格证明. 直到 1896 年, 阿达马 (J. Hadamard) 和德拉瓦莱普森 (C. de la Vallée Poussin) 才按照黎曼在 1858 年提出的方案给出了正确的证明. 其间, 狄利克雷 (G. Dirichlet) 在 1837 年引进了第一批 L 函数, 用来证明在算术级数中存在无穷多个素数. 附录 A 专门讨论了这些结果, 它还提供了对全纯函数用处的令人震惊的诠释: 在那里它被用来解决看起来非常难的问题. 自此之后, L 函数的范围得到了充实, 形成了一个壮观的大厦, 为此, 附录 G 力图从观察给出一些见解, 就像去巴黎圣母院应鉴赏其穹窿的优美和雄伟, 而没有必要弄懂为什么它没有垮塌, 更没有必要去了解如何进行建造才不会引起逐步坍塌. 我们自己则只限于 L 函数的解析性方面, 它涉及另一个无所不在且十分令人激动的数学对象, 即模形式; 按照前面所说的方案我们将它归并成一系列的习题. 我们 (差不多) 抵制住了想要探索 L 函数的算术性质的诱惑: 它们在整数上的取值隐藏着一些宝藏, 包括德利涅 (P. Deligne) 的总猜想中的一些对象 (该猜想 (1977) 合理地给出了关于 π^2 的欧拉公式, 以及不可能存在 $\zeta(3)$ 的 π^3 公式), 贝林森 (A. Beilinson) 的猜想 (1985, 他特别要寻求在 $\zeta(3)$ 中究竟包含了什么东西的某种解释), 还有布洛赫 (S. Bloch) 和加藤 (K. Kato) 的猜想 (1989, 他们的猜想是要给出一个完全一般的公式, 譬如, 它能告诉我们在公式 $\zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13}$
[3] 中的 691 有什么意义). 伯奇 (Birch) 与斯温纳顿–戴尔 (Swinnerton-Dyer) 猜想是这些隐匿的宝藏的一个例子; 这个猜想是在 20 世纪 60 年代初提出的, 附录 F 将专门讨论它.

参考文献概览

希望更加深入了解本书某些课题的读者请参看下面所列的著作[1]. 这些著作与本书的水平几乎相当, 但要更关注某些特定的方向, 它们能让读者走得更远.

P. Biane, J-B. Bost 和 P. Colmez, *La fonction zêta*, Presses de l'École Polytechnique.

读者在这里可发现 ζ 函数与算术或概率论相关联的各个不同方面.

[1] 构造习题的标准办法是, 拿出在比较专门的著作中的结果然后加以剪辑形成问题. 因此读者可以在这些著作中找到本书大部分习题的答案.

J-B. Bost, *Fonctions analytiques d'une variable complexe*, École Polytechnique.

覆盖了本书的 V 到 VII 章和附录 A 的一部分.

D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press.

附录 G 的展开版本; 读这本书要求有大量的时间和精力的投入.

H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

覆盖了 V 到 VI 章, 但追循的是几何方向 (黎曼面以及多变量函数).

W. Ellison, *Les nombres premiers*, Hermann.

除覆盖了附录 A 外还有更多的内容.

W. Fulton 和 J. Harris, *Representation theory, A first course*, GTM 129, Springer-Verlag.

由第 I 章和附录 C 开始, 但追循的是李群表示论的方向.

R. Godement, *Analyse mathématique II,III et IV*, Springer-Verlag.

覆盖了本教材的最重要部分, 我曾希望, 如果能得到允许, 直接在本书中加入该书中的数页内容. 该书对于模形式的处理相当到位.

N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, GTM 97, Springer-Verlag.

提供了对数论的一个概览, 可关联到同余数问题 (附录 F).

S. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-functions*, Cambridge University Press.

覆盖了附录 A, 追寻的是黎曼和林德勒夫假定.

W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill.

分析教材, 特别地覆盖了分析部分 (II 到 VI 章), 但它并没有停留在此而是走得更远.

J-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France. [4]

一本深入学习有理系数二次形式和模形式的令人愉悦的书.

J-P. Serre, *Représentations Linéaires des groupes finis*, Hermann.

覆盖了第 I 章和附录 C 的一部分, 并继续讨论涉及有限群表示论的更深刻的问题.

A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag.

一本读起来舒服的带有半历史性的书, 用初等语言讲解了全纯函数与数论之间的关联.

最后, 有两本关于数学思想史的书, 本书的脚注很多来自它们. 这两本书所覆盖的

时间段尽管是非空交集但不完全相同; 第二本要更近代一些, 要求有更扎实一点的数学背景.

A. Dahan-Dalmedico 和 J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Points Sciences, Éditions du Seuil.

J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann.

[5] 标准符号

以 $\mathbf{N}$ 表示自然数集 $\{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, $\mathbf{Q}$ 为有理数域, $\mathbf{R}$ 为实数域而 $\mathbf{C}$ 为复数域. 以 $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$ 分别表示 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 的乘法群.

$\mathbf{R}_+$ (分别地, $\mathbf{R}_+^*$) 表示正实数集 (分别地, 严格正实数集); 而 $\mathbf{R}_-$(分别地, $\mathbf{R}_-^*$) 表示负实数集 (分别地, 严格负实数集).

以 $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 表示扩张实直线, $\overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 表示扩张的实半直线.

如果 $t \in \mathbf{R}$, 以 $[t]$ 表示它的整数部分, 而 $\{t\} = t - [t]$ 表示它的分数部分.

如果 X 是个集合, 以 $|X| \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ 表示它的基数; 如果 $Y \subset X$, 则以 $\mathbf{1}_Y : X \to \{0,1\}$ 表示 Y 的特征函数 (定义为: 当 $x \in Y$ 时, $\mathbf{1}_Y(x) = 1$, 而当 $x \notin Y$ 时, $\mathbf{1}_Y(x) = 0$). 如果 X, Y 为集合 E 的两个子集, 记 $X - (X \cap Y)$, 或更简单地, $X - Y$ 为 $X \cap Y$ 在 X 中的补集.

如果 I 和 X 均为集合, 以 X^I 表示 I 到 X 的映射的集合; 记 X^I 中的一个元素为 $i \mapsto x_i$ 或 $i \mapsto x(i)$, 再或者 $(x_i)_{i \in I}$ (例如当 $I = \mathbf{N}$ 时).

我们常常以 "$a, b \in X$" 记 "$a \in X$ 和 $b \in X$", 而且我们对于所有的量化词均不加解释: 例如, 我们常以 "当 $|x| \leqslant \delta$ 时, $|f(x)| \leqslant \varepsilon$" 代替 "对所有的 $|x| \leqslant \delta$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon$".

设 A 是个环, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. 我们以 $\mathbf{M}_n(A)$ 表示系数在 A 中的 $n \times n$ 矩阵组成的环, $\mathbf{GL}_n(A) \subset \mathbf{M}_n(A)$ 为可逆矩阵的群 (它的行列式在 A 中可逆), 而 $\mathbf{SL}_n(A)$ 是 $\mathbf{GL}_n(A)$ 中行列式为 1 的矩阵的子群.

$x \gg 0$ (分别地, $x \ll 0$) 代表充分大 (分别地, 充分小) 的实数.

如果 f, g 是从拓扑空间 X 到 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 的函数, 在 x_0 的邻域中记号 $f = O(g)$ 的意思是, 存在 x_0 的一个邻域 V 和一个常数 $C > 0$, 使得对 $x \in V$ 有 $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$; 在 x_0 的邻域中记号 $f = o(g)$ 表示存在 x_0 的一个邻域 V 及一个在 x_0 处趋于 0 的函数 $\varepsilon : V \to \mathbf{R}_+$, 使得对所有 $x \in V$, 有 $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)|g(x)|$.

目　　录

第一卷的内容

数学小词典