信息与计算科学丛书——84

非线性发展方程的有限差分方法

孙志忠 著

科学出版社

信息与计算科学丛书 84

非线性发展方程的有限差分方法

孙志忠 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书针对应用科学中的 11 个重要的非线性发展方程, 介绍差分求解方法的最新研究成果, 包括微分方程问题解的守恒性和有界性分析、差分方法的建立、差分解的守恒性和有界性分析、差分解的存在性分析、差分解收敛性的证明、差分格式的求解等内容. 建立的差分求解格式包括非线性差分格式和线性化差分格式. 这 11 个非线性发展方程如下: Burgers 方程、正则长波方程、Korteweg-de Vries 方程、Camassa-Holm 方程、Schrödinger 方程、Kuramoto-Tsuzuki 方程、Zakharov 方程、Ginzburg-Landau 方程、Cahn-Hilliard 方程、外延增长模型方程和相场晶体模型方程.

本书可供计算数学、应用数学专业从事偏微分方程数值解法研究的研究生阅读, 也可供相关学科研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性发展方程的有限差分方法/孙志忠著. —北京: 科学出版社, 2018. 8
(信息与计算科学丛书; 84)
ISBN 978-7-03-058087-0

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①非线性方程-发展方程-有限差分法
Ⅳ. ①O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 132712 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 8 月第一次印刷 印张: 20 1/2
字数: 413 000

定价: 149.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　言

非线性现象的研究是自然科学领域甚至社会科学领域也十分关心的问题. 由于自然界中许多的现象本质上是非线性的, 所以非线性现象引起了工程师、物理学家、数学家和许多其他领域的科学家的兴趣、关注. 在数学和物理科学里, 非线性现象是指输出的变化量不正比于输入的变化量. 很大一部分非线性现象可以用非线性偏微分方程来描述. 非线性偏微分方程的两个典型例子是流体力学中的 Navier-Stokes 方程、量子力学中的 Schrödinger 方程. 维基百科上列出的非线性偏微分方程有 118 个之多.

非线性问题最大困难之一是一般不能由已知的特解去构造新解. 例如, 线性问题, 由一族线性无关的解可以通过叠加原理构造通解. 一个非常好的例子是带有 Dirichlet 边界条件的热传导方程的解可以表示成不同频率的正弦函数的依赖于时间系数的线性组合. 叠加原理使得求解线性问题的解变得容易. 对于非线性问题找几个特解常常还是可能的, 但是试图从这几个特解出发寻找通解有很大的难度.

在科学的计算机化进程中, 科学与工程计算作为一门工具性、方法性、边缘交叉性的新学科开始了自己的新发展. 微分方程数值解法也得到了前所未有的发展.

本书选择 11 个非线性偏微分方程定解问题研究其差分解法. 这 11 个方程依次是 Burgers 方程、正则长波方程、Korteweg-de Vries 方程、Camassa-Holm 方程、Schrödinger 方程、Kuramoto-Tsuzuki 方程、Zakharov 方程、Ginzburg-Landau 方程、Cahn-Hilliard 方程、外延增长模型方程和相场晶体模型方程. 对每一个方程的定解问题, 建立了几个有效的差分格式, 对每一个差分格式证明了差分格式解的存在唯一性、守恒性和有界性、收敛性.

本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (项目编号: 11671081, 11271068, 10871044, 10471023, 19801007) 的资助.

本书介绍的大部分内容是作者和合作者的研究成果. 在此, 对合作者表示诚挚的谢意! 由于作者的学识有限, 诚望各位专家及广大读者提供宝贵意见和建议.

Email 地址: zzsun@seu.edu.cn.

孙志忠

2017 年 8 月

目　录

第 1 章　Burgers 方程的差分方法

1.1 引　　言

Burgers 方程是描述许多物理现象的模型方程, 如流体力学、非线性声学、气体动力学、交通流动力学问题. Burgers 方程也可以作为流体动力学 Navier-Stokes 方程的简化模型. 近年来, 求解 Burgers 方程的数值方法受到科研人员的广泛关注.

考虑一维非线性 Burgers 方程初边值问题

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L, \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.3}$$

其中 ν 为动力黏性系数, $\varphi(x)$ 为给定函数, $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

在介绍差分格式之前, 我们先用能量方法给出问题 (1.1)–(1.3) 解的先验估计式.

定理 1.1　设 $u(x,t)$ 为问题 (1.1)–(1.3) 的解. 记

$$E(t) = \int_0^L u^2(x,t)\mathrm{d}x + 2\nu\int_0^t \left[\int_0^L u_x^2(x,s)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s,$$

则有

$$E(t) = E(0), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{1.4}$$

证明　用 u 乘以 (1.1) 的两边, 可得

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = \nu[(uu_x)_x - u_x^2].$$

将上式两边关于 x 在区间 $[0, L]$ 上积分, 并利用 (1.3), 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L u^2(x,t)\mathrm{d}t + \nu\int_0^L u_x^2(x,t)\mathrm{d}x = 0.$$

可将上式写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_0^L u^2(x,t)\mathrm{d}x + 2\nu\int_0^t \left[\int_0^L u_x^2(x,s)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s\right\} = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 0, \quad 0 < t \leqslant T.$$

因而

$$E(t) = E(0), \quad 0 < t \leqslant T. \qquad \square$$

1.2　二层非线性差分格式

1.2.1　记号及引理

为了用差分格式求解问题 (1.1)–(1.3), 将求解区域 $[0,L]\times[0,T]$ 作剖分. 取正整数 m, n. 将 $[0,L]$ 作 m 等分, 将 $[0,T]$ 作 n 等分. 记 $h = L/m, \tau = T/n; x_i = ih, 0 \leqslant i \leqslant m; t_k = k\tau, 0 \leqslant k \leqslant n; \Omega_h = \{x_i \,|\, 0 \leqslant i \leqslant m\}, \Omega_\tau = \{t_k \,|\, 0 \leqslant k \leqslant n\}; \Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$. 称在直线 $t = t_k$ 上的所有结点 $\{(x_i, t_k) \,|\, 0 \leqslant i \leqslant m\}$ 为第 k 层结点. 此外, 记 $x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), t_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$.

记

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}_h = \{u \,|\, u = (u_0, u_1, \cdots, u_m)\text{为}\Omega_h\text{上的网格函数}\},\\
&\mathring{\mathcal{U}}_h = \{u \,|\, u \in \mathcal{U}_h, u_0 = u_m = 0\}.
\end{aligned}$$

设 $u \in \mathcal{U}_h$, 引进如下记号:

$$\delta_x u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i), \quad \delta_x^2 u_i = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad \Delta_x u_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}).$$

易知

$$\delta_x^2 u_i = \frac{1}{h}(\delta_x u_{i+\frac{1}{2}} - \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}), \quad \Delta_x u_i = \frac{1}{2}(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} + \delta_x u_{i+\frac{1}{2}}).$$

设 $u, v \in \mathcal{U}_h$, 引进内积、范数及半范数

$$\begin{aligned}
&(u, v) = h\left(\frac{1}{2}u_0 v_0 + \sum_{i=1}^{m-1} u_i v_i + \frac{1}{2}u_m v_m\right),\\
&\|u\|_\infty = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} |u_i|, \quad \|u\| = \sqrt{h\left(\frac{1}{2}u_0^2 + \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2 + \frac{1}{2}u_m^2\right)},\\
&|u|_1 = \sqrt{h\sum_{i=1}^{m}(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}})^2}, \quad \|u\|_1 = \sqrt{\|v\|^2 + |u|_1^2},\\
&|u|_2 = \sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}(\delta_x^2 u_i)^2}, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\|u\|^2 + |u|_1^2 + |u|_2^2}.
\end{aligned}$$

如果 $\mathcal{U}_h$ 为复空间, 则相应的内积定义为

$$(u,v)=h\left(\frac{1}{2}u_0\bar{v}_0+\sum_{i=1}^{m-1}u_i\bar{v}_i+\frac{1}{2}u_m\bar{v}_m\right),$$

其中 $\bar{v}_i$ 为 v_i 的共轭.

记

$$\mathcal{S}_\tau=\{w\,|\,w=(w_0,w_1,\cdots,w_n)\text{为 }\Omega_\tau\text{ 上的网格函数}\}.$$

设 $w\in\mathcal{S}_\tau$, 引进如下记号:

$$w^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(w^k+w^{k+1}),\qquad w^{\bar{k}}=\frac{1}{2}(w^{k+1}+w^{k-1}),$$

$$\delta_t w^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\tau}(w^{k+1}-w^k),\quad \Delta_t w^k=\frac{1}{2\tau}(w^{k+1}-w^{k-1}).$$

易知

$$\Delta_t w^k=\frac{1}{2}(\delta_t w^{k-\frac{1}{2}}+\delta_t w^{k+\frac{1}{2}}).$$

设 $u=\{u_i^k\,|\,0\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant k\leqslant n\}$ 为 $\Omega_{h\tau}$ 上的网格函数, 则 $v=\{u_i^k\,|\,0\leqslant i\leqslant m\}$ 为 Ω_h 上的网格函数, $w=\{u_i^k\,|\,0\leqslant k\leqslant n\}$ 为 Ω_τ 上的网格函数.

引理 1.1 ([4, 25]) (a) 设 $u,v\in\mathcal{U}_h$, 则有

$$-h\sum_{i=1}^{m-1}(\delta_x^2u_i)v_i=h\sum_{i=1}^{m}(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}})(\delta_x v_{i-\frac{1}{2}})+(\delta_x u_{\frac{1}{2}})v_0-(\delta_x u_{m-\frac{1}{2}})v_m.$$

(b) 设 $v\in\mathring{\mathcal{U}}_h$, 则有

$$-h\sum_{i=1}^{m-1}(\delta_x^2u_i)u_i=|u|_1^2,$$

$$|u|_1^2\leqslant\|u\|\cdot|u|_2,$$

$$\|u\|_\infty\leqslant\frac{\sqrt{L}}{2}|u|_1,$$

$$\|u\|\leqslant\frac{L}{\sqrt{6}}|u|_1.$$

(c) 设 $u\in\mathring{\mathcal{U}}_h$, 则有

$$\|u\|_\infty^2\leqslant\|u\|\cdot|u|_1,$$

且对任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\|u\|_\infty^2\leqslant\varepsilon|u|_1^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|u\|^2.$$

(d) 设 $u \in \mathcal{U}_h$, 则

$$|u|_1^2 \leqslant \frac{4}{h^2}\|u\|^2.$$

(e) 设 $u \in \mathcal{U}_h$, 则有

$$\|u\|_\infty^2 \leqslant 2\|u\| \cdot |u|_1 + \frac{1}{L}\|u\|^2.$$

且对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\|u\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon|u|_1^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{L}\right)\|u\|^2.$$

证明　我们仅证明(c)和(e).

(c) 由 $u_0 = 0$, 当 $1 \leqslant i \leqslant m-1$ 时, 有

$$u_i^2 = \sum_{l=1}^{i}(u_l^2 - u_{l-1}^2) = \sum_{l=1}^{i}(u_l + u_{l-1})(u_l - u_{l-1}) = 2h\sum_{l=1}^{i} u_{l-\frac{1}{2}}\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}.$$

因而

$$u_i^2 \leqslant 2h\sum_{l=1}^{i}\left|u_{l-\frac{1}{2}}\right| \cdot \left|\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\right|.$$

类似地, 注意到 $u_m = 0$, 可得

$$u_i^2 \leqslant 2h\sum_{l=i+1}^{m}\left|u_{l-\frac{1}{2}}\right| \cdot \left|\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\right|.$$

将以上两式相加得到

$$u_i^2 \leqslant h\sum_{l=1}^{m}\left|u_{l-\frac{1}{2}}\right| \cdot \left|\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\right| \leqslant \sqrt{h\sum_{l=1}^{m}\left|u_{l-\frac{1}{2}}\right|^2} \cdot \sqrt{h\sum_{l=1}^{m}\left|\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\right|^2} \leqslant \|u\| \cdot |u|_1.$$

容易得到

$$\|u\|_\infty^2 \leqslant \|u\| \cdot |u|_1.$$

对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\|u\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon|u|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|^2.$$

(e) 当 $i>j$ 时,

$$\begin{aligned}
u_i^2 &= u_j^2+\sum_{l=j+1}^{i}(u_l^2-u_{l-1}^2)\\
&= u_j^2+2h\sum_{l=j+1}^{i}u_{l-\frac{1}{2}}\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\\
&\leqslant u_j^2+2h\sum_{l=j+1}^{i}\left|u_{l-\frac{1}{2}}\right|\cdot\left|\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\right|\\
&\leqslant u_j^2+2h\sum_{l=1}^{m}\left|u_{l-\frac{1}{2}}\right|\cdot\left|\delta_x u_{l-\frac{1}{2}}\right|\\
&\leqslant u_j^2+2\|u\|\cdot|u|_1.
\end{aligned}\tag{1.5}$$

易知上式对 $i\leqslant j$ 也是成立的.

记

$$w_j=\begin{cases}1, & 1\leqslant j\leqslant m-1,\\ \dfrac{1}{2}, & j=0,m.\end{cases}$$

将 (1.5) 乘以 hw_j 并对 j 从 0 到 m 求和得到

$$h\sum_{j=0}^{m}w_j u_i^2\leqslant h\sum_{j=0}^{m}w_j u_j^2+2h\sum_{j=0}^{m}w_j\|u\|\cdot|u|_1.$$

由上式易得

$$L\|u\|_\infty^2\leqslant\|u\|^2+2L\|u\|\cdot|u|_1,$$

即

$$\|u\|_\infty^2\leqslant 2\|u\|\cdot|u|_1+\frac{1}{L}\|u\|^2.$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\|u\|_\infty^2\leqslant\varepsilon|u|_1^2+\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{L}\right)\|u\|^2.$$ □

下面我们给出几个常用的数值微分公式.

引理 1.2 ([4]) 设 c,h 为给定的常数, 且 $h>0$.

(a) 如果 $g(x)\in C^2[c-h,c+h]$, 则有

$$g(c)=\frac{1}{2}[g(c-h)+g(c+h)]-\frac{h^2}{2}g''(\xi_0),\quad c-h<\xi_0<c+h;$$

(b) 如果 $g(x)\in C^2[c,c+h]$, 则有

$$g'(c)=\frac{1}{h}[g(c+h)-g(c)]-\frac{h}{2}g''(\xi_1),\quad c<\xi_1<c+h;$$