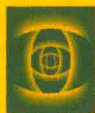


纯粹数学与应用数学专著·典藏版



第40号

重整化变换的复动力学

乔建永 著



科学出版社

纯粹数学与应用数学专著丛书 第40号

重整化变换的复动力学

乔建永 著

科学出版社

北京

2010

内 容 简 介

本书系统论述复解析动力系统的基本理论,并简要介绍重整化变换的统计物理学背景.在此基础上,介绍近年来关于重整化变换复动力系统的研究成果.主要内容包括: Fatou-Julia 理论、Yang-Lee 零点与重整化变换的 Julia 集、Fatou 集和 Julia 集上动力学的当代研究进展、重整化变换的动力学性态、自由能量的临界指数等.

本书适合数学、物理及相关工程专业高年级大学生和研究生阅读,同时也可作为广大非线性研究人员及相关工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书:典藏版/杨乐主编. —北京:科学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

I. ①纯… II. ①杨… III. ①数学 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑:赵彦超/责任校对:李静科

责任印制:张伟/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第一版 开本:720×1000 1/16

2018 年 1 月印刷 印张:17 1/2

字数:341 000

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《纯粹数学与应用数学专著》丛书编委会

主 编：杨 乐

编 委：（以姓氏笔画为序）

马志明	龙以明	朱熹平	张伟平
肖 杰	陈志明	宗传明	范更华
段海豹	洪家兴	席南华	郭柏灵
彭实戈	程崇庆		

序 言

复动力系统理论研究复解析映照迭代生成的动力系统,这一理论起源于 1920 年前后 Fatou 和 Julia 的研究工作. 在第一次世界大战期间,他们将正规族理论应用于复动力系统研究,创立了经典的 Fatou-Julia 理论,为复动力系统理论的形成和发展奠定了坚实的基础. 在 Fatou-Julia 理论诞生以后,复动力系统理论的研究几乎停滞了 60 年. 20 世纪 80 年代,伴随着非线性科学的崛起,复动力系统理论蓬勃发展起来. 在与双曲几何、分形几何、现代分析和混沌学等学科发展相互促进的同时,它本身无论是在深度还是在广度上都获得了划时代的巨大发展.

复动力系统在统计力学中的应用始于 20 世纪 80 年代. 物理学家在研究相变问题时很早就涉及了复解析问题. 20 世纪 50 年代初,杨振宁和李政道提出用配分函数复零点极限集来刻画相变点集,证明了著名的单位圆定理. 进入 80 年代后,在非线性科学大发展的背景下,人们借助获诺贝尔奖的重要物理学成就——重整化群方法,发现大量物理模型的复相变点集的分布非常复杂,它们具有异常丰富的分形结构. 事实上,它们可以对应于重整化变换复动力系统的不稳定集. 本书以统计力学重整化变换的复动力系统为主线,在阐述这方面研究工作的同时,尽可能系统地介绍当前复动力系统研究的基本理论和基本方法.

本书分为 10 章. 第 1 章介绍 Fatou-Julia 的经典理论. 系统论述周期点附近的局部动力学性态;介绍动力系统在不稳定集——Julia 集上的基本性质:周期点的稠密性、动力系统的拓扑传递性,以及对初始值的敏感依赖性,展示了系统的基本混沌性态.

第 2 章从介绍统计力学的基本概念入手,以 Ising 模型和 Potts 模型为切入点,介绍关于 Yang-Lee 零点分布的 Lee-Yang 单位圆定理;在简要介绍重整化群方法的基础上,导出类金刚石型等级晶格上 Potts 模型的相变点集与 Julia 集之间的关系,从而明确重整化变换的复动力系统.

第 3 章介绍一维实迭代动力系统,主要是为讨论重整化变换临界轨道性态作理论准备.

第 4 章介绍当代复动力系统研究的重大成果之一——Sullivan 最终周期性定理和周期域分类定理;给出稳定域分支的基本拓扑学性质.

第 5 章介绍 Julia 集的几何性质,主要包括 Julia 集的 Hausdorff 维数、Hausdorff 测度等分形性质.

从第 6 章开始, 本书重点研究重整化变换的复动力系统.

第 6 章在介绍有理映照 J 稳定性、拟共形手术的基础上, 对其 Julia 集的连通性给出完备的刻画.

第 7 章介绍临界轨道与动力系统分类. 在讨论双曲、次双曲和几何有限有理映照的同时, 讨论 Julia 集的局部连通性; 阐述临界点的回归性态对动力系统的影响; 对重整化变换动力学的复杂性进行分类; 证明 Yang-Lee 零点与 Julia 集之间的关系.

第 8 章研究 Jordan 型稳定域的存在性. 证明重整化变换的多数稳定域为 Jordan 域; 对重整化变换的连通 Julia 集, 研究其局部连通性.

第 9 章研究有理映照族动力系统的分歧性质. 介绍 Mandelbrot 集的连通性和边界的复杂性; McMullen 关于 Mandelbrot 集存在的普遍性定理等; 关于重整化变换, 考虑类 Mandelbrot 集, 介绍关于其连通性的研究成果.

第 10 章研究热力学函数在临界点处的奇异性质. 将自由能量的定义从实轴延拓到复平面; 讨论其在稳定周期域边界上的边值性态; 在介绍动力系统中的 Bowen-Ruelle-Sinai 热力学方法的基础上, 讨论自由能量的复临界指数.

值得一提的是, 重整化变换复动力学的研究涉及当代复动力系统研究的很多方面. 但是, 这里不可能也没有必要包罗万象地详述各个方向的重要成果. 本书遵循的一个原则是: 重整化变换的动力学这条主线涉及到什么理论, 我们就阐述什么理论. 当然, 在避免遮蔽“主线”发展方向的同时, 我们将尽可能保证复动力系统基本理论和基本方法的系统性. 比如, 关于 Riemann 曲面、拟共形映照、类多项式、 J 稳定性、全纯运动、遍历理论等重要内容, 本书虽然没有单辟篇章介绍, 但在应用于重整化变换时, 仍然保持了相关基本内容的严密性和完整性. 尽管如此, 复动力系统中许多内容, 甚至是非常重要的内容, 这里仍然没能介绍. 关于重整化变换复动力学的研究也仅是作者的一孔之见. 希望本书能够抛砖引玉, 引起更多的学者关心物理学等学科中复动力学方法的研究和应用. 书中不当之处, 敬请批评指正.

在本书写作过程中, 作者得到中国科学院杨乐院士和于渌院士的大力支持和帮助. 作者的多位学术同行帮助审阅书稿, 提出了宝贵的意见. 在这里作者向他们致以诚挚的谢意. 最后, 作者对国家自然科学基金委员会国家杰出青年科学基金项目和国家科技部“973”项目的资助表示衷心感谢!

乔建永

2009 年 8 月

目 录

第 1 章	Fatou-Julia 理论	1
1.1	Fatou 集和 Julia 集	1
1.2	周期点附近的动力学性态	4
1.3	斥性周期点的稠密性与齐性定理	10
第 2 章	Yang-Lee 零点与重整化变换	14
2.1	Ising 模型与 Potts 模型	14
2.2	Lee-Yang 单位圆定理	18
2.3	重整化变换	23
2.4	Yang-Lee 零点的 Julia 集	27
第 3 章	一维实映照的周期轨道	28
3.1	Sarkovskii 定理	28
3.2	分支理论	33
3.3	临界点与吸性周期轨道	44
3.4	符号动力系统方法	45
第 4 章	Fatou 集上的动力学	50
4.1	基本性质	50
4.2	Fatou 分支的周期循环	52
4.3	Fatou 分支的最终周期性	58
4.4	周期域与临界点	66
4.5	Fatou 分支的连通数	70
第 5 章	Julia 集的 Hausdorff 维数与面积	76
5.1	Hausdorff 维数与分形测度	76
5.2	Julia 集的 Hausdorff 维数	81
5.3	多项式映照的 Julia 集	93
5.4	Julia 集的面积	99

第 6 章 重整化变换的全纯族	101
6.1 有理映照的 J 稳定性	101
6.2 拟共形手术	107
6.3 重整化变换的临界轨道	109
6.4 重整化变换 Julia 集的连通性	118
第 7 章 临界轨道与动力系统分类	133
7.1 双曲有理映照和次双曲有理映照	133
7.2 几何有限的有理映照	137
7.3 Julia 集的局部连通性	146
7.4 临界点的回归性态	149
7.5 重整化变换动力学的复杂性	163
7.6 Yang-Lee 零点与 Julia 集	171
第 8 章 Jordan 型稳定域	173
8.1 Fatou 分支的边界	173
8.2 重整化变换 Julia 集的局部连通性	185
8.3 重整化变换的 Fatou 分支	191
8.4 Julia 集的渐近状态	207
第 9 章 Mandelbrot 集	209
9.1 二次多项式的 Mandelbrot 集	209
9.2 有理映照全纯族的分歧轨迹	214
9.3 重整化变换的 Mandelbrot 集	223
第 10 章 自由能量的临界指数	240
10.1 Fatou 集上的自由能量	240
10.2 自由能量的边值性态	245
10.3 临界指数	246
参考文献	255
《纯粹数学与应用数学专著》丛书已出版书目	269

第 1 章 Fatou-Julia 理论

1906 年, Fatou^[1] 研究 Riemann 球面上有理映照迭代轨道的性态. 1919 年前后, Fatou^[2] 和 Julia^[1] 各自独立地对有理映照的迭代动力系统进行了更为深入系统的研究, 形成了复动力系统的基础 —— Fatou-Julia 理论. 本章将简要介绍 Fatou-Julia 理论的主要内容.

1.1 Fatou 集和 Julia 集

1.1.1 基本定义

设 R 为 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 到自身的有理映照, 以下恒设其次数 $\deg R \geq 2$. 任取一点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, 称序列

$$z_0 = R^0(z_0), z_1 = R^1(z_0), z_2 = R^2(z_0), \dots, z_n = R^n(z_0), \dots$$

为 R 在点 z_0 的轨道或正向轨道, 其中 R^n 表示 n 个 R 的复合映照. 为简便计, 把 R 在 z_0 的正向轨道记为 $O_R^+(z_0)$ 或 $O^+(z_0)$. 一般而言, 对于不同的初始点 z_0 , $O_R^+(z_0)$ 的性态是千差万别的. 为了对迭代轨道的复杂性加以区分和刻画, 以下首先引进解析函数正规族的概念.

定义 1.1 设 D 为 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的一个区域, \mathcal{F} 为区域 D 上的一族解析函数. 如果对于 \mathcal{F} 中任一无穷序列 $\{f_n\}$, 总存在其子序列 $\{f_{n_j}\}$, 在 D 内任一有界闭域上一致收敛到极限函数 (这个极限函数的值可以为无穷), 则称 \mathcal{F} 是 D 上的正规族.

下述定理在正规族理论中称为 Montel^[1] 定则, 它的美妙之处在于把解析函数族的正规性同解析函数族的取值情况联系起来. Montel 定则是 Fatou-Julia 理论的重要工具之一.

定理 1.1 设 \mathcal{F} 是区域 D 到 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的解析映照族, 如果 \mathcal{F} 中每个映照 f 均不取三个固定点 $p_1, p_2, p_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, 那么 \mathcal{F} 必为正规族.

在复动力系统理论中, 区分和描述迭代轨道复杂性的基本概念是 Fatou 集和 Julia 集, 以下给出它们的定义.

定义 1.2 设 R 为 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的有理映照, 其次数 $\deg R \geq 2$, 如果迭代序列 $\{R^n\}$ 在一点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ 的某个邻域内为正规族, 则称 z_0 为 $\{R^n\}$ 的正规点,

把 $\{R^n\}$ 的正规点集称为 Fatou 集, 记为 $F(R)$. Fatou 集的余集称为 Julia 集, 记为 $J(R)$.

从上述定义可见, Fatou 集是开集, 而 Julia 集是闭集 (参见图 1-1). 由定义 1.1 易见, 在 Fatou 集上迭代轨道具有较好的稳定性, 而在 Julia 集上迭代轨道的稳定性较差. 因此, 人们常常把 Fatou 集称为复动力系统的稳定集. 给定一个 Fatou 集, 显然, 它由若干个连通分支组成. 把 Fatou 集的每个分支称为 Fatou 分支. 下述结论是明显的, 称为 Fatou 集和 Julia 集的完全不变性.

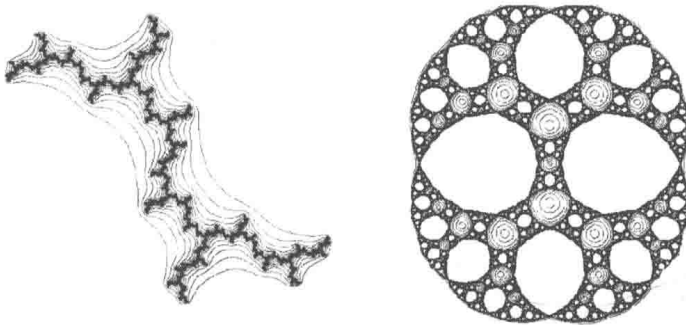


图 1-1 $J(z^2 + i)$ 和 $J(\frac{1}{4}(z + \frac{1}{z})^2)$ 的计算机模拟图

定理 1.2 $R(F(R)) = R^{-1}(F(R)) = F(R), R(J(R)) = R^{-1}(J(R)) = J(R)$, 这里 R^{-1} 表示 R 的逆映照.

1.1.2 周期轨道

一般而言, 有理映照 R 的正向迭代轨道 $O_R^+(z_0)$ 是一个无穷序列, 其复杂性是复动力系统理论所要解决的中心问题之一. 然而, 对于特定的初始点 z_0 , 当 $O_R^+(z_0)$ 为有穷点集时, 这个轨道更加值得关注.

定义 1.3 若存在自然数 p , 使得 $R^p(z_0) = z_0$, 则称 z_0 为 R 的周期点. 把具有上述性质的最小的自然数 p 称为 z_0 的周期, 称 z_0 为 p 阶周期点. 这时, $O_R^+(z_0) = \{z_0, z_1 = R(z_0), \dots, z_{p-1} = R^{p-1}(z_0)\}$ 称为一条周期轨道, 或周期循环. 特别地, 当 $p = 1$ 时, 称 z_0 为 R 的一个不动点.

定义 1.4 设 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ 为有理映照 R 的周期为 p 的周期点. $\lambda = (R^p)'(z_0)$ 称为 z_0 的特征值. 进一步, 若 $0 < |\lambda| < 1$, 则称 z_0 为吸性周期点; 若 $\lambda = 0$, 则称 z_0 为超吸性周期点; 若 $|\lambda| > 1$, 则称 z_0 为斥性周期点; 若 $|\lambda| = 1$, 则称 z_0 为中性周期点. 对于中性周期点的情况, 易见, 存在 $\theta \in [0, 1)$, 使得 $\lambda = e^{i2\pi\theta}$, 若 θ 为有理数, 则称 z_0 为有理中性周期点; 若 θ 为无理数, 则称 z_0 为无理中性周期点.

注 同一条周期轨道上的不同周期点具有相同的特征值. 设 M 为 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的非退化 Möbius 变换 (即次数为 1 的有理映照), 对于有理映照 R , 称 $M^{-1} \circ R \circ M$ 为

R 的共轭映照, 其中符号“ \circ ”表示映照的复合. 如果 z_0 为 R 的 p 阶周期点, 易验证 $M^{-1}(z_0)$ 也为 $M^{-1} \circ R \circ M$ 的 p 阶周期点, 且对应的特征值相等. 在定义 1.4 中, 当 $z_0 = \infty$ 时, 特征值 λ 的计算事实上正是借助共轭变换 $M(z) = \frac{1}{z}$ 来完成的.

定理 1.3 吸性和超吸性周期点属于 Fatou 集, 斥性周期点属于 Julia 集.

证明 设 z_0 为 R 的 p 阶吸性或超吸性周期点, 故 $|\lambda| = |(R^p)'(z_0)| < 1$. 从而存在 z_0 的邻域 D , 使得 $R^p(D) \subset D$, 所以, $\{R^n\}$ 在 D 上仅取 $D, R(D), R^2(D), \dots, R^{p-1}(D)$ 上的值, 由定理 1.1, $\{R^n\}$ 在 D 上正规, 故 $z_0 \in F(R)$. 如果 z_0 为 R 的 p 阶斥性周期点, 那么 $|\lambda| = |(R^p)'(z_0)| > 1$. 假设 $z_0 \in F(R)$, 则存在 z_0 的邻域 D 以及子序列 $\{R^{pn_j}\}$, 使得它在 D 内局部一致收敛于一个解析映照 f , 显然 $f(z_0) = z_0$. 此时, $(R^{pn_j})'(z_0) \rightarrow f'(z_0) (j \rightarrow \infty)$, 但是 $(R^{pn_j})'(z_0) = \lambda^{n_j} \rightarrow \infty$, 矛盾. 证毕.

1.1.3 基本性质

定理 1.4 设 R 是次数 $\deg R \geq 2$ 的有理映照, 则 $J(R) \neq \emptyset$.

证明 假设 $J(R) = \emptyset$, 则 $\{R^n\}$ 在 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上正规. 故存在子序列 $\{R^{n_j}\}$, 使得其在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上一致收敛于解析映照 f . 易见 f 必为有理映照, 且 f 不为常值映照. 由于 j 充分大时, R^{n_j} 必与 f 具有相同个数的零点 (考虑重数), 所以 $\deg R^{n_j} = \deg f$. 另一方面, $\deg R^{n_j} = (\deg R)^{n_j} \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$, 此为矛盾. 证毕.

定理 1.5 对于任意自然数 p , $F(R^p) = F(R)$.

证明 首先, 任取 $z \in F(R)$, $\{R^n\}$ 在 z 点正规, 所以作为 $\{R^n\}$ 子序列的 $\{R^{pn}\}$ 一定也在 z 点正规, 这说明 $z \in F(R^p)$, 故 $F(R) \subset F(R^p)$. 另一方面, 任取 $z \in F(R^p)$, 考虑 p 个子序列

$$\{R^{pn}\}, \{R^{pn+1}\}, \{R^{pn+2}\}, \dots, \{R^{pn+p-1}\}.$$

对于 $\{R^n\}$ 的任一子序列, 易见它必有一无穷子序列包含于某个序列 $\{R^{pn+k}\} (0 \leq k \leq p-1)$ 中. 由于 $R^{pn+k} = R^k \circ R^{pn}$, 故 $\{R^n\}$ 在 z 点也正规, 即 $z \in F(R)$. 这说明 $F(R^p) \subset F(R)$. 证毕.

任取 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, 若序列 $\{z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots, z_{-n}, \dots\}$ 满足 $R(z_{-n}) = z_{-n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则称该序列为 R 在 z_0 点的一条逆向轨道. 若 R 在 z_0 点的所有逆向轨道点集 $O_R^-(z_0)$ 是一个有限集, 则称 z_0 为例外点. 把 R 的例外点集记为 E_R , 易见 E_R 是一个完全不变的集合, 即 $E_R = R(E_R) = R^{-1}(E_R)$.

定理 1.6 E_R 至多由两个点组成, 每个点均为超吸性周期点.

证明 任取 $a \in E_R$, 定义 $B_n = \bigcup_{j \geq n} R^{-j}(a)$, 易见 $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$, 且 $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$. 由于 $a \in E_R$, 故存在自然数 m , 使得 $B_m = B_{m+1}$. 这说明 B_m 是完全不变的, 即 $R^{-1}(B_m) = R(B_m) = B_m$. 所以, B_m 是一条周期轨道, 且

$a \in B_m$. 这样, $R^{-1}(a)$ 只有一个点, 从而 a 是 R 的超吸性周期点. 故 $E_R \subset F(R)$. 注意, E_R 是完全不变的, 进一步, 由定理 1.4 及定理 1.1 知, E_R 至多包含两个点. 证毕.

定理 1.7 任取 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R$, R 的逆向轨道 $O_R^-(z_0)$ 的极限点集必包含 Julia 集 $J(R)$. 进一步, 若 $z_0 \in J(R)$, 则必有 $\overline{O_R^-(z_0)} = J(R)$.

证明 任取一点 $z \in J(R)$ 及 z 的小邻域 D_0 , 记 $D = \bigcup_{j=0}^{\infty} R^j(D_0)$, 显然 $R(D) \subset D$, 所以 $R^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$. 由定理 1.1, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ 至多包含两个点. 这说明 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ 上任一点的逆向轨道有限, 从而 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D \subset E_R$, 所以有 $D \supset \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R$. 因为 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R$, 所以 $z_0 \in D$, 故存在 $z_1 \in D_0$ 及自然数 j , 使得 $R^j(z_1) = z_0$, 即 $z_1 \in O_R^-(z_0)$. 这就证明了 z 点为 $O_R^-(z_0)$ 的极限点. 所以, $O_R^-(z_0)$ 的极限点集包含 $J(R)$. 进一步, 若 $z_0 \in J(R)$, 则由 $J(R)$ 的完全不变性知 $O_R^-(z_0) \subset J(R)$, 故 $\overline{O_R^-(z_0)} = J(R)$. 证毕.

定理 1.8 $J(R)$ 是完全集, 即 $J(R)$ 不含孤立点.

证明 由 Julia 集的非空性、完全不变性和定理 1.6 知, $J(R)$ 是一个无限集, 故至少有一个极限点. 由定理 1.7, $J(R)$ 上每个点均是极限点. 证毕.

定理 1.9 若 Julia 集 $J(R)$ 包含内点, 则 $J(R) = \widehat{\mathbb{C}}$.

证明 设 $z_0 \in J(R)$ 为 $J(R)$ 的内点, 则存在 z_0 的邻域 $D_0 \subset J(R)$. 任取 $a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R$, 则 z_0 是 $O_R^-(a)$ 的极限点, 故存在 $a_1 \in O_R^-(a)$, 使得 $a_1 \in D_0 \subset J(R)$. 由 $J(R)$ 的完全不变性, $a \in J(R)$. 这说明 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_R \subset J(R)$. 由于 $J(R)$ 是闭集, 故 $J(R) = \widehat{\mathbb{C}}$. 证毕.

定理 1.10 存在 $J(R)$ 的稠密的 G_δ 集的子集 J_1 , 使得任取 $z \in J_1$, z 的正向轨道 $O_R^+(z)$ 在 $J(R)$ 上稠密. 这里 G_δ 集意指可数多个开集的交集.

证明 取可数开集族 $\{C_j\}$, 它做成 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的拓扑基. 对任一同 $J(R)$ 相交的 C_j , $D_j = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{-n}(C_j)$ 是开集. 由定理 1.7, $D_j \cap J(R)$ 在 $J(R)$ 上稠密. 记 $G = \bigcap_j (D_j \cap J(R))$, 则 G 在 $J(R)$ 上稠密, 且为 G_δ 集. 任取 $z \in G$, $O_R^+(z)$ 必与每个 D_j 相交, 故 $O_R^+(z)$ 在 $J(R)$ 上稠密. 证毕.

1.2 周期点附近的动力学性态

解析映照在周期点附近的迭代性态的研究起源于 1884 年 Koenigs^[1] 的工作、1897 年 Leau^[1] 的工作和 1903 年 Böttcher^[1] 的工作. 如果 z_0 是有理映照 R 的一个 p 阶周期点, 易见, 可以通过一个 Möbius 变换将 R^p 共轭于一个以 0 为不动点的有理映照 f , 且在 $z = 0$ 附近 f 具有如下展开式:

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad (1.1)$$

以下研究 f 在 0 点的局部迭代动力学性质.

1.2.1 关于吸性不动点的 Koenigs 定理

1884 年, Koenigs^[1] 证明了下述局部线性化定理.

定理 1.11 设 f 由 (1.1) 式表示, $0 < |\lambda| < 1$, 则存在 $z = 0$ 的一个邻域 U 及唯一一个共形映照 $\varphi: U \rightarrow \Delta_r = \{z \mid |z| < r\}$, 使得 $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$, 且满足 Schröder 方程:

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \varphi(z).$$

证明 考虑辅助函数 $\varphi_n(z) = \frac{1}{\lambda^n} f^n(z)$, 它定义在 $z = 0$ 附近. 首先证明 φ_n 在 $z = 0$ 某个邻域内一致收敛. 取常数 $c > 0$ 使得 $c^2 < |\lambda| < c < 1$, 再取 $z = 0$ 的一个小邻域 $D_0 = \{z \mid |z| < \delta\}$, 只要 $\delta > 0$ 充分小, 易见, 可使 $z \in D_0$ 时有 $|f(z)| < c|z|$, 故 $f(D_0) \subset D_0$. 所以, 对任意自然数 n , 有

$$|f^n(z)| < c^n |z| < \delta c^n.$$

又由 (1.1) 可见, 当 δ 充分小时, 存在常数 $K > 0$, 使得 $z \in D_0$ 时有

$$|f(z) - \lambda z| < K|z|^2,$$

故 $z \in D_0$ 时,

$$|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| < K|f^n(z)|^2 < K\delta^2 c^{2n}.$$

从而 $z \in D_0$ 时,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| &= \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} |f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \\ &< \frac{K\delta^2}{|\lambda|} \left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n. \end{aligned}$$

由 $\frac{c^2}{|\lambda|} < 1$ 知, φ_n 在 D_0 内是一致收敛的 Cauchy 序列. 记 φ_n 的极限函数为 φ , 取 $U = \varphi^{-1}(\Delta_r)$, 其中 Δ_r 为充分小的圆盘, 使得 φ^{-1} 在其上为共形映照. 易见 $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$ 且满足 Schröder 方程. φ 的唯一性是显然的. 证毕.

1.2.2 关于超吸性周期点的 Böttcher 定理

1903 年, Böttcher^[1] 研究了解析映照在超吸性不动点附近的局部动力学性态. 不妨设解析映照 f 以 $z = 0$ 为超吸性不动点, 即 f 在 $z = 0$ 附近具有如下展开式:

$$f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \cdots, \quad k \geq 2. \quad (1.2)$$

Böttcher 证明了如下定理:

定理 1.12 设 f 由 (1.2) 式表示, 则存在 $z=0$ 的一个邻域 U 和唯一一个共形映照 $\varphi: U \rightarrow \Delta_r$ ($0 < r < 1$), 使得 $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$, 且满足 Böttcher 方程

$$\varphi \circ f(z) = \varphi(z)^k.$$

证明 取 $z=0$ 的邻域 $D_0 = \{z \mid |z| < \delta\}$ 充分小, 使得 $f(\overline{D_0}) \subset D_0$, 且 f 在 D_0 内仅以 $z=0$ 为零点. 由此可见, f 在 D_0 内的映照度为 k , f^n 在 D_0 内的映照度为 k^n . 所以, 可以取定 $(f^n(z))^{1/k^n}$ 的一个分支, 记为 φ_n , 它是 D_0 上的单值解析映照, $\varphi_n(0) = 0, \varphi_n'(0) = 1$. 下证 φ_n 在 D_0 内一致收敛. 考虑

$$h_n(z) = \log_+ |\varphi_n(z)| = \frac{1}{k^n} \log_+ |f^n(z)|,$$

这里 $\log_+ x = \max(\log x, 0)$. 当 D_0 充分小时, 对于 $z \in D_0$ 有

$$\left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = |1 + a_{k+1}z + \cdots| < 2,$$

且 $f^n(\overline{D_0}) \subset D_0$, 所以有

$$\begin{aligned} h_n(z) &\leq \sum_{j=0}^n \frac{1}{k^{j+1}} \log_+ \left| \frac{f(f^j(z))}{(f^j(z))^k} \right| + \log_+ |z| \\ &\leq \log 2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k^{j+1}} < \infty. \end{aligned}$$

这说明 $|\varphi_n(z)|$ 在 D_0 上一致有界, 故 $\{\varphi_n(z)\}$ 为 D_0 上的正规族. 任取 $\{\varphi_n\}$ 的一个收敛子序列 $\{\varphi_{n_j}\}$, 由于

$$\left| \varphi_{n_j} \circ f(z) - (\varphi_{n_j}(z))^k \right| = |\varphi_{n_j}(z)|^k \left| 1 - \left[\frac{f(f^{n_j}(z))}{(f^{n_j}(z))^k} \right]^{\frac{1}{k^{n_j}}} \right|,$$

且在 D_0 内 $\frac{f(z)}{z^k} \rightarrow 1$ ($z \rightarrow 0$), $f^n(z) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $|\varphi_n(z)|$ 一致有界, 故

$$|\varphi_{n_j} \circ f(z) - \varphi_{n_j}(z)^k| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

这说明 $\{\varphi_{n_j}\}$ 的极限函数满足 Böttcher 方程. 将 (1.2) 代入 Böttcher 方程, 比较两边系数即可导出极限函数的唯一性. 故 $\{\varphi_n\}$ 在 D_0 上一致收敛于极限函数 φ . 证毕.

1.2.3 关于有理中性不动点的 Leau-Fatou 花瓣定理

首先考虑一种特殊情况, f 为具有下述表示的解析映照:

$$f(z) = z + az^{k+1} + O(|z|^{k+2}), \quad (1.3)$$

这里 $a \neq 0, k \geq 1$. 这时 f 以 $z = 0$ 为不动点, 且 $\lambda = f'(0) = 1$. 因此, f 在 $z = 0$ 的充分小的邻域 D_0 内是单叶的. 记 $\zeta = h(z) = -\frac{1}{kaz^k}$, 那么 $z = h^{-1}(\zeta)$ 便为 ∞ 邻域 $D_R = \{\zeta \mid |\zeta| > R\}$ 内的 k 值解析函数. 定义 $g(\zeta) = h \circ f \circ h^{-1}(\zeta)$, 则 g 也为 D_R 内的 k 值解析函数. 取实数 x_0 充分大, 及 $\theta_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, 记

$$S = S(x_0, \theta_0) = \{z = x_0 + re^{i\theta} \mid r > 0, -\theta_0 < \theta < \theta_0\}.$$

只要 x_0 充分大, 可使 $S \subset D_R$. 因此, h^{-1} 在 S 上可分解为 k 个单值解析分支 $h_j^{-1} (j = 1, 2, \dots, k)$. 记 $L_j = h_j^{-1}(S)$, 它们是 k 个互不相交的单连通区域, 以原点 $h_j^{-1}(\infty) = 0$ 为公共边界点, 每个区域 L_j 关于某条射线 $\arg z = \omega_j$ 对称, 在原点的张角为 $\frac{2\theta_0}{k}$, $\omega_{j+1} - \omega_j = \frac{2\pi}{k} (j = 1, 2, \dots, k-1)$, $\omega_1 - \omega_k = \frac{2\pi}{k}$. 在 L_j 内 h 是一个共形映照. f 在 L_j 内共形共轭于 S 内的解析映照 $g_j(\zeta) = h \circ f \circ h_j^{-1}(\zeta)$. 易见 $g_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 是 g 在 S 内的 k 个单值解析分支. 进一步,

$$\begin{aligned} g_j(\zeta) &= h \circ f \circ h_j^{-1}(\zeta) \\ &= -\frac{1}{kaz^k} (1 + az^k + O(|z|^{k+1}))^{-k} \\ &= \zeta (1 - kaz^k + O(|z|^{k+1})) \\ &= \zeta + 1 + O\left(\frac{1}{|\zeta|^{\frac{1}{k}}}\right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

由于

$$g_j(\bar{S}) \subset S \cup \{\infty\} \text{ 且 } g_j^n(\zeta) \rightarrow \infty (\zeta \in S, n \rightarrow \infty),$$

易见, $f(\bar{L}_j) \subset L_j \cup \{0\}$, $f^n(z) \rightarrow 0$ 且 $\arg f^n(z) \rightarrow \omega_j (z \in L_j, n \rightarrow \infty)$. 称 L_j 为 f 在不动点 $z = 0$ 处的一个吸性花瓣. 这 k 个吸性花瓣 $L_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 均匀排列在不动点 $z = 0$ 周围, 相邻两个花瓣 L_j 和 L_{j+1} 在 $z = 0$ 点的夹角为 $2(\pi - \theta_0)/k$. 如果将 S 取为顶点在 x_0 , 开口向左的抛物线右边的区域, 则可以构造一组在不动点处两两相切的花瓣.

注意到以上讨论的全是 f 在不动点 $z = 0$ 处的局部性态, 这种讨论可以完全移植到 f 在 $z = 0$ 处的逆映照 f^{-1} 上. 由 $f^{-1}(z) = z - az^{k+1} + O(|z|^{k+2}) (|z| \rightarrow 0)$ 可知, f^{-1} 在不动点 $z = 0$ 处也有 k 个吸性花瓣 $L'_j (j = 1, 2, \dots, k)$, 每个 L'_j 在 $z = 0$ 处的张角也为 $\frac{2\theta_0}{k}$, 且位于两个相邻的 L_j 和 L_{j+1} 的正中间. 在 L'_j 上,

$$f^{-1}(\bar{L}'_j) \subset \bar{L}'_j \cup \{0\} \text{ 且 } f^{-n}(z) \rightarrow 0 (z \in L'_j, n \rightarrow \infty).$$

称 L'_j 为 f 的一个斥性花瓣. 易见 $\bigcup_{j=1}^k (L_j \cup L'_j) \cup \{0\}$ 是不动点 $z = 0$ 的一个邻域.

以下给出 Leau-Fatou 花瓣定理.

定理 1.13 设 f 由 (1.3) 表示, 任给 $\alpha \in [\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k})$, 则存在 $2k$ 个单连通区域 L_j 与 L'_j ($j = 1, 2, \dots, k$), 它们以不动点 $z = 0$ 为公共边界, 在 0 点具有张角 α , 围绕 $z = 0$ 交替排列, 且存在共形映照 $\varphi_j : L_j \rightarrow S, \varphi_j^* : L'_j \rightarrow S, \varphi_j(0) = \varphi_j^*(0) = \infty$ ($j = 1, 2, \dots, k$), 使得在 L_j 内, $\varphi_j \circ f(z) = \varphi_j(z) + 1$; 在 L'_j 内, $\varphi_j^* \circ f(z) = \varphi_j^*(z) - 1$.

证明 首先取 $S = S(x_0, \frac{\pi}{2}) = \{z | \operatorname{Re} z > x_0\}$, 记之为 S_{x_0} . 由 (1.4) 知, 存在常数 $C > 0$, 使得映照 $g_j : S_{x_0} \rightarrow S_{x_0}$ 满足

$$\operatorname{Re}(g_j(\zeta)) > \operatorname{Re}(\zeta) + \frac{1}{2}, \quad (1.5)$$

且

$$|g_j(\zeta) - \zeta - 1| \leq \frac{C}{|\zeta|^{\frac{1}{k}}}. \quad (1.6)$$

固定一点 $\hat{\zeta} \in S_{x_0}$, 定义

$$\beta_n(\zeta) = g_j^n(\zeta) - g_j^n(\hat{\zeta}).$$

以下证明: 在 S_{x_0} 上, $\{\beta_n(\zeta)\}$ 局部一致收敛于单叶解析映照 β , 且满足 Abel 方程:

$$\beta(g_j(\zeta)) = \beta(\zeta) + 1. \quad (1.7)$$

首先注意, 当 $\zeta \in S_{2x_0}$ 且 ζ 趋于 ∞ 时, $g_j'(\zeta)$ 趋于 1 . 任取 $r > x_0, z \in S_{2r}$, 由 (1.6) 知, 映照 $g_j(\zeta) - \zeta - 1$ 把圆盘 $\{\zeta | |\zeta - z| < r\}$ 解析地映入圆盘 $\{\zeta | |\zeta| < \frac{C}{r^{1+\frac{1}{k}}}\}$, 由 Schwarz 引理易见

$$|g_j'(z) - 1| < \frac{C}{r^{1+\frac{1}{k}}}. \quad (1.8)$$

在 S_{2r} 上任取两点 ζ' 和 ζ'' , 由于

$$\frac{1}{\zeta'' - \zeta'} \int_{\zeta' \zeta''} [g_j'(z) - 1] dz = \frac{g_j(\zeta'') - g_j(\zeta')}{\zeta'' - \zeta'} - 1,$$

故由 (1.8) 知

$$\left| \frac{g_j(\zeta'') - g_j(\zeta')}{\zeta'' - \zeta'} - 1 \right| \leq \frac{C}{r^{1+\frac{1}{k}}}.$$

由 (1.5), $\operatorname{Re}(g_j^n(\zeta)) > \frac{n}{2}$, 故适当选取常数 C' , 可得

$$\left| \frac{\beta_n(\zeta)}{\beta_{n-1}(\zeta)} - 1 \right| \leq \frac{C'}{n^{1+\frac{1}{k}}}, \quad (1.9)$$

特别地

$$1 - \frac{C'}{n^{1+\frac{1}{k}}} \leq \left| \frac{\beta_n(\zeta)}{\beta_{n-1}(\zeta)} \right| \leq 1 + \frac{C'}{n^{1+\frac{1}{k}}}. \quad (1.10)$$

由此可得

$$|\beta_{n-1}(\zeta)| \leq |\zeta - \hat{\zeta}| \prod_{m \geq 1} \left(1 + \frac{C'}{m^{1+\frac{1}{k}}}\right).$$

由此及 (1.9) 有

$$|\beta_n(\zeta) - \beta_{n-1}(\zeta)| \leq \frac{C'|\zeta - \hat{\zeta}|}{n^{1+\frac{1}{k}}} \prod_{m \geq 1} \left(1 + \frac{C'}{m^{1+\frac{1}{k}}}\right).$$

这说明无穷级数

$$\beta_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n(\zeta) - \beta_{n-1}(\zeta))$$

绝对收敛, 从而 $\{\beta_n(\zeta)\}$ 在 S_{2x_0} 上收敛于某一极限函数 β . 进一步, 由于 $\beta_n(\zeta)/\beta_0(\zeta)$ 在 S_{2x_0} 上一致收敛于 $\beta(\zeta)/\beta_0(\zeta)$, 故 β 为解析映照. 取 $m_0 > 0$ 充分大, 使得

$$\prod_{m \geq m_0} \left(1 - \frac{C'}{m^{1+\frac{1}{k}}}\right) > 0.$$

由于 $g_j^{m_0}$ 是单叶映照, 而 $\beta_n(\hat{\zeta}) = 0$, 由 (1.10) 可见, β 不恒为常数. 由 Hurwitz 定理, β 在 S_{2x_0} 上也单叶. 注意, g_j 的若干次迭代映照将 S_{x_0} 映入 S_{2x_0} , 故不难将 β 延拓为 S_{x_0} 上的单叶解析映照.

由于

$$\beta_n \circ g_j(\zeta) = \beta_{n+1}(\zeta) + g_j(g_j^n(\zeta)) - g_j^n(\zeta).$$

又由 (1.6) 知

$$g_j(g_j^n(\zeta)) - g_j^n(\zeta) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

故 (1.7) 式成立.

对于 $L_j = L_j(\theta_0)$, 如果 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, 定义 $\varphi_j(z) = \beta(h(z))$, 由 (1.7) 便可导出定理中结论. 如果 $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 易见 $L_j(\theta_0) \supset L_j(\frac{\pi}{2})$, 且任取一点 $z \in L_j(\theta_0)$, 存在自然数 m , 使得 $f^m(z) \in L_j(\frac{\pi}{2})$, 此时, 将 $\varphi_j(z)$ 定义为 $\varphi_j(f^m(z)) - m$, 仍可导出 f 满足定理所述的 Abel 方程. 用 f^{-1} 代替 f , 完全同上面一样讨论, 可进一步导出 f 在 L_j 上满足定理所述的 Abel 方程. 证毕.

现在考虑较为一般的情况, 设 f 为具有 (1.1) 式表示的解析映照, 其中 $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, $\theta = \frac{p}{q}$, p 和 q 为互素的自然数. 这时,

$$f^q(z) = z + bz^{k+1} + O(|z|^{k+2}), \quad |z| \rightarrow 0.$$

由定理 1.13, f^q 在不动点 $z = 0$ 处有 k 个吸性花瓣 L_j ($j = 1, 2, \dots, k$). 取 L_j 充分小, 可使每个 f^i ($1 \leq i < q$) 在 L_j 上共形. 固定某个 L_{j_1} , 考虑 $f^i(L_{j_1})$, 它近似于