



普通高等教育车辆工程专业规划教材

汽车有限元法

(第3版)

Qiche Youxianyuanfa

谭继锦 主编



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

普通

专业规划教材

汽车有限元法

(第3版)

谭继锦 主编



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本书是普通高等教育车辆工程专业规划教材,主要内容包括有限元方法的力学基础理论,以及连续体、杆系、板壳、动力学和非线性等问题的有限元法;阐述了汽车结构有限元分析内容、分析方法、建模原则、模型验证及结果评价等。结合产品研发实际,本书介绍了 20 余个案例,内容包括强度、刚度、模态、疲劳、碰撞与优化设计等。

本书可作为车辆工程、汽车服务工程等汽车类专业本科生教材使用,亦可供汽车设计等从事汽车类工作的科研人员与相关兴趣爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

汽车有限元法/谭继锦主编.—3 版.—北京:
人民交通出版社股份有限公司,2018.8

ISBN 978-7-114-14797-5

I. ①汽… II. ①谭… III. ①有限元法—应用—汽车
—构造分析—高等学校—教材 IV. ①U463

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 124335 号

书 名: 汽车有限元法(第 3 版)

著 作 者: 谭继锦

责任编辑: 李 良

责任校对: 尹 静

责任印制: 张 凯

出版发行: 人民交通出版社股份有限公司

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010)59757973

总 经 销: 人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京市密东印刷有限公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 14.5

字 数: 364 千

版 次: 2005 年 1 月 第 1 版

2012 年 4 月 第 2 版

2018 年 8 月 第 3 版

印 次: 2018 年 8 月 第 3 版 第 1 次印刷 累计第 5 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-14797-5

定 价: 36.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

普通高等教育车辆工程专业规划教材

编委会名单

编委会主任

龚金科(湖南大学)

编委会副主任(按姓名拼音顺序)

陈 南(东南大学)	方锡邦(合肥工业大学)	过学迅(武汉理工大学)
刘晶郁(长安大学)	吴光强(同济大学)	于多年(吉林大学)

编委会委员(按姓名拼音顺序)

蔡红民(长安大学)	陈全世(清华大学)	陈 鑫(吉林大学)
杜爱民(同济大学)	冯崇毅(东南大学)	冯晋祥(山东交通学院)
郭应时(长安大学)	韩英淳(吉林大学)	何耀华(武汉理工大学)
胡 骅(武汉理工大学)	胡兴军(吉林大学)	黄韶炯(中国农业大学)
兰 巍(吉林大学)	宋 慧(武汉科技大学)	谭继锦(合肥工业大学)
王增才(山东大学)	阎 岩(青岛理工大学)	张德鹏(长安大学)
张志沛(长沙理工大学)	钟诗清(武汉理工大学)	周淑渊(泛亚汽车技术中心)

第3版前言

目前,中国汽车产业正面临着前所未有的挑战——环境法规的日益完善以及随之而来的成本提升与可持续发展的要求,市场多样化及竞争,产品创新及创造等。汽车工业作为国民经济的支柱产业,其影响与带动面广泛,研究领域深入。汽车已经成为我们生活中不可或缺的重要组成部分。新技术是汽车产业的驱动力,当前有限元方法的应用水平已经达到了新的高度。伴随着中国汽车产业的高速增长,有限元方法在汽车产品研发中也得到了普及。有限元方法不再仅仅是传统意义上的产品性能校核,更多的是产品开发人员将有限元方法、CAE 技术贯穿于产品研发的全过程,在汽车研发中 CAE 技术正起着巨大的作用。有限元方法及 CAE 技术的广泛应用,降低了开发费用,加快了开发进程,强化了产品质量,真正体现出现代设计理论与方法对产品研发的强力支撑。我们在与同行的广泛交流中,在与企业的精诚合作中,深深体会到汽车产品性能开发离不开有限元仿真技术。仿真驱动设计,并带来了产品性能的提升。

本书自 2005 年第 1 版出版至今已有 13 年时间,2012 年第 2 版做了章节与部分内容调整,使其更符合教学实践,期间重印多次。本书是同类教材中出版较早的一本。本书的再版,一方面得到了同行及市场的认可,另一方面,也是出版社多位编辑接力负责工作的成果。目前汽车有限元相关同类书刊较多,读者可参考的资料也非常之广,反映了汽车有限元技术的发展成熟与普及达到了新的高度。鉴于有限元方法理论完善、技术成熟、程序普及,原书整体架构没有变化。第 3 版合并了第八章与第九章部分内容,形成新的第八章。结合工程实践,增加了大量有限元分析案例,重新编写第九章,全部按照有限元分析报告格式,强化了案例解析。这些案例充分说明了有限元方法在汽车结构分析中的诸多方面应用,也是产品研发中的重要成果。本书倡导“教材与工程结合、与产品研发一致”的理念,树立“仿真引领设计、案例驱动实践”的能力导向目标。

本书由谭继锦主编并统稿,其中第九章由江淮汽车集团股份有限公司技术中心 CAE 设计部张雷总监负责撰写。本书在编写过程中得到江淮汽车公司技术中心 CAE 部同仁的大力支持。

限于作者认识水平有限,要想在无限的技术发展中理解有限元方法的真谛,需要我们共同努力,变有限为无限。

编者于合肥工业大学格物楼
二〇一八年三月

目 录

第一章 概论	1
第一节 有限元法概述	1
第二节 有限元法在汽车工程中的应用	3
练习题	7
第二章 有限元法的力学基础理论	8
第一节 概述	8
第二节 弹性力学基础	8
第三节 弹性小挠度薄板弯曲基本理论	18
第四节 动力学问题基本方程	22
第五节 塑性力学基础	23
练习题	26
第三章 连续体问题的有限元法	29
第一节 概述	29
第二节 平面三角形常应变单元位移模式	30
第三节 单元应变和应力	32
第四节 单元平衡方程与单元刚度矩阵	33
第五节 单元等效节点力	35
第六节 整体平衡方程与总刚度矩阵	37
第七节 边界条件处理	38
第八节 解题步骤与算例	39
第九节 计算结果分析	43
第十节 平面高阶单元	44
第十一节 等参数单元	52
第十二节 4 节点四面体常应变单元	59
第十三节 8 节点六面体单元	62
第十四节 20 节点六面体等参数单元	63
第十五节 空间轴对称问题的有限元法	67
练习题	69
第四章 杆梁结构的有限元法	71
第一节 概述	71
第二节 拉压直杆的有限元分析	71
第三节 梁的有限元分析	73
第四节 刚架的有限元分析	75
练习题	78
第五章 板壳问题的有限元法	80
第一节 概述	80

第二节	薄板矩形单元	81
第三节	薄板三角形单元	83
第四节	矩形平板壳单元	85
第五节	三角形平板壳单元	88
练习题		90
第六章	结构动力学问题的有限元法	92
第一节	动力学有限元分析的基本方程	93
第二节	结构的固有频率及振型	96
第三节	结构的动力响应	97
练习题		100
第七章	非线性问题的有限元法	102
第一节	非线性问题的基本算法	103
第二节	弹塑性增量有限元分析	106
第三节	几何非线性问题的有限元法	107
第四节	接触问题的有限元法	109
练习题		110
第八章	汽车结构有限元分析过程与指南	112
第一节	有限元软件介绍与使用	112
第二节	有限元分析的数据前处理	114
第三节	有限元问题的求解	122
第四节	有限元分析的数据后处理	123
第五节	有限元程序中的单元库和材料库	125
第六节	有限元程序中的单位制	126
第七节	有限元解的误差及模型检验与结果评价	127
第八节	汽车结构有限元建模	129
第九节	单元选用及网格划分标准	140
第十节	边界约束条件处理	143
第十一节	受力分析与载荷处理	144
第十二节	汽车结构分析流程与目标	147
练习题		153
第九章	汽车结构有限元分析案例	154
第一节	汽车结构强度分析	154
第二节	汽车结构刚度分析	175
第三节	汽车结构动态分析	183
第四节	汽车结构疲劳分析	192
第五节	汽车结构碰撞分析	199
第六节	汽车结构有限元优化设计	214
第七节	有限元法在汽车分析中的广泛应用	220
练习题		222
参考文献		223

第一章 概 论

主要介绍有限元法的基本概念与研究方法,即“结构离散—单元分析—整体求解”,概述有限元法在汽车工程中的应用,列举了若干图形实例。旨在使读者对有限元法及其在汽车工程中的应用有一个初步的了解。

第一节 有限元法概述

有限单元方法(Finite Element Method, FEM),简称有限元法,是以力学理论为基础,是力学、数学和计算机科学相结合的产物。有限元法诞生于20世纪中叶,随着计算机技术和计算方法的发展,已成为计算力学和计算工程科学领域里最为有效的计算方法,它几乎适用于求解所有连续介质和场的问题。经过不断的发展,尤其是近40年的发展,理论完善,方法成熟,程序普及,使得有限元法成为结构分析中最为成功和最为广泛的分析方法。使用有限元软件已经成功地解决了众多领域的大量科学和工程计算问题,取得了巨大的经济和社会效益。

有限单元分析(Finite Element Analysis, FEA),简称有限元分析,是具有更广泛意义的计算机辅助工程CAE(Computer Aided Engineering)的重要组成部分,事实上CAE的应用首先就是从有限元分析开始的。CAE技术是计算机技术和工程分析技术相结合形成的新兴技术。CAE软件是由计算力学、计算数学、结构动力学、数字仿真技术、工程管理学与计算机技术相结合,所形成的一种综合性、知识密集型信息产品。CAE的核心技术即为有限元技术与虚拟样机的运动/动力学仿真技术。运用CAE软件对工程和产品的运行性能与安全可靠性进行分析,对其运行状态进行模拟,及早地发现设计中的缺陷,并证实未来工程和产品功能和性能的可用性和可靠性。简单地说,CAE是指工程设计中的分析计算与分析仿真,具体包括工程数值分析、结构与过程优化设计、强度与寿命评估、运动/动力学仿真等。工程数值分析用来分析确定产品的性能;结构与过程优化设计用来保证产品功能、工艺过程的基础上,使产品、工艺过程的性能最优;结构强度与寿命评估用来评估产品的精度设计是否可行、可靠性如何以及使用寿命为多少;运动/动力学仿真用来对虚拟样机进行运动学仿真和动力学仿真。具体地说CAE包含如下方面。

(1) 运用有限元等技术分析结构的应力、变形等,实现结构从线性、静态计算到非线性、动态的分析;

(2) 运用过程优化设计的方法在满足工艺、设计的约束条件下,对产品的结构、工艺参数、结构形状参数等进行优化设计,使产品结构性能、工艺过程达到最优;

(3) 运用强度、刚度与疲劳分析理论,对结构的安全性、可靠性以及使用寿命作出评价;

(4) 运用运动/动力学理论与方法,对机构、整车进行运动/动力学仿真,给出机构、整车的运动轨迹、速度、加速度以及动反力的大小等。

这其中基于有限元技术的CAE软件,无论在数量、规模上,还是应用范围上都处于重要地位。作为数值分析的典型代表,有限元分析已经成为继汽车结构力学分析和汽车结构实验研

究之后的另一个重要手段,由此形成了现代汽车设计理论与方法。有限元分析不仅能够解决和验证传统的汽车结构问题,而且极大地扩大了结构分析的研究范围,成为解决汽车结构问题的新的主要手段。

用经典弹性力学等理论求解具体问题,从数学角度看就是求解高阶偏微分方程的边值问题。但由于物体几何形状、结构构造及外部荷载的复杂性,对于许多问题不能得到满足全域条件的解析解,为了解决复杂的工程问题,人们研究了各种数值方法,有限元法就是其中最重要的一种。

有限元法将连续体离散化为有限个单元集合而成,这些单元仅在有限个节点上相连接,亦即用有限个单元的离散体来代替原来具有无限个自由度的连续体,通过单元分析与集合,最后得到求解离散体运动状态的有限个代数方程。由于单元的分割和节点的配置非常灵活,它可适应于任意复杂的几何形状,处理不同的边界条件。单元有各种类型,包括线、面和实体或称为一维、二维和三维等类型单元。节点一般都在单元边界上,单元之间通过节点连接,并承受一定载荷,这样就组成了有限单元网格集合体(图 1-1)。在此基础上,对每一单元假设一个简单的位移函数来近似模拟其位移分布规律,通过虚位移原理求得每个单元的平衡方程,即是建立单元节点力和节点位移之间的关系。最后把所有单元的这种特性关系集合起来,就可建立整个物体的平衡方程组。考虑边界条件后解此方程组求得节点位移,并计算出各单元应力应变。

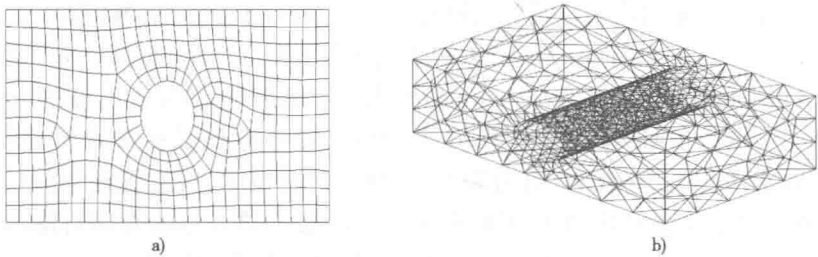


图 1-1 有限单元网格集合体

有限元法直接为产品设计服务,与工程应用密切相关。而且有限元法的物理概念十分清晰,容易被工程技术人员所理解。大型集成化通用软件的普及与推广,使我们不必自行编写软件,只要选择合适的软件计算即可。应用有限元法进行一般工程结构分析成为相对容易的技术工作。用户交互式地进行结构离散、定义载荷、施加约束,并可以动态地观看计算结果,实现了计算可视化。但是,为了正确地使用通用程序,做好数据前后处理工作,掌握分析方法,都需要对有限元基本理论有一定程度的理解。随着计算机辅助工程(CAE)溶入设计过程的进程加快,立足于设计前期的 CAE 技术,将有限元软件集成于 CAD 环境中,面向 CAD 软件的使用者,引导用户一步一步完成整个分析流程,形成产品分析、设计、制造一体化,这也是工业生产的的发展方向,有限元法在其中则起着重要的作用。

有限元法的基本思想是“分与合”,分是为了划分单元,进行单元分析;合则是为了集合单元,对整体结构进行综合分析。无论对什么样的结构,有限元分析过程都是类似的。其基本步骤包括如下方面。

- (1) 研究分析结构的特点,包括结构形状与边界、载荷工况等;
- (2) 将连续体划分成有限单元,形成计算模型,包括确定单元类型与边界条件、材料特性等;

(3)以单元节点位移作为未知量,选择适当的位移函数来表示单元中的位移,再用位移函数求单元中的应变,根据材料的物理关系,把单元中的应力也用位移函数表示出来,最后将作用在单元上的载荷转化成作用在单元上的等效节点力,建立单元等效节点力和节点位移的关系,这就是单元特性分析;

(4)利用结构力的平衡条件和边界条件把各个单元按原来的结构重新连接起来,集成整体的有限元方程,求解出节点位移。

对不同的结构,要采用不同的单元,但各种单元的分析方法又是一致的。按照这一思想,本书从最简单的平面结构入手,由浅入深,介绍有限元理论以及在汽车结构分析中的应用。

第二节 有限元法在汽车工程中的应用

随着大型有限元通用程序的推广与普及,计算机硬件技术的飞速发展,高校、企业和科研单位都广泛采用了有限元技术用于汽车设计分析中,取得了巨大的经济效益。由于有限元通用程序使用方便,计算精度高,其计算结果已成为汽车产品设计和性能分析的可靠依据。有限元分析已成为汽车设计中的重要环节,无论是在车型改造,还是在新车开发阶段,就产品中的强度、刚度、疲劳、振动、噪声及耐撞性能等问题进行计算分析,可以在很大程度上提高设计质量,缩短开发周期,节省开发费用,真正形成自主的产品开发能力。

汽车设计的直接目标就是安全、舒适、可靠、经济、环保、装载质量大和自重轻等,在这些研制工作中要解决的关键问题之一就是汽车强度与刚度问题。在保证具有必要的强度储备和满足一定的刚度标准条件下,既要保证其疲劳寿命,又要保证其装配和使用要求,同时最大限度地减轻汽车结构的质量。随着现代汽车向高速化和轻量化方向发展,振动和噪声控制日益成为汽车设计的一项关键技术。NVH(noise, vibration and harshness)控制技术,亦在汽车产品的研发中占据了重要位置。通过整车的动态特性分析以达到控制振动与噪声的目的。另外汽车结构还需要满足安全性、经济性、乘坐舒适性等指标的要求。现代设计理论和方法的建立,特别是其中的计算机辅助分析技术的运用使汽车结构的分析水平有了质的飞跃。基于有限元法的结构仿真分析已经涵盖了从零部件、总成到整车的所有重要系统和零部件。现代汽车工业对新车开发及其各个子系统的研制过程、研制方法和效能评估手段等都提出了更高的要求。整车及绝大多数的零部件设计都必须经过多方面的计算机仿真分析,否则不能通过设计审查。计算机数值模拟技术现在已不仅仅作为科学研究的一种手段,在生产实践中也已作为必要手段普遍应用。

汽车结构由多种材料组成,其部件形式各种各样,包括板、梁、轴、块等,通过铆接与焊接构成空间形状复杂的体系,不可能用传统的解析数学来描述。再有汽车所承受的载荷也十分复杂,包括自重、货物、乘员、设备等各种载荷的作用,同时也受到各种道路激励和各种车速条件下惯性力的作用以及各连接构件之间的相互约束作用,不可能用经典力学的方法来计算。在汽车结构分析中,有限元法由于其能解决结构形状和边界条件都任意的力学问题的独特优点而被广泛应用。各种汽车结构件都可应用有限元法进行静态分析、模态分析和动态分析。在当代汽车设计中,已从早期的静态分析为主转化为以动态分析为主,因为实际汽车强度更加依赖于汽车振动及随机载荷响应,只有通过结构动态分析,才能进一步提高汽车结构强度设计水平,汽车结构动态分析技术已经进入实用化阶段。在产品的不同开发阶段(概念设计阶段、详细设计阶段、样机制造阶段、产品测试评估阶段),都已得到广泛应用。在概念设计阶段,从最

初的总布置即可介入,如概略确定车身、发动机等总成的拓扑和结构参数;在详细设计阶段,对结构及零部件进行强度、刚度校核和优化设计,预先评估结构性能;在样车试制阶段,进行专项分析,如部件疲劳分析、整车碰撞计算等,解决设计中存在问题,将问题解决在产品投放市场之前,降低新产品开发风险。达到缩短开发时间、节省研制费用、减少投资风险的产品效益最大化的目标。汽车结构有限元分析的应用主要体现在以下方面。

(1) 整车、车身及零部件结构强度、刚度、模态分析及结构优化设计。一是在汽车设计中对所有的结构件、主要零部件的强度和刚度进行分析;二是基于有限元法作为结构优化设计分析的工具;三是采用有限元法对车身及部件进行模态分析,了解各部件的固有频率及振型,进一步计算出各部件的动态响应,为结构的动态设计建立基础。

(2) 车身内的声学设计,将车身结构模态与车身内声腔模态耦合,评价乘员感受的噪声并进行噪声控制。

(3) 疲劳寿命与可靠性分析。汽车产品设计已进入有限寿命设计阶段,要求汽车在设计的使用期内整车和零部件完好,不产生疲劳破坏。

(4) 碰撞与安全性分析。汽车模拟碰撞分析的目的就是为了提高汽车被动安全性能,有效提高车辆设计的安全性,同时大幅减少实车试验的庞大费用。一是在碰撞时,车身结构、驾驶系统、座位等能吸收较高能量,缓和冲击;二是发生事故时,确保车内乘员生存空间以及安全气囊和座椅安全带等对乘员的保护功能,并在碰撞后容易进行车外救助和脱险。

(5) 气动或流场分析。应用计算流体力学(CFD)方法来进行空气噪声分析及预测车身外部流场,为汽车性能和造型设计服务。例如外流场仿真分析是研究风阻的一个主要手段,通过降低风阻达到减少油耗的目的。其他还有空调系统分析、发动机舱热管理分析、蓄电池温度场分析等。

(6) 整车性能的综合分析及评价。从整体的角度对汽车的各种性能进行分析和预测,包括汽车的空气动力学特性、声学特性、振动特性、操纵稳定性、乘坐舒适性、碰撞安全性等。

现代汽车对结构设计提出了越来越高的要求,分析已不满足于传统的弹性分析,展现出许多新的特点。在要求有限元精确建模及产品精细设计的前提下,产品开发要更多地考虑非线性效应;进行有限寿命设计,以求产品轻量化;进行整车非线性系统分析,即整车平顺性、操纵稳定性不能仅以刚体模型进行分析,还要考虑结构的变形效应,主要体现在以下方面。

(1) 电子和电器产品比例不断加大,这就涉及多物理场的耦合仿真问题。

(2) 需要进行更精确地非线性分析,如少片弹簧、橡胶轮胎、悬架的大变形、零部件间的柔性连接等。

(3) 汽车零部件分析的一个难点就是分析载荷的不易确定问题,为避免零部件内力确定不清,边界条件的不确定性等情况,影响计算精度甚至结果不可用,可以从总成系统及整车分析入手,如悬架系统、白车身系统及整车虚拟仿真等。

(4) 进行刚柔耦合动力学分析,从传统的刚体动力学分析到考虑结构弹性的应力响应,如悬架车轮系统等。

随着计算机技术的飞速发展,计算规模、计算速度、计算机容量等已不再是主要矛盾,汽车结构有限元分析中,大多数问题都可以在台式机上完成。通过将 CAD 模型进行转换,建立零部件或系统的有限元模型,对模型施加载荷与约束,即可进行计算。应用中的主要难题是如何建立精确的计算模型;如何使计算模型中各种支承、连接的边界条件与实际结构相符;如何确

定载荷,尤其是动态载荷、路面载荷等;如何施加载荷,以反映各种行驶状态等。解决好上述问题,要通过学习有限元基本理论,结合专业知识,将学习有限元法和掌握程序操作技巧结合起来,而且强调上机使用程序实践,通过案例学习,加深对问题的理解,积累经验。作为一种现代设计理论的方法,我们需要学习并掌握它,完善我们的知识结构与体系。同时要注意软件只是一个工具,它提供了一个利用有限元方法的平台。程序使用的再好,如果不懂有限元理论,不了解专业设计,是做不好有限元分析的,更谈不上为工程结构服务。

图 1-2 ~ 图 1-15 列举了部分汽车结构有限元模型实例,包括车身、车架、车桥、客车、轿车、货车及零部件等模型,展现了有限元方法应用的各个方面。第二章至第八章全面介绍有限元理论与方法、有限元分析过程、有限元建模规范等,第九章提供 20 余个汽车结构分析案例。虽然现在可以通过网络查找到大量的公开资料,但这些案例从产品开发实际中来,有翔实的数据与分析,可参考借鉴意义显著。希望读者通过理论学习、上机实践、案例讲解,获得有益的学习体验,使得有限元方法成为工作中的得力助手与高端平台。

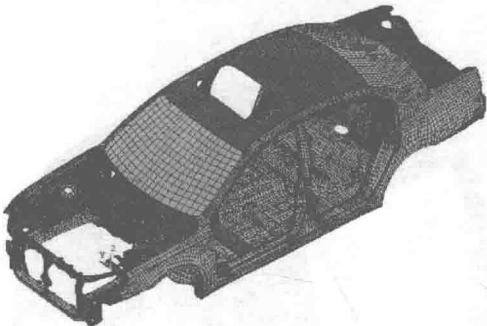


图 1-2 白车身有限元模型

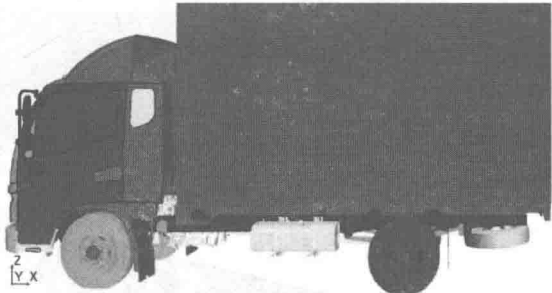


图 1-3 厢式货车模型

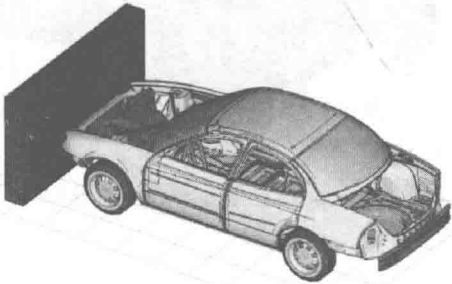


图 1-4 整车碰撞仿真

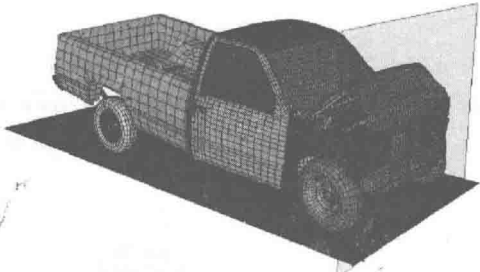


图 1-5 轻型车正面碰撞

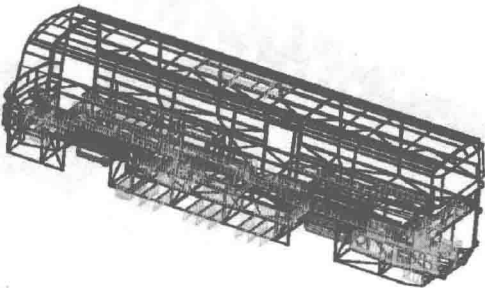


图 1-6 客车骨架有限元模型

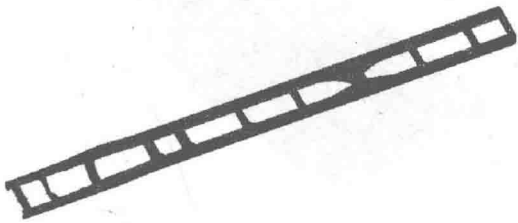


图 1-7 车架有限元模型

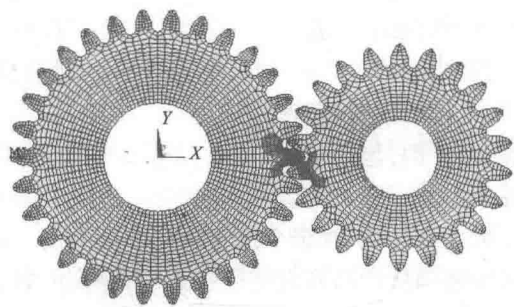


图 1-8 齿轮接触分析

NODAL SOLUTION
 STRESS
 SUB = 1
 TIME = 1
 UFORM (AVG)
 #STRESS
 DMS = 4.243
 EMM = 0.15237
 EHS = 4.243

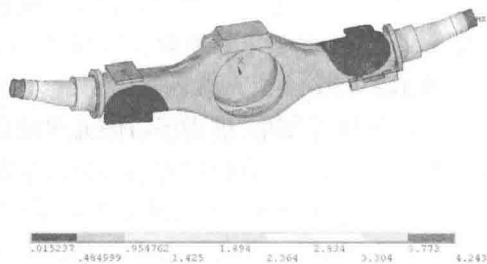


图 1-9 后桥应力分析

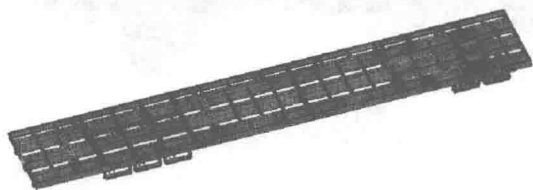


图 1-10 拖车底架模型

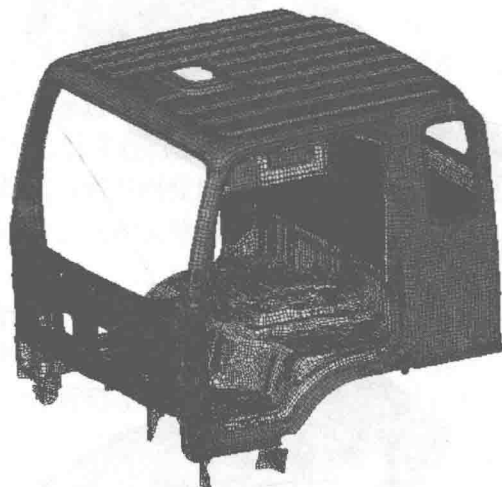


图 1-11 驾驶室有限元模型

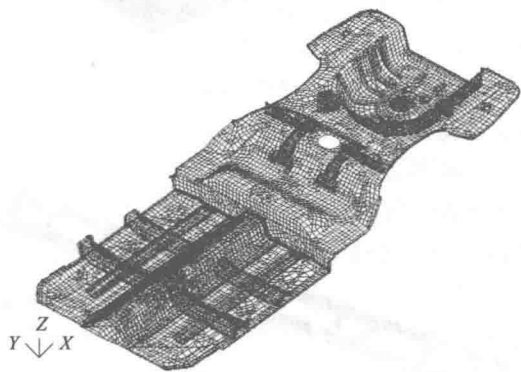


图 1-12 轿车底板模型

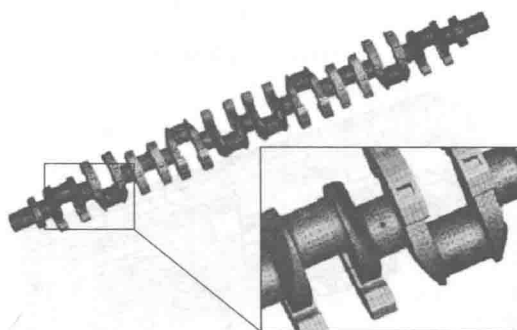


图 1-13 曲轴模型及局部

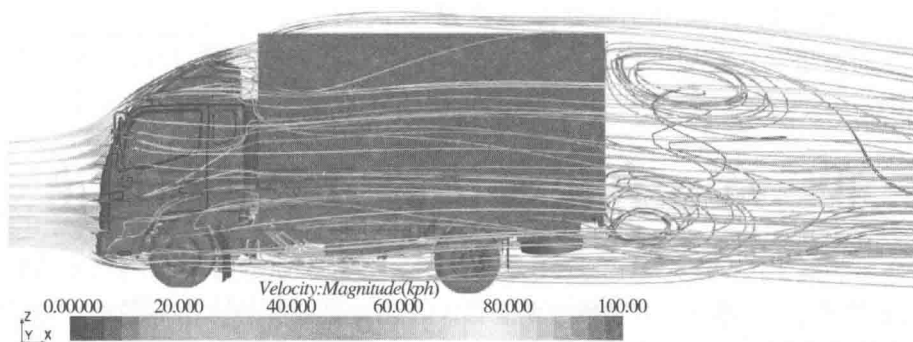


图 1-14 厢式货车流场流线分析图

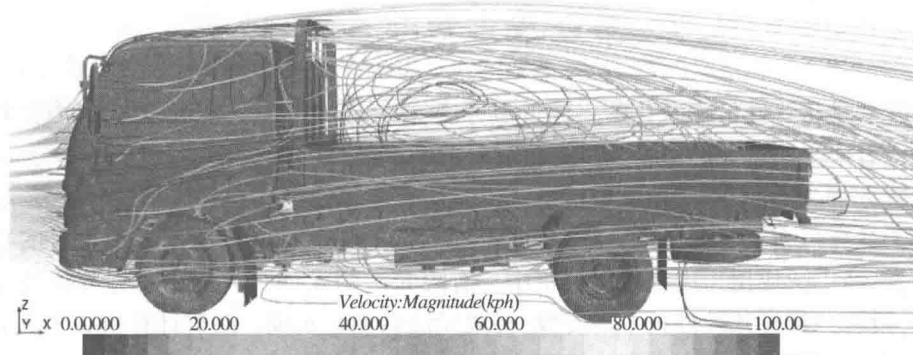


图 1-15 载货车流场流线分析图

练 习 题

- 1-1 什么是有限单元法？其基本思想是什么？
- 1-2 为什么要进行汽车结构分析？其主要分析内容有哪些？
- 1-3 请以关键词“有限元方法”“Finite Element Analysis”“FEA”“汽车结构有限元方法”等进行上网搜索，了解有限元法的应用情况，举例说明有限元法在汽车工程中的应用。

第二章 有限元法的力学基础理论

本章介绍有限元法的力学基础理论、基本方程和经典解法,主要有弹性力学、弹性接触问题、薄板弯曲理论、动力学方程及塑性力学基础。旨在通过对弹性力学等基础理论的了解,理解有限元法的基本概念与相关原理,为进一步学习和应用有限元法建立基础。

第一节 概 述

有限元法是将连续体离散化的一种近似方法,依托于力学基础理论与变分原理,将连续体问题划分成有限个小单元的集合,在单元内采用分片插值的方法表示力学函数的分布,求解离散后的代数方程,得到力学函数的数值解。通过用较简单的概念和方法来代替较复杂的问题,然后借助于计算机去求解繁杂的方程,从而得到问题的解。有限元法作为最重要的数值计算方法之一,已经广泛应用于工程结构分析中。有限元法的发展与应用是与计算机技术的发展分不开的,没有计算机软硬件技术的支撑,有限元法就无法实现。随着计算机技术和有限元分析的发展,大量有限元通用和专用计算程序面市,再加上有限元法适应性广、概念简单、易于理解、计算精度高、能够解决工程中的大量问题,使得有限元法迅速得到推广及普及,成为理论研究和工程领域不可或缺的工具。

从有限元法所用力学基础理论来看,涉及弹性静力学、动力学、弹塑性力学与接触理论、疲劳与断裂力学、复合材料力学、流体力学和热力学等众多学科。但是有限元法本身仍在不断发展,各种分析软件功能越来越丰富,分析研究范围大大扩展,已经从传统的力学领域进入到物理、材料、生物和电子等众多工程领域中。虽然有限元法包括了众多方面的分析问题,但其主要的方法框架可以通过弹性力学加以说明,因而弹性力学既是一般变形体力学的基础,又是有限元法的基础,其中静态有限元法是各种有限元法的基础,而动态有限元法等则是静态有限元法的推广。

通过学习并掌握力学基础理论,一方面加深对有限元法的学习理解,另一方面也为将实际问题简化成力学模型打下基础。

第二节 弹性力学基础

弹性力学是研究弹性体在外力和约束作用下应力和变形分布规律的一门学科,是材料力学课程的延续。而材料力学主要研究单个杆件的计算,材料力学除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外,还要引用一些关于构件形变状态或应力分布的假定,因此得到的解答往往是近似的。弹性力学可不采用这些假定得到比材料力学更加精确的解答,除了研究杆状结构外,还将研究板、壳、实体等非杆状结构。从研究物体的主要力学特征以及求解问题的范围着手,弹性力学主要采用四点假定:①线弹性假定;②均匀连续性假定;③各向同性假定;④小变形假定。超出以上假定研究范围都有专门的学科进行研究,如非线性弹性力学、塑性力学、

复合材料力学、损伤力学、大变形力学等。一般而言,在线弹性范围内,弹性力学的解认为是精确的,它可以用来校核材料力学的解以及有限元分析近似解,可以作为判定截面应力分布规律、检验不同单元、不同网格划分密度的解差别的标准等。

一、空间问题

弹性力学中的基本变量有体力、面力、应力、应变、位移等。体力是作用在物体体积内的力,如重力、惯性力等。面力是沿物体表面上的分布力,如风力、流体压力、接触压力等。作用在物体上的外力主要是指体力和面力。在外力作用下,物体将产生应力。物体内某点 P 的内力就是应力。沿应力所在平面的外法线方向的应力分量称为正应力,沿切线方向的应力分量称为切应力。 P 点在不同截面上的应力是不同的,为了研究 P 点处的应力状态,在 P 点处沿坐标轴 x 、 y 、 z 方向取一个微小的平行六面体,各边长分别为 Δx 、 Δy 、 Δz 。假定应力在各面上均匀分布,每个面上的应力即可分解为一个正应力和两个切应力分量,如图 2-1 所示。当微小的六面体趋于无穷小时,六面体上的应力就代表 P 点处的应力。当物体处于平衡状态时,这个六面体也是平衡的,所以它满足静力平衡方程:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \text{ 和 } \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

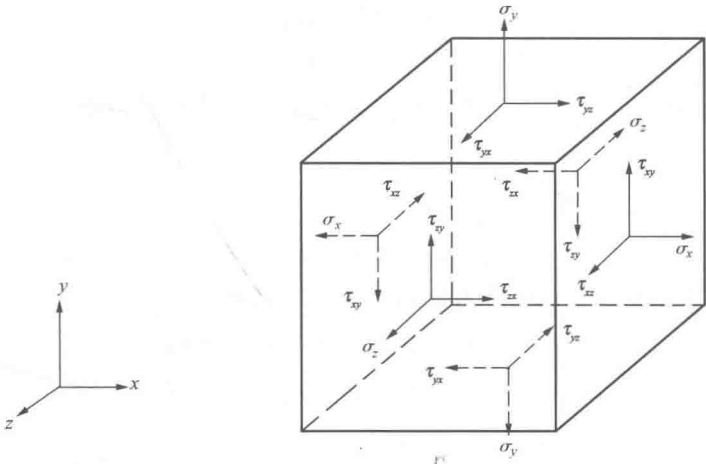


图 2-1 平行六面体应力分布图

可以建立应力与体力的相互关系——平衡微分方程和剪应力互等定理:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \tag{2-1}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{2-2}$$

P 点处的应力分量共有 9 个,由于剪应力是成对存在的,9 个应力分量中只有 6 个是独立的。其中 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 为 3 个正应力, τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 为 3 个剪应力, X 、 Y 、 Z 为单位体积的体力。这样

物体任一点处的应力状态,可由6个独立的应力分量确定。在有限元法中,把一点的6个应力分量用应力列阵表示:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \tag{2-3}$$

式中:T——表示转置。

而物体任一点P的应力状态,可以通过该点的微小四面体PABC斜面上的应力表示(图2-2),根据四面体的平衡条件可以建立斜面上的应力关系为:

$$\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{xz} m + \sigma_z n \end{aligned} \tag{2-4}$$

式中: X_ν 、 Y_ν 、 Z_ν ——单位面积的面力;
 l 、 m 、 n ——物体表面外法线 ν 的3个方向余弦。

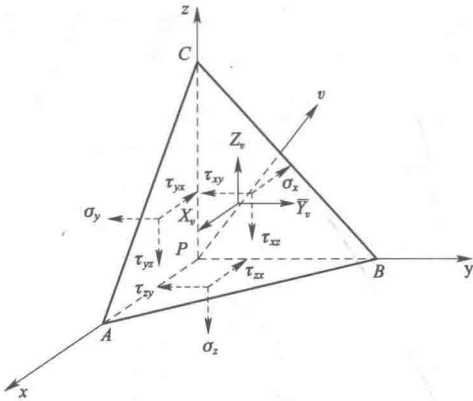


图2-2 微小四面体应力分布图

设斜面ABC上的正应力和切应力分别为 σ_N 和 τ_N ,则

$$\begin{aligned} \sigma_N &= X_\nu l + Y_\nu m + Z_\nu n \\ \tau_N &= X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2 - \sigma_N^2 \end{aligned} \tag{2-5}$$

不难推导出:

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} lm \tag{2-6}$$

即6个应力分量完全决定了一点的应力状态。用主应力表示则为:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ \tau_N^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \end{aligned} \tag{2-7}$$

在特殊情况下,如果平面ABC是物体的边界面,则 X_ν 、 Y_ν 、 Z_ν 成为面力分量 $\bar{X}_\nu$ 、 $\bar{Y}_\nu$ 、 $\bar{Z}_\nu$,于是由式(2-4)可推导得:

$$\begin{aligned} \bar{X}_\nu &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \bar{Y}_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \bar{Z}_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{xz} m + \sigma_z n \end{aligned} \tag{2-8}$$

这就是弹性体的应力边界条件,它表明应力分量的边界值与面力分量之间的关系。

在外力作用下,物体各点的位置将发生变化,即产生位移。如果物体各点发生位移后仍保