CHUDENG SHUXUE
FANZHENGFA JIQI YINGYONG

初等数学反证法及其应用

“数学王国里的孙悟空”丛书系列

彭璋甫　彭革◆编著

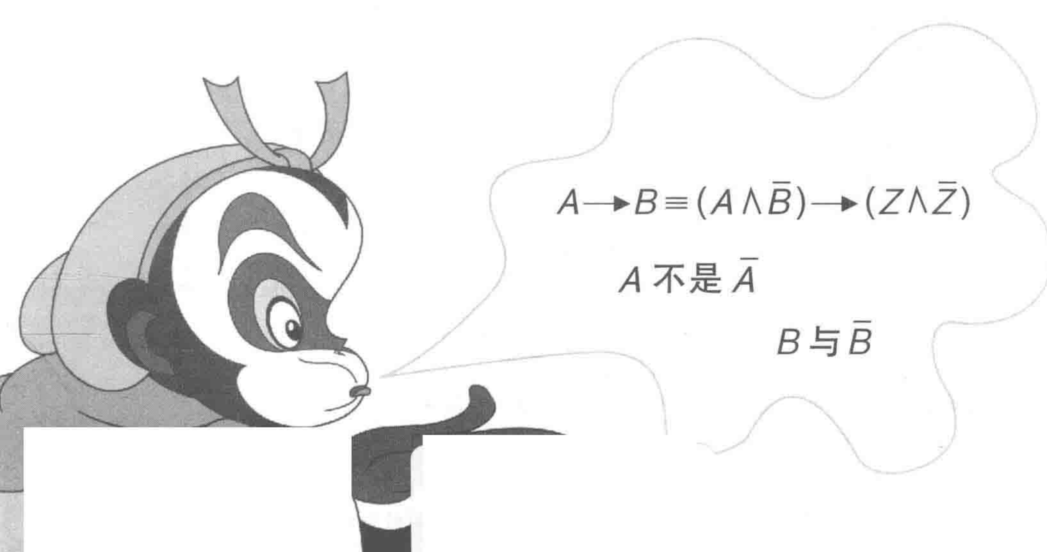
中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

CHUDENG SHUXUE
FANZHENGFA JIQI YINGYONG

初等数学反证法及其应用

—“数学王国里的孙悟空”丛书系列—

彭璋甫　彭革◆编著



中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

初等数学反证法及其应用/彭璋甫，彭革编著. —广州：中山大学出版社，2017.4
（数学王国里的孙悟空）
ISBN 978-7-306-06023-5

Ⅰ.①初…　Ⅱ.①彭…②彭…　Ⅲ.①中学数学课—教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第052092号

出 版 人：徐　劲
策划编辑：曾育林
责任编辑：曾育林
封面设计：曾　斌
责任校对：张礼凤
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020-84111996，84113349，84111997，84110779
　　　　　发行部 020-84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路135号
邮　　编：510275　　传　　真：020-84036565
网　　址：http://www.zsup.com.cn　　E-mail：zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：佛山市浩文彩色印刷有限公司
规　　格：787mm×1092mm　1/16　7印张　150千字
版次印次：2017年4月第1版　2017年4月第1次印刷
定　　价：30.00元

作者简介

彭璋甫　男，1940 年 6 月 23 日生，江西省莲花县人，中共党员．1963 年 7 月毕业于江西师范学院数学系本科，先后在江西省修水县文化教育局、江西省九江师范学校任函授教师、教研员、教研组长、教务主任、副校长．1987 年被评为高级讲师．现已退休，退休前为中共九江师范学校（现九江职业大学）党委委员，主管教学的副校长．参加编写的著作有：《初中数学复习资料》《现代学生学习方法指导》（武汉大学出版社出版）．发表《公倍数、公约数常见题型举隅》《整数分解常见题型解法举隅》《题组教学的作用》《直观教学要注意科学性》等论文近 10 篇.

彭　革　男，1967 年 12 月 15 日生，江西省莲花县人．1984 年获全国高中数学奥林匹克竞赛二等奖．1990 年 7 月毕业于复旦大学数学系本科，获学士学位．先后在江西省九江师范学校、广东省广告公司、南方计算机公司、深圳华为通信股份有限公司、深圳艾默生网络能源有限责任公司任教或任职.

邮编：511484
电话：13610215970
住址：广州市番禺区沙湾镇新碧路芷兰湾五街七座 801

前 言

但凡不愿学数学的人就是怕做数学题；然而，但凡喜欢数学的人就是从酷爱做数学题开始．因为数学题浩如烟海、变幻莫测、精彩纷呈，畅游其中趣味无穷，让人留恋、让人痴迷．

其实，“变”是世界的“通性”．辩证唯物主义者认为，静止是相对的，而运动是绝对的．事物的运动意味着变化．人类从原始社会到今天，不仅社会结构、生产方式在不断变化，而且人们的思想观念、生活方式也在变化．大自然的变化更是剧烈的．第四世纪冰川使恐龙等一些动物从地球上消失．在 3 万年前，北京是一片火海，由于海陆反复变迁，大约经过 1 万年，才成为陆地．位于我国长江入海口的崇明岛，是我国的第三大岛．但崇明岛原来也不是岛．据史书记载，由于长江的江水中挟带泥沙，使长江在下游流速变缓，江水失去搬运泥沙的能力，加上海边潮水的顶托，泥沙便大量沉积下来，到了唐初始出露水面，遂成沙洲．之后泥沙越积越多，使沙洲变成了小岛，又从小岛变成了大岛．20 世纪七八十年代以来，由于长江上游森林遭到严重破坏，以及人工围垦造田等原因，水土流失使长江水中含沙量急剧增加，长江口有更多的泥沙沉积，崇明岛的面积由 1954 年的 600 多平方公里，猛增到现在的 1000 多平方公里，几乎增大了一倍．

世界上的一切事物都在运动、变化中发展．数学作为反映事物发展规律的一门科学，自然它的变化也是无穷无尽的．

看过《西游记》的人对孙悟空的印象非常深刻．孙悟空辅佐唐僧上西天取经获得成功，除了对师傅的一片真心之外，他超凡的功夫是一个重要因素．而这超凡的功夫，一是在太上老君的八卦炉中炼就的火眼金睛，二是那一个筋斗就是十万八千里的筋斗云，三是七十二变．

如果我们拿学习数学与孙悟空辅佐唐僧上西天取经作一个类比，那么，你要做数学王国里的孙悟空，就必须热爱数学，必须掌握好数学的基础知识、思维方法和思想方法．因为，掌握好了数学的基础知识，就像孙悟空炼就的火眼金睛，能看清事物的本质；掌握了数学的思维方法，就像孙悟空的筋斗云，站得高，看得远；而掌握了数学的思想方法，就有了孙悟空的七十

二变，掌握了分析、处理和解决数学问题的基本手段.

马克思讲，数学是思维的体操. 体操是讲究变化的. 所以，我们可以毫不夸张地说：学数学最根本的一点就是要学会“变”.

当然，数学的变化、发展有它自身的规律. 就像孙悟空纵有七十二变，但万变不离其宗. 有一回，孙悟空变成一座庙，它的尾巴变成一根旗杆，竖在庙的后面，结果被二郎神识别出来. 因此，我们完全可以掌握解决数学问题的基本思想和方法.

作者认为解答初等数学难题的主要手段是“转化”（“变”）：即将问题化繁为简、化难为易、化未知为已知. 其基本思想方法一是初等数学变换，二是构造法，三是反证法，四是类比、归纳法。如果掌握了这些基本的思想方法，遇到较难的初等数学问题就能迎刃而解.

解答数学中的证明问题一般有两种方法：一种如《初等数学变换法及其应用》和《初等数学构造法及其应用》介绍的，一般从已知条件出发，经过严格的逻辑推理，最后得到结论的直接证法；另一种就是间接证法，而间接证法又分同一法和反证法两种.

反证法则是从否定问题的结论出发，根据已知条件，经严格的逻辑推理，得出一个矛盾的结果，从而肯定原结论正确的一种证明方法. 反证法也是一种“变”，把证题过程从已知条件开始变为从结论开始. 在目前的中考、高考试题中利用反证法解答的问题较少，但在数学竞赛中则有不少题目须用这一方法. 学习反证法，不仅为我们解答数学问题多掌握了一种方法；更重要的是使我们更进一步地认识了逻辑思维的基本规律，思考问题，认识问题更全面了.

本书介绍的初等数学反证法共分为三部分：反证法的相关概念、反证法的应用和反证法的逻辑依据.

本书在编写过程中参考了许多书目及报纸杂志，除本书末已列书目之外，难以一一列举，在此一并表示感谢. 由于作者水平有限，且有些问题尚在探索之中，书中错误和缺点必定不少，恳请广大读者多提出宝贵意见.

作　者
2015 年 12 月 21 日于顺德碧桂园
2016 年 3 月 23 日脱稿

目　　录

第一章　反证法的相关概念

反证法是解答数学问题的一种重要的方法，中学教材中对于这一方法略有介绍。但是，什么是反证法？如何应用反证法解答相关的数学问题？哪些问题可以应用反证法来解答以及利用反证法解答相关数学问题时需要注意什么问题？恐怕不一定十分清楚，下面我们来作一一介绍.

§1－1　反证法的定义

在《西游记》中有这样一段描述，有一次，孙悟空为了寻找妖魔藏身的洞穴口，找遍了前山所有的地方，始终没有找到这个洞口，然而，跑到后山，终于发现了.

在解决实际问题的过程中，我们经常会遇到这样的情形. 比如，我们要去同一个目的地，有两条道路可选，一条可直接到达，另一条则需要绕道而行，一般情况下，我们会选择直接到达的路。但是，如果直路布满荆棘、崎岖难行，那我们则宁愿选择曲折但好走的路；如遇上天灾，直路成了一条断头路，那就非走弯路不可.

解答数学中的证明问题，一般也有两种方法，一种如我们在《初等数学变换法及其应用》和《初等数学构造法及其应用》中介绍的大多数情况下使用的方法.

例 1　已知 a，b，c 为不等正数，且 $abc=1$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

证明： $\because$ a，b，c 为不等正数，且 $abc=1$.

$$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$<\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}+\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

从上面的证明过程可以看到，它是由已知条件出发，先将要证明的式子的左边进行恒等变换，然后利用两个不相等的数平方之和大于这两个数之积的两倍这一公式，从而得到结论. 像这种由已知条件出发，经过严格的逻辑推理，从而得出结论的证题方法，叫作直接证法.

然而，并不是所有的数学问题都可以用直接证法加以解决.

例 2 对于任意整数，求证：$x^2-4nx+9=0$ 没有整数根.

证明： 假设方程有整数解 α 和 β，则有

$$\alpha+\beta=4n \tag{1}$$

$$\alpha\beta=9 \tag{2}$$

由(2)知，α，β 只能从 ±1，±3，±9 中取值，即

$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=9\end{cases}$，$\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-9\end{cases}$，$\begin{cases}\alpha=3\\\beta=3\end{cases}$，$\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=-3\end{cases}$，$\begin{cases}\alpha=9\\\beta=1\end{cases}$，$\begin{cases}\alpha=-9\\\beta=-1\end{cases}$将这六组值分别代入(1)有

$1+9=4n$，$-1+(-9)=4n$，$3+3=4n$，$-3+(-3)=4n$.

由此可得 $n=\pm\frac{10}{4}$；$n=\pm\frac{6}{4}$. 即 n 不是整数，与已知条件矛盾.

故 对任意整数方程没有整数根.

例 3 若 x，y，z 均为实数，且满足 $x+y+z=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}$，证明：$z\geqslant0$.

证明： 假设 $z<0$，由已知

$x+y+z=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}$

即 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(x+y+z)^2$

即 $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)$

亦即 $(x-y)^2+z^2=2z(x+y)$

$\because (x-y)^2+z^2\geqslant0$

$\therefore z(x+y)\geqslant0$

又$\because z<0$(假设)

$\therefore (x+y)\leqslant0$

$\therefore x+y+z<0$，即 $x+y+z\neq1$，与已知 $x+y+z=1$ 矛盾.

故 $z\geqslant0$.

从例 2、例 3 我们可以看到，这两个问题的结论是难以或不能用直接证法加以解决的. 在这里我们先假设原结论的反面成立，然后根据已知条件和

新的假设，进行严格的逻辑推理，得出一个矛盾的结果，并由此肯定原结论成立，这种证题的方法我们把它叫作反证法.

反证法与直接证法都各有优点，不同的只是一个间接一个直接而已，但都必要也都重要.

§1－2　怎样应用反证法证明问题

怎样应用反证法证明有关的数学问题，一般有以下几个步骤：

(1)反设：假设结论的反面成立.

(2)归谬：以假设为前提，根据已知条件进行严格的逻辑推理，推出一个矛盾的结果.

(3)结论：由矛盾的结果说明反设不成立，从而肯定原结论成立.

因为归谬的过程中，推出一个矛盾的结果，有与已知条件相矛盾，与已知定义、公理、定理相矛盾，自相矛盾以及与假设相矛盾等多种情形，所以，下面我们举例说明在各种情况下如何应用反证法.

一、推出与已知条件相矛盾的例

例1　已知$|a|<1$，$|b|<1$，求证$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证明：假设结论不成立，则有$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|\geqslant1$.

即 $|a+b|\geqslant|1+ab|>0$

于是有 $(a+b)^2\geqslant(1+ab)^2$

即 $a^2+2ab+b^2\geqslant1+2ab+a^2b^2$

$a^2+b^2-1-a^2b^2\geqslant0$

也即$(a^2-1)(b^2-1)\leqslant0$

于是有 $\begin{cases}a^2\geqslant1\\b^2\leqslant1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b^2\geqslant1\\a^2\leqslant1\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}|a|\geqslant1\\|b|\leqslant1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|b|\geqslant1\\|a|\leqslant1\end{cases}$

这与已知$|a|<1$，$|b|<1$矛盾.

故 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

例 2 求证：二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，a，b，c 都是奇数时，这个方程一定没有整数根.

证明： 显然，方程没有零根，假设方程有非零整数根 α，则

当 α 为奇数时，$a\alpha^2+b\alpha+c=0$，但 a，b，c 为奇数.

$\therefore$ $a\alpha^2+b\alpha+c=$ 奇数 + 奇数 + 奇数 $\neq 0$，与已知条件矛盾.

当 α 为偶数时，$a\alpha^2+b\alpha+c=0$，但 a，b，c 为奇数.

$\therefore$ $a\alpha^2+b\alpha+c=$ 偶数 + 偶数 + 奇数 $\neq 0$，也与已知条件矛盾.

故 方程没有整数根.

二、推出与定义相矛盾的例.

例 3 求证：$A\cap\varnothing=\varnothing$.

证明： 假设 $A\cap\varnothing=\varnothing$ 非空，则必有某一元素 $a\in A\cap\varnothing=\varnothing$.

由此有 $a\in A$ 且 $a\in\varnothing$，后者显然与空集 $\varnothing$ 中不含任何元素的定义相矛盾.

故 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

例 4 证明：函数 $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{x}$ 不是周期函数.

证明： 假设正数 T 是 $f(x)$ 的周期，则

$\cos(x+T)+\cos\sqrt{x+T}=\cos x+\cos\sqrt{x}$ 对一切非负实数都成立.

取 $x=0$，有 $\cos T+\cos\sqrt{T}=2$.

$\therefore \cos T=1$，且 $\cos\sqrt{T}=1$.

于是有 $T=2k\pi(k\in\mathbf{N})$ 且 $T=4n^2\pi^2(n\in\mathbf{N})$.

$\therefore 2k\pi=4n^2\pi^2.\qquad \pi=\dfrac{k}{2n^2}(n,\ k\in\mathbf{N})$.

上式左边是无理数，右边是有理数，故等式不能成立矛盾.

故 $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{x}$ 不是周期函数.

三、推出与公理相矛盾的例

例 5 平面 α 外的一条直线 a 平行于平面 α 内一直线 b，求证：$a/\!/\alpha$.

证明： $\because$ a 不在平面 α 内，

$\therefore$ $a/\!/\alpha$ 或 a 与 α 相交.

假设 a 与 α 相交于点 A（如图 1－1 所示）

$a/\!/b$，$\therefore$ A 点不在直线 b 上.

在 α 内过 A 点作直线 $c/\!/b$，则

$\because$ $a/\!/b$，$b/\!/c$，$\therefore$ $a/\!/c$，但 a，c 是过 A 的两相交直线，与平行公理矛盾，所以 a 与 α 相交不可能.

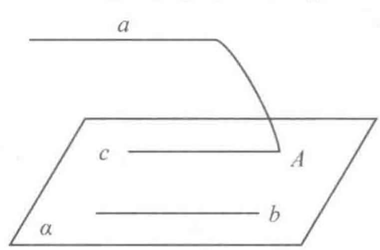


图 1－1

故　a//平面 α.

例 6　证明两相交直线只有一个交点. 已知：如图 1－2 所示，直线 AB，CD 相交于 O，求证：AB 与 CD 只有一个交点.

证明：假设 AB 与 CD 另外还有一个交点 O'，则 AB 是过 O，O'两点的直线，而 CD 也是过 O，O'两点的直线，即过 O，O'有两条直线，这与已知公理“过两点有且只有一条直线”相矛盾.

故　直线 AB 与 CD 只能有一个交点.

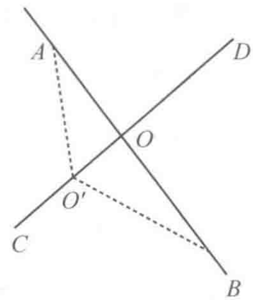


图 1－2

四、推出与定理相矛盾的例

例 7　过一点有且只有一条直线垂直于已知直线. 已知：如图 1－3 所示，A 是已知直线 l 外一点. 求证：过 A 点只能有一条直线垂直于 l.

证明：假设过 A 点有两条直线 AB，AC 都垂直于直线 l，点 B，C 是垂足，在 $\triangle ABC$ 中

$\because \angle 1=\angle 2=90°$

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3>180°$，这与定理“三角形三内角之和等于 180°”矛盾.

故　原命题成立.

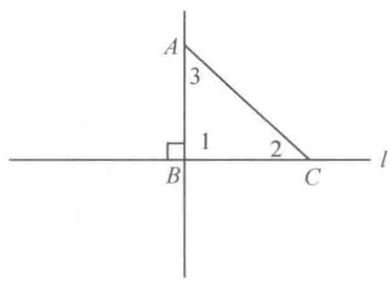


图 1－3

五、推出自相矛盾的例

例 8　设 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$之中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

证明：$|f(1)|=1+a+b$

$|f(2)|=4+2a+b$

$|f(3)|=9+3a+b$

由此可得 $f(1)-2f(2)+f(3)=2$.

从而有　$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geqslant 2. \tag{1}$$

假设 $|f(1)|<\frac{1}{2}$，$|f(2)|<\frac{1}{2}$，$|f(3)|<\frac{1}{2}$.

则有 $|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$.

与(1)矛盾.

故　$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

例 9 是否存在实数 a，b 使函数 $f(x)=ax+b$ 对所有的 $x\in[0,2\pi]$ 都满足不等式：$[f(x)]^2-\cos x\cdot f(x)<\frac{1}{4}\sin^2 x$.

解：假设存在实数 a，b 满足不等式

$[f(x)]^2-\cos x\cdot f(x)<\frac{1}{4}\sin^2 x$.

即 $\left[f(x)-\frac{1}{2}\cos x\right]^2<\frac{1}{4}$.

则 $\left|ax+b-\frac{1}{2}\cos x\right|<\frac{1}{2}$.

令 $x=0$，2π，得

$\left|b-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$，$\left|2a\pi+b-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

得 $b>0$，$2a\pi+b>0$.

$\therefore\ a\pi+b=\frac{1}{2}[b+(2a\pi+b)]>0$

于是
$$\left|(a\pi+b)-\frac{1}{2}\cos\pi\right|=(a\pi+b)+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\qquad(1)$$

但是，另一方面，在 $\left|ax+b-\frac{1}{2}\cos x\right|<\frac{1}{2}$ 中，取 $x=\pi$，得

$\left|(a\pi+b)-\frac{1}{2}\cos\pi\right|<\frac{1}{2}$ 与(1)矛盾.

故　不存在符合条件的 a，b 满足不等式.

六、推出与假设相矛盾的例

例 10　证明　若对任意的正数 c，恒有 $a\leqslant b+c$，求证：$a\leqslant b$.

证明：假设 $a\leqslant b$ 不成立，则 $a>b$ 即 $a-b>0$，$\frac{a-b}{2}>0$

以 $\frac{a-b}{2}$ 作为 c，代入 $a\leqslant b+c$ 得 $a\leqslant b+\frac{a-b}{2}$，

于是有 $2a\leqslant 2b+a-b$，即 $b\geqslant a$. 这与假设 $a>b$ 矛盾.

故　$a\leqslant b$.

例 11　设 $a>2$，给定数列 $\{x_n\}$，其中 $x_1=a$，$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}(n\in\mathbf{N})$，求证：

(1) $x_n>2$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n\in\mathbf{N})$；

(2)若 $a\leqslant 3$，则 $x_n\leqslant 2+\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N})$；

(3)若 $a>3$，则当 $n\geqslant\dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$时，必有 $x_{n+1}<3$.

证明：(1)(2)证明略.

(3)若 $x_k>3$，则$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x_k-1})<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3-1})=\frac{3}{4}$.

假设当 $n\geqslant\dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$时，有 $x_{n+1}\geqslant 3$. 则由(1)知

$x_1>x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}\geqslant 3$，由上述结论及 $x_1=a$ 可得：

$3\leqslant x_{n+1}=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant a(\frac{3}{4})^n$

即 $n<\dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$与假设矛盾.

故　若 $a>3$，则当 $n\geqslant\dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$时，必有 $x_{n+1}<3$.

§1-3　哪些问题可以应用反证法

能够用反证法证明的数学命题很多，初步归纳有如下几个方面.

一、结论为“不是……”“不能……”“没有……”“无……”“……不可约”等否定形式的命题

例1　求证：$\cos\sqrt{x}$不是周期函数.

证明　若 $\cos\sqrt{x}$是周期函数，那么应存在非零常数 T，使 $\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$对一切 $x\geqslant 0$ 都成立.

令 $x=0$，得 $\cos\sqrt{T}=\cos\sqrt{0}=1$.

$\therefore$ 存在一个自然数 k_1，使$\sqrt{T}=2k_1\pi$.

$$T=4k_1^2\pi^2. \tag{1}$$

再令 $x=4\pi^2$，得 $\cos\sqrt{4\pi^2+T}=\cos 2\pi=1$

$\therefore$ 存在另一个自然数 k_2，使 $\sqrt{4\pi^2+T}=2k_2\pi$ (2)

由(1)和(2)得 $\sqrt{1+k_1^2}=k_2$，

但 $k_1^2<1+k_1^2<(k_1+1)^2$ 得

$$k_1<\sqrt{1+k_1^2}<k_1+1$$

即 $\sqrt{1+k_1^2}$ 不可能是自然数，与 $\sqrt{1+k_1^2}=k_2$ 矛盾.

故　$\cos\sqrt{x}$ 不是周期函数.

例 2　证明：由三个小于 1 的实数 a，b，c 构成的三个乘积 $(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$.

证明　若 a，b，c 中有一个小于等于 0，则三个积中也有一个小于等于 0，命题已成立.

今假设 $0<a$，b，$c<1$，而三个乘积都大于 $\frac{1}{4}$.

即 $(1-a)b>\frac{1}{4}$，$(1-b)c>\frac{1}{4}$，$(1-c)a>\frac{1}{4}$.

由第一式得 $(1-a)b\cdot a>\frac{a}{4}$

$\because a$，$(1-a)$ 都是正数，

$\therefore (1-a)a\leqslant\left[\frac{(1-a)+a}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

于是有 $\frac{b}{4}\geqslant(1-a)ab>\frac{a}{4}$，$\therefore b>a$.

同理由第二式、第三式得 $c>b$，$a>c$.

由此可得，$a>c>b>a$，这是不可能的.

故　三个乘积中至少有一个不大于 $\frac{1}{4}$.

例 3　不解方程，证明：$x^2-1735x+1979=0$ 无整数根.

证明：假设方程的两根 α，β 是整数，则

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1735 & (1)\\ \alpha\beta=1979 & (2)\end{cases}$$

因为 1735 与 1979 都是奇数，由(1)知 α，β 必须一奇一偶，而由此(2)式不成立，矛盾.

故　方程无整数根.

二、结论为"至多……""至少……""最多……""最少……"等形式的命题

例4　若 a，b，c 为实数，$A=a^2-2b+\dfrac{\pi}{2}$，$B=b^2-2c+\dfrac{\pi}{3}$，$C=c^2-2a+\dfrac{\pi}{6}$，证明 A，B，C 中至少有一个的值大于零(1986 年北京市初中数学竞赛题).

证明：假设 A，B，C 的值均不大于 0，即 $A\leqslant 0$，$B\leqslant 0$，$C\leqslant 0$，则 $A+B+C\leqslant 0$，

$$\begin{aligned}\text{而 } A+B+C&=\left(a^2-2b+\frac{\pi}{2}\right)+\left(b^2-2c+\frac{\pi}{3}\right)+\left(c^2-2a+\frac{\pi}{6}\right)\\&=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)+(\pi-3)\\&=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(\pi-3)>0\end{aligned}$$

这与假设 $A+B+C\leqslant 0$ 矛盾.

故　A，B，C 中至少有一个的值大于零.

例5　已知 a_1，a_2，…，a_8 均为正数，且

$$a_1+a_2+\cdots+a_8=20 \tag{1}$$

$$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_8=4 \tag{2}$$

试证：a_1，a_2，…，a_8 中至少有一个数小于 1(1979 年湖北省中学数学竞赛第二试第五题).

证明：假设 a_1，a_2，…，a_8 都不小于 1，则可设

$a_i=1+b_i(b_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

再由(1)可得 $b_1+b_2+\cdots+b_8=12$

$$\begin{aligned}\text{于是 } a_1a_2\cdots a_8&=(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_8)\\&=1+(b_1+b_2+\cdots+b_8)+\cdots+b_1b_2\cdots b_8\\&\geqslant 1+(b_1+b_2+\cdots+b_8)=1+12=13\end{aligned}$$

这与条件(2)矛盾

故　a_1，a_2，…，a_8 中至少有一个数小于 1.

例6　求证：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 至多有两个根.

证明：假设方程有三个根 x_1，x_2，x_3，且它们两两不等，

则 $ax_1^2+bx_1+c=0$　(1)

$ax_2^2+bx_2+c=0$　(2)

$ax_3^2+bx_3+c=0$　(3)

由(1)－(3)，并利用假设 $x_1\neq x_2$，得

$a(x_1+x_2)+b=0$　(4)

由(1) - (3)，并利用假设 $x_1 \neq x_3$，得

$$a(x_1 + x_3) + b = 0 \tag{5}$$

由(4) - (5)，并利用 $a \neq 0$，得

$x_2 = x_3$，这与假设矛盾.

故 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 至多有两个根.

三、结论为“必然……”“必……”“一定……”“总……”等形式的必然性或存在性命题

例 7 若某自然数 **N** 的各位数码在适当改变顺序后所得的数与 **N** 之和等于 10^{10}，证明该数能被 10 整除.

证明： 原数应由 10 个数码组成，各位数码依次为 a_1，a_2，…，a_{10}，改变顺序后各位的数码为 a_1'，a_2'，…，a_{10}'.

假设原数不能被 10 整除，即 $a_{10} \neq 0$，那么由所设条件有：

$a_{10} + a'_{10} = 10$，$a_9 + a'_9 = 9$，…，$a_2 + a'_2 = 9$，$a_1 + a'_1 = 9$

由于 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{10}$.

$\therefore 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 91$.

此式左边为偶数，右边为奇数，不可能成立，矛盾.

故 该数能被 10 整除.

例 8 若 x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} 均为小于 1 的非负实数，试证：其中一定存在两个数，其差的绝对值小于 $\frac{1}{n}$.

证明： 不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$，

假设这 $n+1$ 个数中任意两个数的差的绝对值都不小于 $\frac{1}{n}$.

则 $x_{i+1} - x_i \geqslant \frac{1}{n}(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned}\therefore x_{n+1} &= x_1 + \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) \\ &\geqslant x_1 + n \cdot \frac{1}{n} = x_1 + 1\end{aligned}$$

$\because x_1 = 0$，$\therefore x_{n+1} \geqslant 1$ 与题设矛盾.

故 一定存在两个数，其差的绝对值小于 $\frac{1}{n}$.

例 9 共有 9 名男女学生，每人佩戴一枚奖章，号码依次从 1 到 9，求证：不论号码如何分配，一定有一个男(或女)生的奖章号码是另外两个男(或女)生号码的等差中项.