交通版普通高等教育规划教材

JIAOTONG
TULUN
FANGFA

交通图论方法

冯树民 著

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

版普通高等教育规划教材

JIAOTONG
TULUN
FANGFA

交通图论方法

冯树民 著

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本书详细介绍了图论的各种理论方法，同时探讨了各种方法在交通系统中的应用。全书共分11章，从图的基本概念出发，到图的最小树、连通性、最短路、网络流，再到图的遍历、匹配、着色，网络的选址、计划、可靠性，全面涵盖了图论理论的各个方面。

本书可作为高等院校交通类专业学生和交通领域学者参考用书，同时可为其他领域研究者提供思路。

图书在版编目(CIP)数据

交通图论方法／冯树民著. — 北京：人民交通出版社股份有限公司，2017.9

ISBN 978-7-114-14116-4

Ⅰ. ①交… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①交通图—地图编绘—教材 Ⅳ. ①P285.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第211593号

书　　名：**交通图论方法**
著 作 者：冯树民
责任编辑：陈　鹏　崔　建
出版发行：人民交通出版社股份有限公司
地　　址：(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：(010)59757973
总 经 销：人民交通出版社股份有限公司发行部
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：11
字　　数：266千
版　　次：2017年9月　第1版
印　　次：2017年9月　第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-14116-4
定　　价：30.00元

前言
PREFACE

人们生活在一个充满着各种各样网络的世界中，自然界和人类社会中网络无处不在，网络已经成为当今时代生活中不可缺少的部分。在不同应用领域中，节点和连线可以代表不同的事物及其相互之间的关系，由此可建立网络模型进行研究。

网络科学是所有以网络作为研究对象的学科的统称。网络科学是利用网络来描述各种物理、生物和社会现象的研究及建立这些现象的预测模型的科学，也是一种用于探讨各种形态的社会的、现实的、虚拟的交叉与集合的复杂网络的科学新模式。

图论是网络科学研究的开端，用图论的语言和符号可以精确简洁地描述各种网络。图论不仅为数学家和物理学家提供了描述网络的共同语言和研究平台，而且至今图论的许多研究成果、结论和方法技巧仍然能够自然地应用到社会网络分析与复杂网络的研究中，成为网络科学研究的有力方法和工具。

本书把理论与实践相结合，进行图论与交通系统的交叉研究，在完善图论的理论方法的同时，拓展其在交通系统中的应用范围。全书共11章，全面涵盖了图论理论的各个方面，包括基本概念、最小树、连通性、最短路算法、网络流理论、图遍历、图的匹配、图的着色、网络选址、网络计划、网络可靠性等内容。

本书在编写过程中参阅了大量的国内外资料、著作，吸收了同行们的研究成果，在此向他们表示诚挚的谢意。衷心地感谢参与和支持本书出版的所有同志。

科学技术不断发展，社会不断进步，许多图论理论及其在交通领域的应用问题还没有完全解决，甚至有些还是空白，加上作者水平有限，本书还存在许多问题和缺点，希望广大读者批评指正。

冯树民

2017年9月

目录
CONTENTS

第 1 章　图的基本概念

1.1　图论的发展

图论是以图为研究对象的。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形。这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系,用点代表事物,用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

关于图论的文字记载最早出现在欧拉 1736 年的论著《哥尼斯堡七桥问题无解》中,他所考虑的原始问题具有很强的实际背景。欧拉证明了哥尼斯堡七桥问题没有解,并且推广了这个问题,给出了对于一个给定的图可以以某种方式走遍的判定法则,这项工作使欧拉成为图论(及拓扑学)的创始人。哥尼斯堡七桥问题及其后的哈密尔顿问题、四色猜想等有力地推动了图论及拓扑学的发展。1936 年,匈牙利数学家柯尼希出版的第一部图论专著《有限图与无限图理论》标志着图论正式成为一门独立的学科。

近年来,随着社会的进步,计算机科学和通信技术的不断发展,数学的应用越来越多,图论能够施展的天地也越来越广。由于各个领域的很多问题都可以抽象成数学模型,而很多就是图的模型,于是图论便成了一个非常有效的分析和解决问题的工具。图论在管理、交通运输、军事、计算机科学、化学、物理甚至社会科学中都展现出了它的能力。

1.2　图的定义

在实际工程中,许多工程系统都可以用图形来描述,如公路运输系统、城市公交系统、城市给排水系统及通信系统等,这些系统都可以用节点与连线所组成的网络来描述。有一些计划工作,也可按其相互关系绘制成网络形式,可以认为是沿时间展开的网络。

图论中所研究的图可不按比例尺画,线段不代表真正的长度,点和线条的位置也是随意的。例如图 1-1a)表示某地区的公路交通网,A、B、C、D、E、F 表示六个城镇,连线表示两城镇间的公路,如连线 AE 表示城镇 A、E 间有公路相通这种特定关系。如果研究的问题只是着眼于"两城镇间有无公路相通"这一特定关系,公路的长度、曲直、坡度、海拔高度、城镇的具体位置都不是主要问题,那么就可以用图 1-1b)所示的网状图来代替图 1-1a)所示的公路交通网。

从图 1-1b)看不出它所代表的具体含义,这种抽象图既可以表示公路交通系统,也可以表示农田灌溉系统或通信系统。在图论及网络理论中,对图的讨论是将图的具体内容抛开,研究

抽象图的一般规律及典型问题的分析和求解方法。

1. 简单图

图记为 $G=(V,E)$，V 代表点集合，E 代表边集合。例如图 1-2 中 $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$，$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$。若边 e_k 连接点 V_i，V_j，则记之为 $e_k=[V_i,V_j]$，称 V_i，V_j 为边 e_k 的端点，称 e_k 为点 V_i 及 V_j 的关联边。如图 1-2 中 $e_2=[V_1,V_5]$，V_1，V_5 为 e_2 的端点，e_2 为点 V_1，V_5 的关联边。若一条边的两个端点重合，则称该边为环，如图 1-2 中的边 e_8。若两点之间多于一边时，则称这些边为多重边，如图中的 e_4、e_7。若一个图中既没有环也没有多重边，称之为简单图，如图 1-1b）所示。

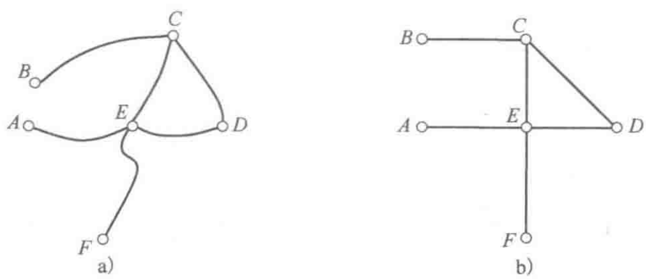

图 1-1　图的转化过程

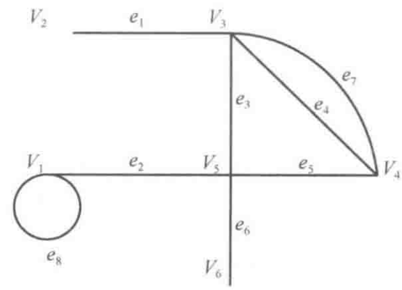

图 1-2　图的定义

2. 连通图

图中若存在某一个点与边的连续交替序列 $\{V_{i1},e_{i1},V_{i2},e_{i2},\cdots,V_{ik-1},e_{ik-1},V_{ik}\}$，则称这个点边序列为一条从 V_{i1} 点到 V_{ik} 点的链，简记为 $\{V_{i1},V_{i2},\cdots,V_{ik}\}$。链 $\{V_{i1},V_{i2},\cdots,V_{ik}\}$ 中，若 $V_{i1}=V_{ik}$，即链的起点与终点重合，则称之为圈，圈实际上是闭链。若链（圈）中所含的边均不相同，则称之为简单链（圈）；若点也不相同，则称之为初等链（圈）。

例如在图 1-3a）中，$\mu_1=\{V_1,V_2,V_4,V_5,V_3,V_2,V_4,V_6\}$ 为一条从 V_1 到 V_6 的链，但它不是简单链，因为 $\{V_2,V_4\}$ 重复两次。$\mu_2=\{V_1,V_2,V_3,V_1\}$ 为初等圈，$\mu_3=\{V_1,V_2,V_5,V_3,V_2,V_4\}$ 为简单链，$\mu_4=\{V_1,V_2,V_5,V_4,V_6\}$ 为初等链。

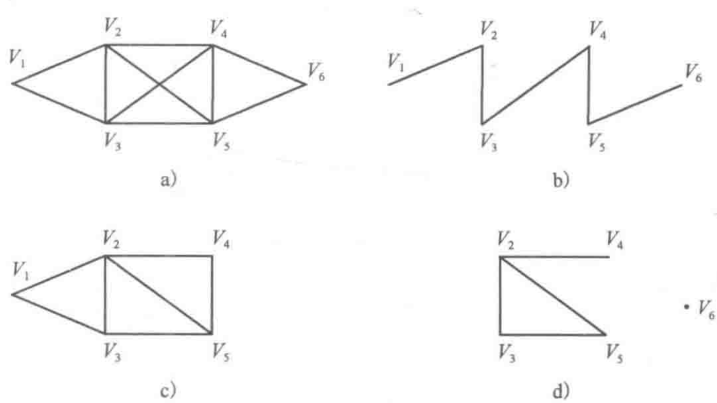

图 1-3　连通图定义

在一个图中，若任意两点之间至少存在一条链，则称这个图为连通图，否则就称为不连通图。图 1-3 中除图 1-3d）外均为连通图，在图 1-3d）中，点 V_6 与点 V_4 之间不存在链，故为不连通图。

3. 无向图与有向图

图中不规定从一点到另一点的方向，即从 V_i 到 V_j 与从 V_j 到 V_i 都是一样的，这种图称之为无向图。如果图中每条边均表明方向，规定只能从 $V_i \to V_j$，不能从 $V_j \to V_i$，这样的图称之为有向图。

在实际问题中，有些问题可用无向图来描述，如市政管道系统、双向行驶的交通网络。但有些问题用无向图就无法描述，如交通网络中的单行线，一项工程中各项工序之间的先后关系等，显然，这些关系仅用边是反映不出来的，还必须标明各边的方向。

在有向图中，点与点之间有方向的连线称为弧，记之为 $A=(V_i,V_j)$，(V_i,V_j) 与 (V_j,V_i) 是不同的。有向图是由点集 V 和弧集 A 所组成的，记之为 $G=(V,A)$。在有向图中，从某节点出发的弧的数称为该节点出度，到达该节点的弧的数目为该节点的入度。

例如图 1-4a) 就是一个有向图，图中 $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$，$A=\{(V_1,V_2),(V_1,V_6),(V_2,V_6),(V_6,V_2),(V_2,V_3),(V_2,V_5),(V_6,V_5),(V_5,V_3),(V_3,V_4),(V_5,V_4)\}$，如果从一个有向图中去掉箭头，得到一个无向图，见图 1-4b)。

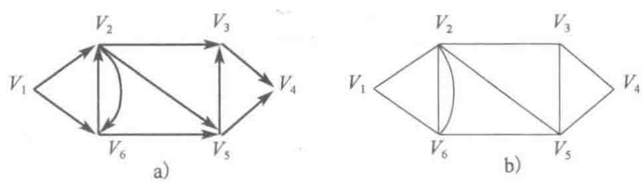

图 1-4 有向图与无向图

有向图 1-4a) 中，从 V_1 到 V_4 沿箭头方向排列一些弧段 $\{V_1,V_2,V_5,V_3,V_4\}$，这些弧段组成一个连续弧的序列，在此序列中各弧段首尾连接而不重复，这就形成了从 V_1 到 V_4 的一条通路（或称路）。如果在弧的序列中某些弧段的方向与前进方向不一致，则从起点到终点各弧段组成一条链，如图 1-4a) 的弧序列 $\{V_1,V_2,V_3,V_5,V_4\}$，便是从 V_1 到 V_4 的一条链。路是链中的一个特例，路中所有弧的方向与前进方向一致。在有向图中，如果路的起点与终点重合，则称该路为回路。

4. 完全图与子图

若一个图有 n 个顶点，且任意一个顶点都与其他所有顶点连接的图，称为完全图，记作 K_n，完全图 K_n 的边的数目是 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$。

如果图 G 的顶点集 V 可以分解为 k 个两两不相交的非空子集的并，即 $V=\bigcup_{i=1}^{k}V_i$，$V_i\cap V_j=\phi$，$i\neq j$，并且没有一条边，其两个顶点都在上述同一子集内，称图 G 为 k 部图。

若图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和图 $G_2=(V_2,E_2)$，有 $V_1\subseteq V_2$，且 $E_1\subseteq E_2$，则称 G_1 是 G_2 的一个子图。若有 $V_1=V_2$ 和 $E_1\subseteq E_2$，则称 G_1 是 G_2 的支撑图。显然支撑图也是子图，但子图不一定是支撑图。若图 $G=(V,E)$ 中去掉点 V_i 及 V_i 的关联边后得到的一个图 G'，则称图 G' 为图 G 的导出子图。如图 1-5b) 和图 1-5c) 都是图 1-5a) 子图，但图 1-5b) 是支撑子图，图 1-5c) 是导出子图。

5. 赋权图

边或弧的有关数量指标称为权，如距离、费用、流量等。图中点、边以及边上的权的总体称

为赋权图。设图 $G(V,E)$,对 G 中的每一条边$[v_i,v_j]$,相应地有一个数 w_{ij},称这个数为边$[v_i,v_j]$上的权。这里所说的"权",是指与边有关的数量指标,根据实际问题的需要,可以赋予不同的含义,如距离、时间、费用或流量等。

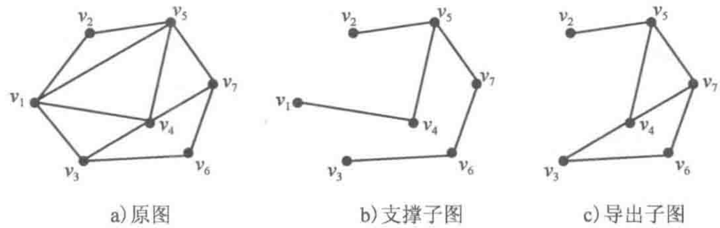

图 1-5　子图、支撑子图和导出子图

6. 二部图

一个图的顶点记为 V,如果可以分解为两个非空子集 X 和 Y,使得每条边都有一个端点在 X 中,另一个端点在 Y 中,如图 1-6 所示,这类图被称作二部图。

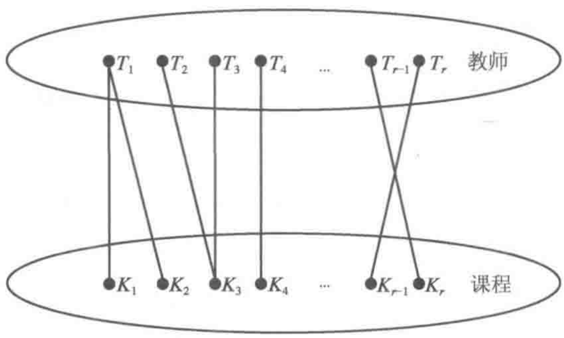

图 1-6　二部图示意图

1.3　图的矩阵表示

1. 邻接矩阵表示法

$G=(V,A)$是一个简单有向图,V 中的顶点用自然数 $1,2,\cdots,n$ 表示或编码,A 中的弧用自然数 $1,2,\cdots,m$ 表示或编码,邻接矩阵表示法是将图以邻接矩阵的形式存储在计算机中。图 $G=(V,A)$的邻接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $n\times n$ 的 $0-1$ 矩阵,即

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n} \in (0,1)^{n\times n}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin A \\ 1 & (i,j) \in A \end{cases}$$

如果两点之间有一条弧,则邻接矩阵中对应得元素为 1,否则为 0。每行元素之和正好对应顶点的出度,每列元素之和正好是对应顶点的入度。可以看出,这种表示法非常简单、直接。但是,在邻接矩阵的所有 n^2 个元素中,只有 m 个非零元素。如果网络比较稀疏,这种表示法浪费大量的存储空间,从而增加了在网络中查找弧的时间。

图 1-7 所示的网络图，可以用邻接矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

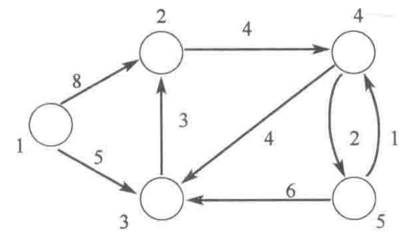

图 1-7 有向简单图的例子

同样，对于网络中的权，也可以用类似邻接矩阵的 $n \times n$ 矩阵表示。只是此时一条弧所对应的元素不再是 1，而是相应的权而已。如果网络中每条弧赋有多种权，则可以用多个矩阵表示这些权。如图 1-7 的权矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 关联矩阵表示法

关联矩阵表示法是将图以关联矩阵的形式存储在计算机中。图 $G = (V, A)$ 的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $n \times m$ 的矩阵，即

$$\boldsymbol{B} = (b_{ik})_{n\times m} \in \{-1, 0, 1\}^{n\times m}$$

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \exists j \in V, k = (i,j) \in A \\ -1 & \exists j \in V, k = (j,i) \in A \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在关联矩阵中，每行对应于图的一个节点，每列对应于图的一条弧。如果一个节点是一条弧的起点，则关联矩阵中对应得元素为 1；如果一个节点是一条弧的终点，则关联矩阵中对应的元素为 -1；如果一个节点与一条弧不关联，则关联矩阵中对应得元素为 0。对于简单图，关联矩阵中每列只含有两个非零元（$+1$，-1）。在关联矩阵中，每行元素 1 的个数正好是对应顶点的出度，每行元素 -1 的个数正好是对应顶点的入度。可以看出，这种表示法也非常简单、直接。但是，在关联矩阵的所有 $n \times m$ 个元素中，只有 $2m$ 个为非零元。如果网络比较稀疏，这种表示法会浪费大量的存储空间。

图 1-7 中，如果关联矩阵中每列对应的弧顺序为(1,2)，(1,3)，(2,4)，(3,2)，(4,3)，(4,5)，(5,3)和(5,4)，则关联矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

同样，对于网络中的权，也可以通过对关联矩阵的扩展来表示。例如，如果网络中每条弧

赋有一个权,可以把关联矩阵增加一行,把每一条弧所对应的权存储在增加的列中。如果网络中每条弧赋有多个权,可以把关联矩阵增加相应的行数,把每一条弧所对应的权存储在增加的行中。图 1-7 考虑权的关联矩阵可拓展为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 交通图的形成

实际的交通网是由不同的交通方式构成的,各点、线都具有不同的技术经济特性,而且包括众多的网络边和节点。典型的城市交通网实际可能有数百个节点和上千条边,网络中的点对、路径更是数量惊人。

路网是指由若干交叉口与路段组成的网状结构。根据网状拓扑结构的简化结果,大致分为两类:一类是线性网络,例如快速路、主干线或铁路线,特点是:起点和终点不唯一,但是在每一对起终点之间只有一条路径可选,每条路径的运行状态由调度控制。另一类是栅格网络,例如由一条条道路与交叉口组成的城市道路网,特点是:该网络不是单起终点的网络,而且每一对起终点之间,可供选择的路径不唯一,每一出行者完全可以根据自己对整个网络的了解程度及所能够获得的每条路径上交通流的信息,选择自己的行驶路径,这样的行为完全是随机的。

对于栅格网络的路网,一个路网就是由有限条边和有限个点组成的栅格网络。路段抽象成边,交叉口及各大集散点抽象成点,每条边连接两个节点,而每个节点连接两条或更多条边。根据不同的使用目的,边可以是有向的,也可以是无向的。每条边具有一定的权重,权重可以是通行能力、行驶时间及长度。实际的路网图 1-8 可以抽象成图 1-9 所示。

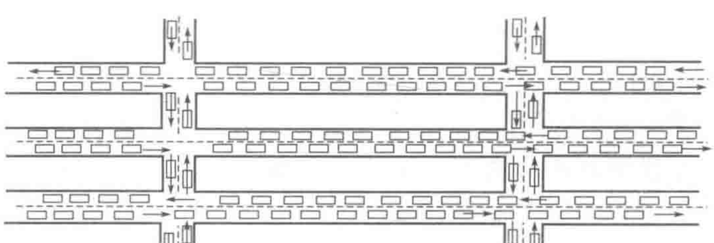

图 1-8 实际路网示意图

网络连通性、网络中不同的运输方式、不同的边,可分别用不同的特征矩阵来表示。

网络邻接矩阵(表达网络连通性):

$$\boldsymbol{Q} = \{q_{ij}\} \quad q_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j\text{ 两点不相邻}) \\ 1 & (i,j\text{ 两点直接连通}) \end{cases}$$

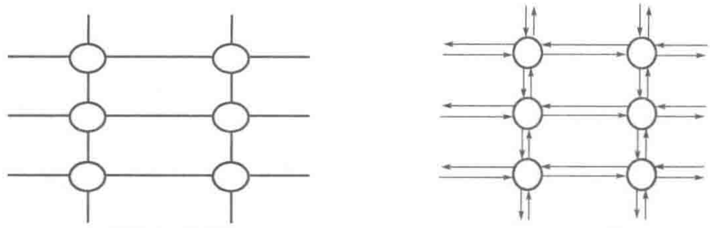

图 1-9 路网抽象示意图

距离矩阵(边长):

$$\boldsymbol{L} = \{l_{ij}\}$$

式中:l_{ij}——i,j 两点间边的长度,$l_{ij}=\infty$表示两点间无直接联系。

通行能力矩阵:

$$\boldsymbol{P} = \{p_{ij}\}$$

式中:p_{ij}——i,j 两点间线路通行能力,$p_{ij}=0$ 表示两点间无边相连。

费率矩阵:

$$\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}$$

式中:c_{ij}——i,j 两点间单位运输费用(运价、成本)以及其他如速度、能耗、通过时间等各种特性。

另外,每条边上的运输特性均可以用服务特性矢量来表示,如:

$$\boldsymbol{S}_{ij} = \{v,t,f,m,\cdots\}$$

式中:v,t,f,m——速度、时间、费率、服务频率。

第 2 章　最小树理论

2.1　最小生成树问题

一个无圈的连通图称为树，树具有以下性质：

(1)任意两点之间必有一条且仅有一条链。

(2)去掉任意一条边，则树成为不连通图。

(3)任何两个顶点间添上一条边，恰好得到一个圈。

设有一连通图 $G(V,E)$，对于每一条边$[v_i,v_j]$，有一权 $w_{ij}\geqslant 0$，最小树问题就是求图 G 的生成树 T 使得 $W(T)=\sum_{[v_i,v_j]\in T} w_{ij}$取得最小值。在 G 的所有生成树中，权数最小的生成树称为 G 的最小生成树。

最小生成树计算常用破圈法和避圈法。

1. 破圈法

图中任取一圈，从圈中去掉一条权最大的边，在余下的圈中，重复这个步骤，直到无圈时为止，即可求出最小生成树。

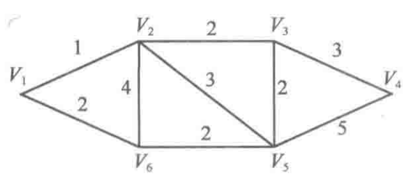

图 2-1　居民出行道路交通图

某城市有 6 个居民点，道路交通图如图 2-1 所示，现要沿道路铺设煤气管道，将 6 个居民点联成网，已知每条道路的长度，求使管道长度最短的铺设方案。

由于煤气管道只能沿着道路布设，并要求通到所有居民点，故表示煤气管道的图必须为道路图的部分图，为了使管道总长最短，图中不应有圈，故原问题为一个求最小树的问题。

任取一圈$\{V_1,V_2,V_6,V_1\}$，去掉权最大的边$[V_2,V_6]$；取圈$\{V_3,V_4,V_5,V_3\}$，去掉权最大的边$[V_4,V_5]$；取圈$\{V_2,V_3,V_5,V_2\}$，去掉权最大的边$[V_5,V_2]$；取圈$\{V_1,V_2,V_3,V_5,V_6,V_1\}$，去掉权最大的边$[V_5,V_6]$，得最小部分树。该图即为管道总长最短的铺设方案，管道总长(即最小树的权之和)为 10 个单位，求解过程见图 2-2。

2. 避圈法

先从图中选一条权最小的边，以后每步从未选的边中，选一条权最小的边，使与已选的边不构成圈，直到形成生成树。

用避圈法求图 2-1 的最小树，先取权最小的边$[V_1,V_2]$，在余下的边中，最小权为 2，这样

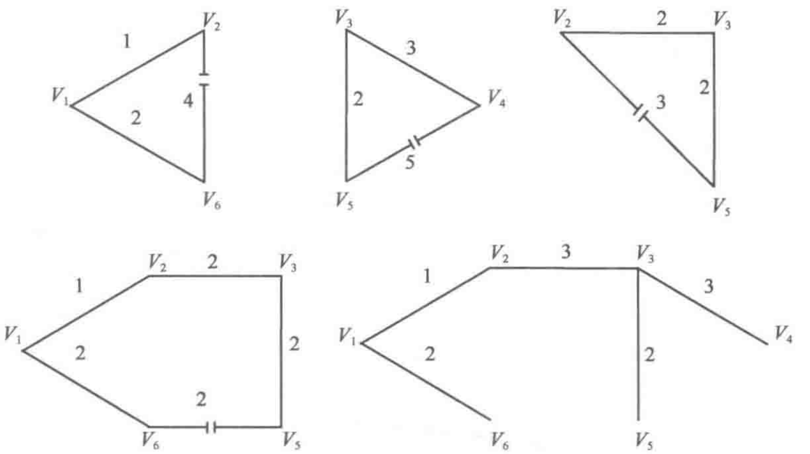

图 2-2 破圈法求解过程

的边有 4 条,可以任取其中的一条,但应不构成圈,故取[V_1,V_6],再取[V_2,V_3]、[V_6,V_5],这时不能再取边[V_3,V_5],否则将构成圈。取不构成圈的边中权最小的边[V_3,V_4],连通所有点形成最小树,求解过程见图 2-3。与破圈法的最小树不一致,但权之和是相同的,都是 10 个单位,可见最小树不是唯一的,但它们的最小权是唯一的。

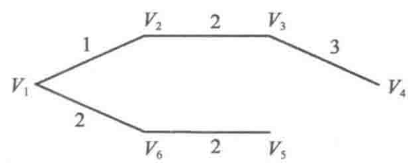

图 2-3 避圈法求解过程

2.2 逐步生成树法

网络节点间最佳连通关系的实现,最小树是一种较为切实可行的方法。但如何在部分重要程度较高的节点之间形成最佳的连通关系,现行的最小树方法难以完全胜任。在求最小树的过程中,为了追求网络诸节点间连通路径的总长度最短,因而也就无法实现其部分节点间连通路径和为最短的愿望。在生成最小树的过程中,无法识别网络中各节点的重要程度,因而也就不可能达到有选择地连通的目的。

在部分重要程度较高的节点之间形成最佳的连通关系,可采用逐步生成树法,结合具体算例说明逐步生成树的计算过程。如图 2-4 所示的网络中,需将 1、5、9 三个节点用较高级别路段连通。

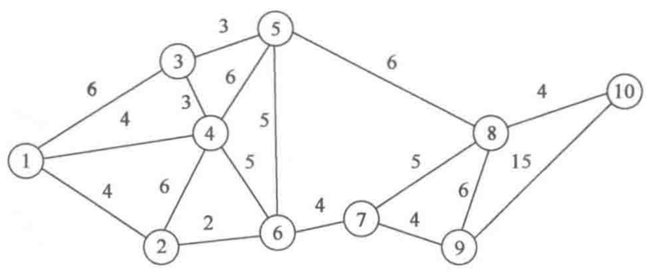

图 2-4 现状网络图