纯粹数学与应用数学专著 • 典藏版

第31号

图的可嵌入性理论

（第二版）

刘彦佩 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第31号

图的可嵌入性理论

(第二版)

刘彦佩　著

科学出版社

1 9 9 4

内 容 简 介

本书在第一版的基础上修订再版，主要增添了有关图在亏格非零曲面上的可嵌入性方面的一批新结果，主要内容包括：多面形与曲面、联树模型、图上的空间、平面上的图、平面可嵌入性、高斯交叉问题、平面嵌入、纵横曲面嵌入、网格可嵌入性、嵌入的同构、图的分解、曲面可嵌入性，曲面上的图、极嵌入问题、图和上图拟阵、纽结不变量等. 本书在第一版的基础上，除文字上的更改与精简和结果的简化与改进外，还充实了许多新的内容，例如增添了图的扩充树，提供了 Jordan 定理第一多面形式的充分性，增添了一般曲面的纵横表示，使得可以将平面情形拓广到曲面的情形，提供了更有效地识别嵌入同构的算法，以及对嵌入非对称化的过程等.

本书可供数学（包括纯粹数学与应用数学）、理论物理（统计力学与量子物理）、计算机科学（逻辑设计、算法及其复杂性）、电子工程（集成电路的布局与布线）等专业的大学生、研究生、教师及科研工作者参考阅读.

图书在版编目（CIP）数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：张 扬 房 阳／责任校对：李静科
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1994 年 10 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 1 月 印 刷 印张：25
字数：478 000

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主　编　杨　乐

副主编　（以姓氏笔画为序）

王　元　王梓坤　石钟慈　严士健

张恭庆　胡和生　潘承洞

第二版序

自 1994 年本专著第一版问世至今 15 年来, 不管是国内还是国外, 在有关方面都作了不少新研究, 也取得了不少新进展.

在国内, 近 15 年来的发展, 无论是就参加者的人数, 还是就成果的广度与深度, 均可以说是史无前例.

首先, 将确定图的最大亏格与上可嵌入性的研究推进到几乎完满解决的最后冲刺. 自本书作者于 1979 年证明所有除树外的连通图的不可定向最大亏格均为其 Betti 数, 或者说, 它们都是上可嵌入的, 剩下就是确定图的可定向最大亏格. 此后的工作只集中在可定向的方面. 虽然当时也意识到非上可嵌入的图与所有图相比为数不会很多, 然而时至今日, 仍不能确定它们. 所谓这个问题的完满解决, 也就是指将这些例外的图简单地提取出来.

后来, 图的嵌入联树模型的形成, 使遍数所有的嵌入得以有效实现.

进而, 使确定更普遍图的曲面嵌入亏格分布, 甚至平均亏格与亏格成为可能, 并且已经取得了基础性的实现.

另外, 通过一些新的曲面模型的建立, 使得可以将在第一版中所形成的平面纵横扩张理论, 拓展到亏格非 0 的一般曲面.

在国外, 这里仅提三件事情.

第一件是 Archdeacon 和 Siran 合作于 1998 年在国际《图论杂志》上发表一文, 提出用 θ 图判定图的平面性. 然而, 本书作者于 20 年前, 即 1978 年, 在中国《应用数学学报》上发表的文章中提出的派生图 (即第一版中的平面性辅助图) 只是 θ 图的一种很小的子图. 所谓很小是指它的阶至多是原图阶的一个二次函数, 而 θ 图的阶却是原图阶的一个指数函数, 从中更显示了对一些专题研究的基础理论意义. 除第一版中涉及的之外, 本版还提供了借助派生图有效地识别一个嵌入可定向性的原理, 启示对于纯粹数学理论研究的作用.

第二件是 Abrums 和 Slilaty 于 2003 年也是在国际《图论杂志》上合作发表一文, 提到本书第一版中有关同调与上同调的定理, 只有必要性而无充分性, 并且给出了一个“反例”. 然而, 从这个“反例”中可以看出, 他们忽略了所讨论曲面的无边缘性, 也忽略了对偶 2 空间基本元与图本身的关系, 即在每个节点处的可迁性.

第三件是有人提出, 第一版中关于确定两个嵌入同构的算法是“不实际”的. 本版则不仅仍保留原有的算法, 还给出了它们的简化形式. 用这种形式现在已经在计算机上实现. 详细情况由于超出本书强调基本理论的范围, 只能放入别的书中.

国内读者也曾提出过一些易引起费解的问题, 特别是理论基础方面在第一版过于简短, 而且推理形式与现存的书籍又不甚协调, 这些也不能不在本版中考虑.

本书与第一版相比, 除文字上的修改与精减和结果的简化与改进外, 还有以下主要补充:

(1) 在第 1 章中，通过重组舍去难读的曲面一节, 增添剖分与置换一节, 以便易于了解嵌入的同构和自同构.

(2) 增添了第 2 章, 以一种新的方式讨论曲面与多面形, 使读者更容易阅读和理解有关曲面以及图在其上嵌入的内容.

(3) 在第 3 章中，增添了图的扩充树以及关于近年来对于嵌入联树模型研究的基础. 特别值得一提的有两点：一个是第一次证明了从任何一个支撑树 (而不必最优!) 都可有效地确定出一个图的最大亏格, 最终实现了自 1979 年以来在这方面理论有效性的一个夙愿; 另一个是基于联树十分简单地一并证明了图的曲面嵌入可定向与不可定向插值定理, 这是以前未曾想到的.

(4) 改进了同调与上同调定理的表述, 以及对 MacLane, Whitney，Lefschetz 三个不同理论思路的定理, 一并自然地导出，避免了误解.

(5) 在第 5 章中，首次提供了 Jordan 定理第一多面形形式的充分性.

(6) 在第 6 章中，简化了其中主要定理的推导.

(7) 在第 8 章中，改善了原有定理的表述, 同时也简化并修改了原有的一些证明.

(8) 在第 9 章中，增添了一般曲面的纵横表示，使得可以将平面情形拓广到曲面的情形, 其中, 两个模型是新的.

(9) 在第 11 章中, 提供了更有效地识别嵌入同构的算法以及对嵌入非对称化的过程.

(10) 第 13 章是新增添的, 提供了对于图的曲面可嵌入性的各种识别, 虽然从理论上尚未证明有效，却实际可行. 特别是所提供的 4 种研究路线都会有独立的理论地位, 其中, 一条路线是将 Whitney, MacLane, Lefschetz 的判准, 一并拓展到一般曲面上.

(11) 各章均增添了一些必要且具有典型性的例子, 以便读者易于掌握和运用相关内容.

虽然第二版在内容的广度与深度方面比第一版都有明显的提高, 但仍远不是说有关方面的研究已近结束. 事实上, 第二版所涉及的只是目前人们多关注的一些与图的曲面嵌入有关的方面. 第一版中引发的诸如循环空间及其子空间所衍生的结构, 包括同调和上同调、从拟阵到组合几何以及纽结进一步的拓扑不变量等的研究, 似尚未引起人们应有的注意. 它们的发展将是在此版问世之后作者所希望看到的.

最后, 感谢国家自然科学基金 (批准号 10871021) 对本书中有关各项目和中国科学院科学出版基金对本书再版的支持与资助.

刘彦佩

2009 年 10 月于北京稻田村

第一版序

图的可嵌入性的概念导源于平面性. 关于后者, 至少组合学工作者深知, 它是图论中重要的研究课题之一. 早在 20 世纪 30 年代初, 首先是波兰的数学家 K.Kuratowski, 其后不久, 还有美国的数学家 H. Whitney 和 S. MacLane 都作过精湛的研究, 他们在这方面都创立了各自的理论. 时至今日, 仍不减其生命力. 这些均已被世人所承认. 然而, 本书则打算提供另一种看来在文献中还是新鲜的理论.

在 20 世纪 50 年代, 中国数学家吴文俊基于代数拓扑学中的上同调理论, 揭示了判定图的平面性的一个判准. 另一方面, 十多年之后, 生于英国的加拿大数学家 W.T. Tutte, 基于在 50 年代他本人引进的实域上链群的理论, 也发现了一个判准. 然后, 于 80 年代, 本书作者基于二元域 (GF(2)) 上的空间理论, 将这两个判准简化为一个. 这就是在 5.2 节中所说的吴 (文俊)–Tutte 定理.

于 20 世纪 60 年代初, 从 L. Auslander 和 V. Parter 发表用计算机的算法思想判定图的平面性方面的第一篇文章, 直到 J. Hopcroft 和 R. Tarjan 的第一个线性时间算法的出现, 在文献中讨论这一经典课题的文章竟有数百篇之多. 在 70 年代, 吴文俊也构造了一种算法, 将它转化为解一组模 2 方程的问题. 接着, 本书作者把这一结果改进到每个方程至多含有两个模 2 变量. 然后, 他又得到了一些新的判准, 表明从算法复杂性的角度来看, 平面性的问题相当于在 5.3 节中引进的平面性辅助图上求一个支撑树, 5.4 节中的主要定理就是这些判准.

第 7 章提供了第 5 章中所描述的基本理论的进一步发展, 对于平面性和平面嵌入, 揭示了基于确向树与确向嵌入的禁用构形的完备集. 这就使我们能够求出节点数和边数均为原图的节点数和边数的线性函数的平面性辅助图, 从而在算法复杂性上也达到了线性的顶峰.

第 2~4 章是第 5 章和第 7 章的基础. 在第 2 章中, 引进了确向树和确向上树, 以及它们的一些将会用到的性质. 第 3 章是关于图中的空间. 其中包括循环空间, 上循环空间, 双循环空间, 以及它们的结构. 第 4 章处理平面图的至关重要的结果. 例如, 那些由 Euler 公式能导出的, 唯一性, 直线和凸表示等. 特别是还讨论了 Jordan 曲线定理的多面形模式. 当然, 第 1 章简述了全书所必需的有关集合、序、图、群以及曲面的基本知识.

在第 6 章中, 可以看出平面性的理论, 怎样用于接触高斯的平面曲线交叉问题. 虽然, 于 30 年代, 它首先由 M. Dehn 解决. 不过, 他的解答不是像高斯所猜想的. 事实上, 高斯猜想确用不同的方法予以证实. 但, 这里提供了一种新的看上去较为

简单的证明.

第 8 章和第 9 章, 包含了本书作者最近在纵横可嵌入性与网格可嵌入性方面的一系列新结果. 其要旨是使得这种嵌入中每一条边上的折数尽量地小以致没有折. 第 8 章从事于叁、双和单可嵌入性. 也就是说只允许每边至多有三、二和一个折的情形. 在第 9 章中, 研究 0 可嵌入性或者说网格可嵌入性. 它是最难的一种情形. 这里的论题动意于为超大规模集成电路设计中的布局, 特别是布线提供一个理论基础.

第 10 章是关于确定一个曲面上的二个多面形是否同构的问题. 对于可平面图, 这个问题首先由 L. Weinberg 多项式地解决了. 现在, 根据 J.Hopcroft 和 J.Wong 的说法我们还知道它是线性可解的. 对于一般的多面形, 在这里利用确向术处理这个问题. 而且, 对于非可平面图可以利用相仿的方法处理.

第 11 章和第 12 章, 着重讨论非可平面图. 第 11 章所讨论的分解可分为两个部分. 其一是将一个图分解为各分图均有较高的连通度. 其二是使各分图均为可平面的或者是纵横的, 并且要求分图之数目越小越好, 或者说每个分图含的边越多越好. 第 12 章是关于曲面可嵌入性. 它有两个重要组成部分. 其一即所谓上可嵌入性, 或者说使得所在曲面的亏格为最大. 其二是下可嵌入性, 即使所在曲面的亏格为最小. 前者用确向术构造性地得到了解决. 虽然, 在这章中可以看到商嵌入对于确定不少图类的下可嵌入性起了重要作用. 其中包括 Hilbert-Cohn Vossen 的引线问题的解决. 后者距完全解决仍很遥远.

在第 13 章中, 提出和解决了一些最优化的问题. 其中, 人们可能会想到最小折数与最小面积的问题尤其对于那些从事超大规模集成电路布局设计的人不无裨益. 这里, 也包括了本书作者的最新的研究进展.

正如人们所意识到的, 拟阵是这样的一个对象, 当图为非可平面的, 它起着对偶图的作用. 第 14 章研究一个拟阵是二分的, 正则的以及图的或上图的表征. 这些均视为平面性理论的深入发展. 它首先应归功于 W.T. Tutte 的开创性的工作. 这里我们用自己的方式讨论.

最后, 在第 15 章, 着眼于纽结问题从拓扑学到组合学的发展. 对于边上带二元权的平面图, 提供了二类组合不变量. 由此出发, 可导出 Jones 多项式和括号多项式这两类新的拓扑不变量作为特殊情形.

本书的主要目的在于为上面提到的有关可嵌入性的问题, 提供一种理论处理. 同时, 也考虑了算法构造. 为了节省篇幅, 每章最后一节均安排为注记以便将有关问题的最新进展, 理论与实际的背景, 以及一些历史的发展作一简要说明. 同时, 也提出了一些公开的问题和可能有助于进一步研究的建议, 以供在有关方面有兴趣的读者猎奇. 然, 这里不允许我们讨论算法的方方面面, 既使可以自然地导出. 因为这或许会使本书之预定的页数增加一倍. 由于同样的原因, 我们也只能略去有关地图

的理论及其计数. 虽然, 这方面的结果正灿烂夺目.

在结束之前, 我不能不对那些在学术上或技术上, 对本书作过贡献的人们, 表达对他们的衷心的感谢. 由于版面所限, 只能在这里提到一小部分人的名字. 首先, 本项研究之初, 曾得到吴文俊教授文章的启迪和 W.T. Tutte 教授文章的充实. 没有他们的贡献, 这本书也许绝难在此时问世. 同时, P.L. Hammer, 许国志, F.S.Roberts, P. Rosenstiehl, B. Simeone, 万哲先, 王元, 吴方, 越民义等教授一直关心作者的研究进展. E. Aparo, 马仲蕃, P. Marchioro, A. Morgana, P. Petreschi, 徐伟宣, 颜基义等教授经常与作者讨论有关问题. 在国内外所办的讨论班的听众, 如崔显峰、董峰明、康羽、李安平、李祥贵、刘新 (博士)、刘莹、吕涛军、任韩、孙晓荣 (博士)、C.H.Velasquez(博士)、徐寅峰 (博士)、杨振起、于濂、郑茂林 (博士) 等部分或全部地勘校此书初稿. 当然, 现存的任何错处均是我本人的责任. 最后绝非次要, 我还得特别地感谢加拿大滑铁卢大学的组合学与最优化系, 美国罗杰斯大学的运筹学中心和意大利罗马大学 (主校) 的统计系的热情好客和各国的研究基金, 以及我国国家自然科学基金对本书中有关各项目的研究资助.

刘彦佩

1994 年 4 月于北京

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

为方便起见, 全书采用通常的逻辑约定：和、积、否定、蕴意、等价、任意量和存在量分别用符号 $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ 和 $\exists$ 表示.

在书中, $(i.j.k)$ 表示在第 i 章、第 j 节中的第 k 项, $X[k]$ 表示参考文献中作者(们) X 的第 k 款.

1.1　集合与关系

一个集合就是具有共性的一类对象的全体. 这个对象可以是数、符号、字母等, 甚至还可以是集合.

当然, 这个集合不包括所定义的那个集合本身以免自相矛盾, 其中的对象称为这个集合的*元素*.

总是用小写斜体字母表示元素, 用大写字母表示集合. 说法 “x 是 (不是) 集合 M 的一个元素” 用如下的符号表示：

$$x \in M (x \notin M).$$

一个集合通常用一种性质所刻画. 例如,

$$M = \{x \mid x \leqslant 4, \text{正整数}\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

一个集合 M 的*基数*(当 M 为有限时, 即它的元素的数目) 用 $|M|$ 表示. 对于上面定义的 M, 自然有 $|M| = 4$.

令 A, B 是两个集合. 如果 $\forall a,\ a \in A \Rightarrow a \in B$, 则称 A 为 B 的*子集*, 记为 $A \subseteq B$, 进而定义三个主要的运算：并、交和差分别如下：

$$A \bigcup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \tag{1.1.1}$$

$$A \bigcap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \tag{1.1.2}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \tag{1.1.3}$$

如果 $B \subseteq A$, 则

$$A \setminus B = A - B,$$

用 $\overline{B}(A)$ 表示, 并称之为 B 对 A 的补.

如果所有的集合都是 Ω 的子集, 则集合 A 对 Ω 的补简单地写为 $\overline{A}$. 空集就是一个没有任何元素的集合, 总是用 $\varnothing$ 表示. 对于 Ω 的子集间的上述运算, 服从如下的规律:

集合性 1　幂同律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$A \bigcap A = A \bigcup A = A. \tag{1.1.4}$$

集合性 2　交换律: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A. \tag{1.1.5}$$

集合性 3　结合律: $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C, \\ A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

集合性 4　吸收律: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \bigcap (A \bigcup B) = A \bigcup (A \bigcap B) = A. \tag{1.1.7}$$

集合性 5　分配律: $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C), \\ A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C). \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

集合性 6　通界律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$\varnothing \bigcap A = \varnothing, \quad \varnothing \bigcup A = A, \quad \Omega \bigcap A = A, \quad \Omega \bigcup A = \Omega. \tag{1.1.9}$$

集合性 7　单补律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing, \quad A \bigcup \overline{A} = \Omega. \tag{1.1.10}$$

由这些定律出发可以得到很多重要结果, 这里仅列出一些后面将会用到的.

定理 1.1.1　$\forall A \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} \forall X \subseteq \Omega, \quad [(A \bigcap X = A) \vee (A \bigcup X = X)] \Rightarrow A = \varnothing, \\ \forall X \subseteq \Omega, \quad [(A \bigcap X = X) \vee (A \bigcup X = A)] \Rightarrow A = \Omega. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

定理 1.1.2　$\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \bigcap B = A \Leftrightarrow A \bigcup B = B. \tag{1.1.12}$$

定理 1.1.3 $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$(A \bigcap B = A \bigcap C) \wedge (A \bigcup B = A \bigcup C) \Leftrightarrow B = C. \tag{1.1.13}$$

定理 1.1.4 $\forall A \subseteq \Omega$,

$$\overline{\overline{A}} = A. \tag{1.1.14}$$

定理 1.1.5 $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}, \quad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}. \tag{1.1.15}$$

由上所述可以看出 $\overline{\varnothing} = \Omega$ 和 $\overline{\Omega} = \varnothing$, 进而还可以看出对称性 (或者说, 对偶性): 任何一个关于 $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, Ω 的结论均可通过交换 $\cup$ 和 $\cap$, $\varnothing$ 和 Ω 而得出另一个结论.

对于 $A, B \subseteq \Omega$, 从 A 到 B 的一个**单射**是指这样的一个映射 α: $A \to B$, 使得 $\forall a, b \in A$,

$$a \neq b \Rightarrow \alpha(a) \neq \alpha(b).$$

单射也称为 1–1 对应. 一个**满射**则是这样的一个映射 β: $A \to B$, 使得 $\forall b \in B$,

$$\exists a \in A, \quad \beta(a) = b.$$

如果一个映射既是单射又是满射, 则称为**双射**. 如果两个集合之间有一个双射, 则称它们是**同构的**. 用 $A \sim B$ 表示 A 与 B 同构. 同构的集合具有相同的基数. 对于有限集 A 和 B, 判定它们同构与否是微不足道的, 因为这时有 $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \sim B \Leftrightarrow | A | = | B | .$$

对于一个集合 M, $M \times M = \{\prec x, y \succ \mid \forall x, y \in M\}$ 称为 M 的**笛氏积**, 其中当 $x \neq y$ 时, $\prec x, y \succ \neq \prec y, x \succ$.

所谓集合 M 上的一个**二元关系**是指 $M \times M$ 的一个子集. 形容词 "二元" 常被忽略. 如果对于 $x, y \in M$, 满足关系 R, 则记 $\prec x, y \succ \in R$ 或 xRy. 一个**序**, 记为 $\preceq$, 就是这样的一个关系 R, 使得满足如下的三个定律:

关系性 1 反射律: $\forall x \in M$, xRx.

关系性 2 反对称律: $\forall x, y \in M$, $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

关系性 3 传递律: $\forall x, y, z \in M$, $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

如果一个集合 M 上带有一个序 $\preceq$, 则称之为**偏序集**, 记为 $(M, \preceq)$.

定理 1.1.6 对于一个偏序集 $(M, \preceq)$, $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$,

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n. \tag{1.1.16}$$