



普通高等教育“十三五”规划教材

“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书

数学物理方程： 模型、方法与应用

Equations of Mathematical Physics:
Model, Method and Application

李刚 刘文军 主编 蒋飞达 黄瑜 编
王曰朋 吴斌



科学出版社



普通高等教育“十三五”规划教材

“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书

数学物理方程： 模型、方法与应用

李 刚 刘文军 主编

蒋飞达 黄 瑜 王曰朋 吴 斌 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是结合作者多年的教学经验,根据理工科“数学物理方程”教学大纲的要求及大气科学等专业的需要而编写的.本书以方法为主线,内容包括典型模型的定解问题建立、方程的分类与标准型、行波法、分离变量法、积分变换法和格林函数法等.在此基础上,介绍了研究偏微分方程定性理论的极值原理和能量方法,探讨了贝塞尔函数及勒让德函数的应用.本书叙述注重启发性、系统性与应用性,把较难的概念与尽量浅显的例子适当结合,将方法运用于各种应用驱动的偏微分方程模型中,并补充和扩展了相关知识到交叉应用领域.书中配有较多的典型例题和习题,可供读者阅读与练习.

本书可作为数学与应用数学、信息与计算科学等数学类专业和物理学、大气科学、海洋科学等理工科专业的本科生和研究生教材,也可作为相关研究人员的参考书或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程:模型、方法与应用/李刚,刘文军主编;蒋飞达等编. —北京:科学出版社,2017.12

(“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书)

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-056210-4

I. ①数… II. ①李… ②刘… ③蒋… III. ①数学物理方程-高等学校-教材 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 323043 号

责任编辑:胡凯 许蕾 曾佳佳/责任校对:彭涛

责任印制:张克忠/封面设计:许瑞

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

石家庄继文印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年12月第一版 开本:787×1092 1/16

2017年12月第一次印刷 印张:19 1/4

字数:456 000

定价:69.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书》

编 委 会

主 编 蒋 勇

副主编 李 刚 刘文军 程国胜

编 委 (按姓氏笔画排序)

王曰朋 方金辉 朱节中 杨兴东

肖建中 吴永成 吴佳贤 张太忠

张孝金 陈文兵 费文龙 夏大峰

曹春正 雷金贵

前 言

“数学物理方程”是以物理学及其他各门自然科学中所产生的偏微分方程(及积分方程、微分积分方程等)为研究对象的一门数学基础课程。本课程也可定位于数学和物理学的交叉领域,是指应用特定的数学方法来研究物理学中的某些现象。其探讨物理现象的数学模型,即寻求物理现象的数学描述,并对模型已确立的定解问题研究其数学解法,然后根据解答来诠释和预见物理现象,或者根据物理事实来修正原有模型。

连续介质力学、电磁学、量子力学、大气与海洋运动等方面的基本方程都属于数学物理方程的范围,这些方程能够反映未知函数关于时间变量的偏导数和关于空间变量的偏导数之间的制约关系。

本书作者以多年来为数学专业、物理学、大气科学和海洋科学等理工科专业开设的本科生数学物理方程的教学实践为基础,参阅了国内外的相关文献,编写了这本以模型、方法与应用为特色的数学物理方程教材。本书可作为数学与应用数学、信息与计算科学等数学类专业和物理学、大气科学、海洋科学等理工科专业的本科生及研究生教材,也可作为相关研究人员的参考书或自学用书。

本书内容共分9章。第1章为绪论,引入了偏微分方程的基本概念,通过具体的物理问题导出了弦振动方程、热传导方程和位势方程等典型方程和相应的定解问题,介绍了线性叠加原理,最后作为微分方程在数学建模中的应用,详细介绍了阿米巴变形虫的生态模型。第2章对于两个自变量和多个自变量的二阶线性偏微分方程,分别介绍了它们的分类(即椭圆型、抛物型和双曲型)及其标准型。第3~7章是以偏微分方程的各种求解方法为主线展开叙述的,分别为行波法、分离变量法、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法和格林函数法。第3章针对一维、三维和二维波动方程的初值问题分别介绍了特征线方法、球平均法和降维法,同时给出了一维波动方程的达朗贝尔公式、三维和二维波动方程的泊松公式,并介绍了它们的物理意义;最后作为应用,以弦振动方程为例介绍了系统的精确可控性。第4章详细介绍了求解有界区域上偏微分方程的重要方法:分离变量法,依次介绍了正交函数系和广义傅里叶级数、施图姆-刘维尔问题、各类定解问题的分离变量法求解以及量子力学中的一些数学思想。第5、6章分别讨论了傅里叶变换和拉普拉斯变换这两种积分变换方法,介绍了它们的定义、性质以及在求解微分方程中的应用。作为知识的扩展,还介绍了傅里叶变换在海洋学中的应用,以及拉普拉斯变换在大气对流扩散方程中的应用。第7章引入了格林函数的概念,介绍了求解特殊区域上的格林函数和拉普拉斯方程的Dirichlet问题的镜像法,并介绍了三种典型方程的基本解。第8章介绍了两种重要的定性分析方法:极值原理与能量方法。这两种方法是证明偏微分方程解的适定性、先验估计和渐近性质的有力工具。第9章引入了两

类常用的特殊函数: 贝塞尔函数和勒让德函数, 介绍了这两类特殊函数的概念、性质以及在特殊区域上使用变量分离法求解偏微分方程定解问题中的应用.

为了激发学生的学习兴趣并让学生了解一些相关的数学历史背景, 在编写教材时适当加入了一些相关数学家的历史注记, 如在第 3 章、第 5 章和第 6 章分别介绍了达朗贝尔、傅里叶和拉普拉斯的人物小传. 本书叙述注重启发性、系统性与应用性, 把较难的概念与尽量浅显的例子适当结合, 将方法运用于各种应用驱动的偏微分方程模型中, 并补充和扩展了相关知识到交叉应用领域. 书中配有较多的典型例题和习题, 可供读者阅读与练习.

由于本书的各章内容基本上是独立的, 因此教师可根据教学要求适当选取教学内容. 例如, 32 学时的课程可讲授第 1 章至第 5 章的内容, 48 学时的课程可讲授第 1 章至第 7 章的内容, 64 学时的课程可完整讲授第 1 章至第 9 章的内容. 书中带“*”的为选讲内容.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (11771216, 11771214) 和南京信息工程大学教材建设基金的资助, 作者在此表示衷心的感谢. 本书在编写过程中, 得到了南京信息工程大学及其他学校老师、同事和学生的帮助, 获得了许多有益的建议与修改意见, 在此一并表示衷心的感谢.

限于作者的水平, 书中难免出现疏漏与不足之处, 恳请读者提出宝贵意见和建议.

作 者

2017 年 12 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 引入与基本概念	1
1.2 典型方程的导出	5
1.3 定解条件与定解问题	11
1.4 定解问题的适定性	15
1.5 线性叠加原理	19
1.6 在数学建模中的应用一例: 阿米巴变形虫的生态模型	21
习题 1	25
第 2 章 二阶线性偏微分方程的分类与标准型	31
2.1 两个自变量方程的分类与化简	31
2.2 多个自变量方程的分类	42
习题 2	46
第 3 章 波动方程的初值问题与行波法	48
3.1 一维波动方程的初值问题	48
3.2 三维波动方程的初值问题	75
3.3 二维波动方程的初值问题	86
3.4 依赖区域、决定区域、影响区域和特征锥	90
3.5 应用: 系统的精确可控性——以弦振动方程为例 *	93
习题 3	98
第 4 章 分离变量法	101
4.1 正交函数系和广义傅里叶级数	101
4.2 施图姆-刘维尔特特征值问题	104
4.3 齐次方程和齐次边界条件的定解问题	114
4.4 非齐次方程和齐次边界条件的定解问题	136
4.5 非齐次边界条件的处理	143
4.6 应用: 量子力学中的一些思想 *	147
习题 4	148
第 5 章 傅里叶变换	154
5.1 傅里叶变换的定义	154
5.2 傅里叶变换的性质	158

5.3	傅里叶变换的应用	163
5.4	拓展: 傅里叶变换在海洋学中的应用一例 *	173
	习题 5	179
第 6 章	拉普拉斯变换	183
6.1	拉普拉斯变换的定义与性质	183
6.2	拉普拉斯变换的应用	189
6.3	应用: 拉普拉斯变换方法求解大气对流扩散方程 *	195
	习题 6	198
第 7 章	格林函数方法	201
7.1	格林公式及其应用	201
7.2	格林函数及其性质	205
7.3	一些特殊区域上格林函数和拉普拉斯方程的 Dirichlet 问题的解	207
7.4	拉普拉斯方程的基本解	215
7.5	发展方程的基本解和格林函数方法	219
7.6	应用: 地温问题的求解	224
	习题 7	226
第 8 章	极值原理与能量方法	230
8.1	极值原理及其应用	230
8.2	能量方法及其应用	240
	习题 8	254
第 9 章	特殊函数及其应用	258
9.1	特殊函数概述	258
9.2	贝塞尔函数及其性质	262
9.3	勒让德函数及其性质	271
9.4	特殊函数的应用	278
	习题 9	284
	参考文献	286
	附录	287

第1章 绪 论

随着科学技术的进步和计算手段的提高,用数学方法研究自然科学和工程技术中具体问题的领域越来越广.用数学方法研究实际问题的第一步就是建立关于所考察对象的数学模型,从数量上刻画各物理量之间的关系.有时候所建立的数学模型是一个含有未知函数的偏导数方程,这就涉及数学的一个分支——偏微分方程.这个分支的发展过程充分显示了数学理论与社会实践密切相关、互相推动的关系.

数学物理方程是学习上述分支的一门基础课程.通过学习,希望能体会到:如何将实际问题抽象、归纳为数学问题,即建立数学模型;如何利用实际问题的有关知识和特性启发解决数学问题的思路;如何利用数学问题的结果解释实际问题中的各种现象;如何从实际问题出发检验数学方法和结果的优劣.

本章的内容是介绍数学物理方程的基本概念(阶、线性和非线性、定解问题、定解条件、定解问题的解、定解问题的适定性、线性叠加原理等)以及几个经典问题的物理背景.

1.1 引入与基本概念

1.1.1 引入

在“高等数学”课程中学过一个例子:证明函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1.1)$$

这里的方程(1.1.1)称为拉普拉斯(Laplace)方程,它是下面将介绍的偏微分方程中很重要的一种方程.

事实上,首先计算偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

再由函数关于自变量的对称性可类似得出 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 最后,求和即可得证方程(1.1.1).

1.1.2 基本概念和定义

1. 偏微分方程与偏微分方程组

偏微分方程: 联系着几个自变量、未知函数及其偏导数(且必须有)的等式. 其一般形

式为

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots) = 0.$$

例如,

$$u_{xxy} + xu_{yy} + 2u = 5x, \quad (1.1.2)$$

$$u_x u_{xx} + xu u_y = \sin(3x). \quad (1.1.3)$$

偏微分方程组: 涉及几个未知函数及其偏导数的多个偏微分方程.

2. 偏微分方程的阶

偏微分方程的阶: 出现在偏微分方程中最高阶偏导数的阶数. 例如, 方程 (1.1.1) 和方程 (1.1.3) 为二阶偏微分方程, 方程 (1.1.2) 为三阶偏微分方程.

3. 线性与非线性偏微分方程

线性偏微分方程: 未知函数及其所有偏导数都是线性的偏微分方程.

◇ **线性齐次偏微分方程:** 方程中无自由项 (即不含未知函数及其偏导数的项), 如方程 (1.1.1);

◇ **线性非齐次偏微分方程:** 方程中有自由项, 如方程 (1.1.2).

非线性偏微分方程: 不是线性偏微分方程的偏微分方程.

◇ **拟线性偏微分方程:** 关于未知函数的最高阶偏导数是线性的偏微分方程, 如方程 (1.1.3);

♡ **半线性偏微分方程:** 未知函数的最高阶偏导数的系数不含未知函数及其低阶偏导数而仅依赖于自变量.

◇ **完全非线性偏微分方程:** 关于未知函数的最高阶偏导数是非线性的偏微分方程.

例如, 方程 (1.1.1) 为二阶线性齐次偏微分方程;

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (\text{波动方程})$$

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) \quad (\text{热传导方程})$$

为二阶线性非齐次偏微分方程;

$$u_t + uu_x = 0 \quad (\text{冲击波方程})$$

为一阶拟线性偏微分方程;

$$u_t + kuu_x + u_{xxx} = 0 \quad (\text{KdV 方程})$$

为三阶半线性偏微分方程;

$$(u_x)^2 + u = 3$$

为一阶完全非线性偏微分方程.

4. 偏微分方程的解

(古典) 解: $u = u(x, y, \dots)$ 在区域 Ω 内具有 m 阶连续偏导数, 且代入 m 阶偏微分方程后等式成立.

特解: m 阶方程的解还满足某些附加条件.

通解: m 阶方程解的表达式中含有 m 个任意函数 (而不是 m 个任意常数, 这一点与常微分方程不同).

下面给出几个简单的求解偏微分方程的例子.

例 1.1.1 求解下列线性偏微分方程的通解 (其中 $u = u(x, y)$):

$$(1) u_x = \cos x;$$

$$(2) u_{xy} = e^x.$$

解 (1) 方程两边对 x 积分, 得通解

$$u = \sin x + \varphi(y),$$

其中, $\varphi(y)$ 为关于 y 的任意函数.

(2) 方程两边对 y 积分, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int e^x dy = ye^x + \psi(x),$$

其中, $\psi(x)$ 为关于 x 的任意函数. 两边再对 x 积分, 得通解

$$u = ye^x + g(x) + yh(y),$$

其中, $g(x)$ 为任意一次可微函数; $h(y)$ 为关于 y 的任意函数.

例 1.1.2 求解线性非齐次偏微分方程 $tu_{xt} + 2u_x = 2xt$ (其中 $u = u(x, t)$).

解 设 $u_x = v$, 有

$$tv_t + 2v = 2xt, \quad \text{即} \quad v_t + \frac{2}{t}v = 2x.$$

这是一阶线性非齐次常微分方程 (可把 x 看成参数, v 看成 t 的一元函数), 其通解为

$$v = e^{-\int \frac{2}{t} dt} \left[\int 2xe^{\int \frac{2}{s} ds} dt + c(x) \right] = \frac{2}{3}xt + c(x)t^{-2}.$$

两边关于 x 积分, 得通解

$$u(x, t) = \frac{1}{3}x^2t + t^{-2}h(x) + g(t).$$

1.1.3 一些典型的偏微分方程

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

n 维拉普拉斯算子:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2};$$

哈密顿算子:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

例 1.1.3 n 维波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0.$$

例 1.1.4 三维热传导方程

$$u_t - a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0.$$

例 1.1.5 n 维拉普拉斯方程

$$-\Delta u = 0.$$

例 1.1.6 三维泊松 (Poisson) 方程

$$-(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z).$$

例 1.1.7 描写大气运动的基本方程组 (6 个独立方程)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 & \text{(连续性方程)} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} & \text{(运动方程)} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla e = -\frac{\rho}{p} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} & \text{(能量方程)} \\ e = (p, \rho) & \text{(状态方程)} \end{array} \right. \quad (1.1.4)$$

或

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 & \text{(连续性方程)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} f_x & \text{(运动方程)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} f_y & \text{(运动方程)} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} f_z & \text{(运动方程)} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\rho}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \quad + \frac{1}{\rho} (u f_x + v f_y + w f_z) & \text{(能量方程)} \\ e = (p, \rho) & \text{(状态方程)} \end{array} \right.$$

其中, ρ 为密度, $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 为流速, p 为气压, e 为内能, 它们都是关于 (x, y, z, t) 的未知函数; $\mathbf{f} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ 为重力, 是已知函数.

注 1.1.1 方程组 (1.1.4) 中第二个式子的左端为欧拉 (Euler) 观点下的加速度表示, 其与拉格朗日 (Lagrange) 观点下的加速度表示 $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ 实质上是一致的, 即有

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}.$$

推广到更一般的物理量 (无论矢量、标量) 有

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\cdot).$$

该式的物理意义: 个别变化 = 局地变化 + 牵连变化 (其中牵连变化 = 平流变化 + 对流变化).

注 1.1.2 由上述方程组可以得到不可压缩无旋流动的数学模型. 事实上, 不可压缩流动即认为 ρ 为常数, 这时连续性方程组 (1.1.4) 中第一个式子为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

考虑到无旋流动 (此为引入速度势函数的前提条件), 因此 $\text{rot}\mathbf{V} = 0$, 即

$$\text{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} = 0.$$

从而

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此, 存在速度势函数 φ , 使

$$\mathbf{V} = \nabla\varphi,$$

即

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

代入连续性方程, 得速度势 φ 满足三维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

结合边界条件求得了速度势 φ , 就可以得到流场中的速度分布.

1.2 典型方程的导出

本节将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中的三大类典型方程. 一方面, 可

对微分方程建模进行有益的训练; 另一方面, 可了解几类典型方程的物理背景. 需要注意的是, 建模的主导思想是抓住主要因素, 忽略次要因素.

1.2.1 弦的微小横振动问题

1) 模型

一根长为 L 的均匀柔软细弦, 在外力的作用下做微小横振动.

2) 问题

确定弦的运动方程.

3) 建立坐标系

以弦的平衡位置为 x 轴, 以 $u(x, t)$ 表示弦上 x 点 t 时刻的横向位移, 拟导出 u 所满足的方程, 如图 1.2.1 所示.

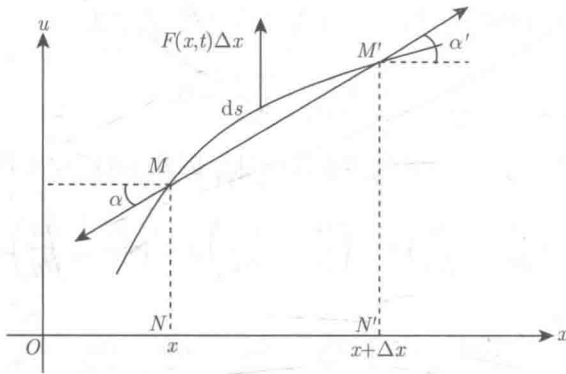


图 1.2.1 坐标系

4) 术语解释与理想化假设

细弦: 与张力相比, 弦的质量可以忽略;

柔软: 弦可弯曲, 张力的方向总沿切线方向;

横振动: 弦只在平面上运动;

微小: 振幅及倾角都很小 ($u_x = \tan \alpha \approx 0$, $\alpha \approx 0$).

5) 方程的建立 (微元法)

(1) 任取弧 $\widehat{MM'}$, 欲对其用牛顿 (Newton) 第二运动定律 ($F = ma$).

(2) 受力分析: 受外力、张力共同作用.

设弦上各点的张力为 $T(x, t)$, 弦的质量密度为 $\rho(x, t)$, 作用于弦的外力密度为 $F(x, t)$, 其方向沿 u 轴方向.

(3) 推导.

水平方向 (仅有张力分量且没有位移):

$$\left. \begin{aligned} T(x + \Delta x) \cos \alpha' - T(x) \cos \alpha = 0 \\ \alpha, \alpha' \approx 0 \Rightarrow \cos \alpha, \cos \alpha' \approx 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T(x + \Delta x) = T(x) \Rightarrow T \text{ 与 } x \text{ 无关.}$$

弧长未变 ($\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2} dx \approx \Delta x (u_x \approx 0)$) \Rightarrow 在微小振动的情况下, 这一小段弦的长度在振动过程中可以认为是不变的, T 与时间 t 无关. 所以, T 为常数.

垂直方向 (受张力分量、外力, 位移为 $u(x, t)$):

$$(T \sin \alpha' - T \sin \alpha) + F(x, t) \Delta x = \rho \Delta x \bar{u}_{tt},$$

其中, ρ 为线密度, 因弦均匀故为常数; \bar{u}_{tt} 为加速度 u_{tt} 在弧段 $\widehat{MM'}$ 上的均值.

因 $\sin \alpha \approx \tan \alpha = u_x$, 则有

$$T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + F(x, t) \Delta x = \rho \Delta x \bar{u}_{tt}.$$

两边除以 Δx , 得

$$T \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} + F(x, t) = \rho \bar{u}_{tt}.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$ 并由偏导数的定义, 得

$$T u_{xx}(x, t) + F(x, t) = \rho u_{tt}.$$

从而有

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (\text{弦的强迫振动方程, 非齐次})$$

其中, $a^2 = \frac{T}{\rho}$; $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$.

在有些情况下, 还可能得到如下方程:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \mu u_t + f(x, t), \quad (\text{受迫阻尼弦振动方程})$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (\mu = f = 0). \quad (\text{弦的自由横振动方程, 齐次})$$

6) 其他实际问题

上面的方程也可以用来刻画杆的纵振动、高频传输线内电流流动等问题, 称为一维波动方程. 实际应用中还有如下的高维波动方程:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (\text{二维波动方程: 均匀薄膜横振动})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E}, \quad (\text{电场——三维波动方程 (严镇军, 2004)})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{H}. \quad (\text{磁场——三维波动方程 (严镇军, 2004)})$$

7) 其他推导方法

利用动量守恒、积分次序交换定理 (王明新, 2005)、哈密顿变分原理 (胡嗣柱等, 1997).

1.2.2 热传导方程

1) 模型及问题

在 \mathbb{R}^3 中, 考虑一各向同性的物体 Ω (图 1.2.2), 其内部有热源且与周围介质有热交换, 求物体内部的温度 $u(x, y, z, t)$ 分布.

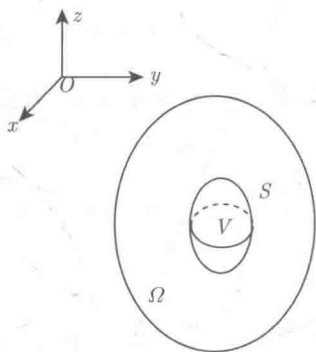


图 1.2.2 各向同性的物体

2) 物理规律

(1) 能量守恒: 在 Ω 内任取一部分 V , 在任意时间段 $[t_1, t_2]$ 内, 有

$$V \text{ 中增加的热量 } (Q_2) = \text{通过边界 } S \text{ 流入的热量 } (-Q_1) \\ + \text{内部热源产生的热量 } (Q_3).$$

(2) 傅里叶 (Fourier) 热力学定律:

$$dQ_1 = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt,$$

其中, dQ_1 为 dt 时间内流出 dS 的热量; k 为热传导系数; $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为温度 u 沿 dS 的外法线 n 的方向导数.

3) 各量的计算

时间段 $[t_1, t_2]$ 内经边界 S 流出的热量为

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = - \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \nabla u \cdot n dS dt = - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k \Delta u dV dt,$$

其中, 最后一个等号用到了如下高斯 (Gauss) 公式:

$$\iint_S [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV;$$

时间段 $[t_1, t_2]$ 内经边界 V 增加的热量为

$$Q_2 = \iiint_V c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]dv = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt;$$

时间段 $[t_1, t_2]$ 内热源产生的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dx dy dz dt,$$

其中, $F(x, y, z, t)$ 为内部热源的密度, 即单位时间内在单位体积上内部热源产生的热量.

4) 方程的建立

$$Q_2 = -Q_1 + Q_3$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k\Delta u dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F dV dt.$$

由时间段 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 的任意性, 有 (对任意 $(x, y, z) \in \Omega, t \geq 0$)

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + F(x, y, z, t)$$

或

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad (\text{三维热传导方程})$$

其中, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$; $f = \frac{F}{c\rho}$.

若物体内部无热源, 则有

$$u_t = a^2 \Delta u. \quad (\text{三维齐次热传导方程})$$

5) 其他实际问题

上面的方程也可以用来刻画气体的扩散、液体的渗透等问题, 又称扩散方程. 实际应用中还有如下的低维热传导方程:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (\text{一维热传导方程: 侧面绝热的均匀细杆的温度分布})$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}). \quad (\text{二维热传导方程: 侧面绝热的均匀薄板的温度分布})$$

6) 其他形式

(1) 三维球对称问题的热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = f(r, t).$$