解析数论中几类重要和式及其应用

张天平　著

科学出版社

解析数论中几类重要和式及其应用

张天平　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍解析数论中几类重要和式的性质及其理论应用. 结合作者的研究成果, 主要介绍 Kloosterman 和、广义二项指数和、特征和, 以及几类类 Dedekind 和的和式——Cochrane 和、Hardy 和等的均值性质. 在这些和式的一些相关问题的理论应用方面, 重点介绍整数及其逆分布问题的高维推广、Lehmer 问题的高维推广等.

本书可供高等院校数学专业的高年级本科生、研究生以及教师参考使用, 也可供相关领域的研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

解析数论中几类重要和式及其应用/张天平著. —北京: 科学出版社, 2018.8
ISBN 978-7-03-058562-2

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数论-研究 Ⅳ. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 192205 号

责任编辑: 李 萍 / 责任校对: 郭瑞芝
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 8 月第一次印刷 印张: 16
字数: 320 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

关于指数和、特征和、Dedekind 和及各种类 Dedekind 和的研究, 在解析数论、加法数论、模形式、编码学、密码学以及算法复杂性研究中十分重要, 并与很多难题, 如哥德巴赫猜想、华林问题、Linnik 猜想、Sato-Tate 猜想、算术序列中的除数问题、类数公式、伪随机数生成器等密切相关.

本书共 6 章. 第 1 章介绍一些预备知识; 第 2 章介绍经典 Kloosterman 和在光滑数集上的单个上界估计、广义二次 Kloosterman 和的混合均值、广义二项指数和的四次均值及混合均值、一类指数和的加权均值, 以及不完整区间上 Gauss 和的上界估计等; 第 3 章介绍特征和在 Lehmer 数集与广义平坦数集的上界估计、多项式特征和的上界、不完整区间上特征和与广义二次 Gass 和及广义 Kloosterman 和的混合均值等; 第 4 章介绍不完整区间上 Cochrane 和的上界估计及混合均值、超级 Cochrane 和的上界估计及混合均值, 以及关于两类 Hardy 和的一些恒等式等; 第 5 章介绍上述和式在一些相关问题上的应用, 如整数及其逆分布问题的高维推广、Lehmer 问题的高维推广等; 第 6 章介绍一些其他相关问题.

本书的写作是在导师张文鹏教授的支持和鼓励下完成的, 感谢张老师多年来的悉心指导. 同时, 感谢陕西师范大学数学与信息科学学院的老师与同事们在作者教学及科研工作中所给予的热情帮助. 感谢研究生陈慧、彭文、刘梅平、秦珍珍给本书所提供的素材, 感谢研究生张慧芳、刘小凤在本书文字整理方面的帮助, 感谢科学出版社对本书出版的大力支持.

由于作者水平有限, 相关方面的新成果又不断出现, 书中不足之处在所难免, 恳请各位读者批评指正.

张天平

2018 年 5 月于陕西师范大学

目　录

第 1 章　预 备 知 识

本章将主要介绍一些本书所需要的解析数论的基本概念以及相关性质[1, 2].

1) Hölder 不等式

命题 1.1　设 P 为正整数, u_s, $v_s \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, 则有

$$\sum_{s=1}^{P} u_s v_s \leqslant \left(\sum_{s=1}^{P} u_s^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha} \left(\sum_{s=1}^{P} v_s^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta}.$$

命题 1.2　设 P 为正整数, u_s, $v_s \geqslant 0$, 则有 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{s=1}^{P} u_s v_s \right)^2 \leqslant \left(\sum_{s=1}^{P} u_s^2 \right) \left(\sum_{s=1}^{P} v_s^2 \right).$$

2) Dirichlet 特征

定义 1.1　设 q 为正整数, 一个不恒为零的算术函数 $\chi(n)$ 如果满足条件:

(1) 当 $(n, q) > 1$ 时, $\chi(n) = 0$;

(2) 对任意的整数 n, 有 $\chi(n + q) = \chi(n)$;

(3) 对任意的整数 n, m, 有 $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$,

则称 $\chi(n)$ 为模 q 的 Dirichlet 特征.

特别地, 定义具有下面性质的模 q 的主特征 χ_0:

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & (n, q) = 1, \\ 0, & (n, q) > 1. \end{cases}$$

通过上述的定义可知模 q 的 Dirichlet 特征具备如下的性质.

命题 1.3　存在 $\phi(q)$ 个互不相同的模 q 的 Dirichlet 特征, 这些特征是完全可乘的, 并且以 q 为周期, 即有

$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n), \quad \chi(n + q) = \chi(n),$$

其中, m, n 为任意整数. 相反地, 如果 χ 为完全可乘的且以 q 为周期, 并且当 $(n, q) > 1$ 时, $\chi(n) = 0$, 则 χ 必为模 q 的一个 Dirichlet 特征.

命题 1.4　设 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\phi(q)}$ 是模 q 的 $\phi(q)$ 个 Dirichlet 特征, m, n 为任意的整数, 并且 $(n, q) = 1$, 则有

$$\sum_{r=1}^{\phi(q)} \chi_r(m)\overline{\chi}_r(n) = \begin{cases} \phi(q), & m \equiv n (\mathrm{mod}\ q), \\ 0, & m \not\equiv n (\mathrm{mod}\ q). \end{cases}$$

3) 三角和恒等式

设 m 和 q 为固定整数, 指数函数 $f(n) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mn/q}$ 是以 q 为周期的算术函数.

命题 1.5 对于固定的整数 $q \geqslant 1$, 令

$$g(n) = \sum_{m=0}^{q-1} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mn/q},$$

则有

$$g(n) = \begin{cases} 0, & q \nmid n, \\ q, & q \mid n. \end{cases}$$

4) Gauss 和

定义 1.2 设 q 为正整数, χ 为模 q 的 Dirichlet 特征. 对于任意的整数 n, Gauss 和定义如下:

$$G(n, \chi) := \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e\left(\frac{nm}{q}\right).$$

当 $n = 1$ 时, 记

$$\tau(\chi) := \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e\left(\frac{m}{q}\right).$$

命题 1.6 设 χ 为模 q 的原特征, 则有

$$|G(1, \chi)|^2 = |\tau(\chi)|^2 = q.$$

5) Ramanujan 和

定义 1.3 设 n 为固定整数, 定义 Ramanujan 和如下:

$$C_q(n) := \sum_{\substack{m \bmod q \\ (m,q)=1}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mn/q}.$$

当 $q|n$ 时, $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mn/q} = 1$, 此时有 $C_q(n) = \phi(q)$.

命题 1.7 对于任意的整数 n, 有

$$C_{p^\alpha}(n) = \sum_{d|(p^\alpha, n)} d\mu\left(\frac{p^\alpha}{d}\right) = \begin{cases} \phi(p^\alpha), & p^\alpha \mid n, \\ -p^{\alpha-1}, & p^{\alpha-1} \mid n, \\ 0, & p^{\alpha-1} \nmid n. \end{cases}$$

第 2 章　几类指数和

指数和作为解析数论的重要研究内容之一, 具有悠久的历史和丰富的内容. 指数和的研究不仅与一些著名的数论难题, 如哥德巴赫猜想、华林问题、 Linnik 猜想、Sato-Tate 猜想和算术序列中的除数问题等有密切的联系, 而且对编码学、密码学[3, 4] 以及计算机科学理论都有很重要的应用. 因此, 对指数和的探讨一直都具有深刻的意义.

一般地, 将指数和定义为如下形式:

$$S(\mathcal{X}, f) := \sum_{n\in\mathcal{X}} e_m(f(n)),$$

其中, $e_m(f(n)) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} f(n)}{m}}$; $\mathcal{X}$ 是任意的整数集合; $f(n)$ 是定义在集合 $\mathcal{X}$ 上的整值函数.

因为对任意的实数 z 都有 $|e_m(z)| = 1$, 所以

$$|S(\mathcal{X}, f)| \leqslant \sharp\mathcal{X}.$$

通常将上式称为指数和的平凡上界. 如何得到非平凡上界则是重要的研究课题.

Weyl[5], Mordell[6], Vinogradov[7], Weil[8], Hua[9], Deligne[10] 等都对指数和进行了深入的研究并得到了丰富的研究成果. 特别是 Weil[8] 得到的上界到目前为止都是最好的, 并且在很多情况下都有很重要的应用.

本章将主要研究几类特殊指数和的单个上界估计、高次均值和混合均值.

2.1　经典 Kloosterman 和在光滑数集上的上界估计

指数和中的经典 Kloosterman 和最早出现在 1912 年 Poincaré 的一篇论文中, 当时并没有引起人们足够的重视. 直到 1926 年, Kloosterman[11] 在表整数为四项二次型 $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ 的表法个数时再次使用这一和式而得名, 具体定义为

$$K(a, b; m) := {\sum_{n=1}^{m}}' e_m\left(an + b\overline{n}\right), \tag{2.1.1}$$

其中, ${\sum\limits_{n=1}^{m}}'$ 表示对所有满足 $1 \leqslant n \leqslant m$ 且 $(n, m) = 1$ 的整数 n 求和; $\overline{n}$ 满足同余方程 $n\overline{n} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$.

当 $m=q$ 为素数且 $(a,b,q)=1$ 时, Kloosterman[11] 给出了如下非平凡上界估计:

$$|K(a,b;q)| \ll q^{3/4}.$$

在此基础上, Davenport[12] 将上面的估计改进为 $q^{2/3}$. Estermann[13] 得到了估计

$$|K(a,b;m)| \leqslant m^{1/2}d(m)(a,b,m)^{1/2}, \tag{2.1.2}$$

其中, $d(m)$ 为除数函数; (a,b,m) 表示 a,b,m 的最大公因数.

目前认为式 (2.1.2) 中的估计是最好的, 因此很多学者尝试通过对 Kloosterman 和加权求均值来进一步研究是否存在相消性. 例如, Kuznetsov[14] 利用固定 a,b, 对模 m 求和的加权均值来研究 Linnik 猜想. 与此相对应地, Fouvry 等[15]、Niederreiter[16]、Shparlinski[17, 18]、Khan[19]、Liu 等[20] 通过固定模 m, 对系数 a,b 分别求和来研究 Kloosterman 和的加权均值, 相关结果都有重要应用.

定义不完整的 Kloosterman 和为

$$K(a,b;m,x) := \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{x} e_m\left(an+b\overline{n}\right), \tag{2.1.3}$$

其中, $1 \leqslant x \leqslant m-1$. 利用 Hua[21] 考虑不完整三角和的方法, 可得

$$|K(a,b;m,x)| \leqslant m^{1/2+\varepsilon}(a,b,m)^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

此外, 除了研究 Kloosterman 和在连续数集上的均值估计, 近年来很多学者还研究了 Kloosterman 和在一些特殊数集 $\mathcal{S}$ 上的问题. 集合 $\mathcal{S}$ 越复杂, Kloosterman 和的上界越难控制, 这使得 Kloosterman 和在特殊数集上的估计越有挑战性.

当集合 $\mathcal{S}$ 取素数集时, 令

$$S_m(a;x) := \sum_{\substack{x<p<2x \\ (p,\ m)=1}} e_m(a\overline{p}),$$

其中, $x \geqslant 2$; m,a 是整数且 $m \geqslant 2$; $(a,m)=1$; p 是素数.

当 $m=q$ 为素数时, 在 1998 年, Fouvry 和 Michel[22] 得到: 对任意的 $\delta>0$, 存在 $\eta=\eta(\delta)>0$, 使得 $q^{3/4+\delta} \leqslant x \leqslant q$ 时,

$$S_q(a;x) \ll_\delta x^{1-\eta} \tag{2.1.5}$$

成立. 2005 年, Bourgain[23] 改进了 Fouvry 和 Michel[22] 的结果并得到当 $q^{1/2+\delta} \leqslant x \leqslant q$ 时, 式 (2.1.5) 也成立.

2011 年, Fouvry 和 Shparlinski[24] 拓展了 Garaev[25] 的工作, 将素数模 q 换成合数 m 并得到对任意的 $\varepsilon>0$, 当 $m^{\frac{3}{4}}\leqslant x\leqslant m^{\frac{4}{3}}$ 时, 有

$$S_m(a;x)\ll\left(x^{\frac{15}{16}}+m^{\frac{1}{4}}x^{\frac{2}{3}}\right)m^{\varepsilon}. \tag{2.1.6}$$

并通过固定系数 a, 对 m 求均值, 从而得到

$$\sum_{m\sim M}\max_{(a,m)=1}|S_m(a;x)|\ll_{\varepsilon}\left(M^{\frac{13}{10}}x^{\frac{3}{5}}+M^{\frac{13}{12}}x^{\frac{5}{6}}\right)M^{\varepsilon}, \tag{2.1.7}$$

其中, $M^{\frac{3}{2}}\geqslant x\geqslant 2$.

Baker[26] 推广了 Bourgain[23] 的结果, 但是对 m 有限制, 即满足条件

$$m=uv,\ (u,v)=1, \tag{2.1.8}$$

其中, u 是无平方因子数; v 是完全平方数. 并得到上界估计

$$S_m(a;x)\ll_{\delta}x^{1-\delta^4/2000}, \tag{2.1.9}$$

式中, $v\leqslant x^{\frac{1}{4}};0<\delta\leqslant\dfrac{1}{24};\ vm^{\frac{1}{2}+\delta}\leqslant x\leqslant m^{\frac{3}{4}+\delta}$.

显然, 他将 x 的下界减小到 $m^{\frac{1}{2}+\delta}$. 同样地, Baker[26] 改进了式 (2.1.7) 的上界并得到: 当 $M^{\frac{1}{2}}\leqslant x\leqslant 2M$ 时, 有

$$\sum_{m\sim M}\max_{(a,m)=1}|S_m(a;x)|\ll_{\varepsilon}\left(M^{\frac{11}{10}}x^{\frac{4}{5}}+Mx^{\frac{11}{12}}\right)M^{\varepsilon}. \tag{2.1.10}$$

2014 年, Irving[27] 得到

$$\sum_{m\sim M}\max_{(a,m)=1}|S_m(a;x)|\ll_{\varepsilon}\left(M^{\frac{5}{4}}x^{\frac{5}{8}}+Mx^{\frac{9}{10}}+M^{\frac{7}{6}}x^{\frac{13}{18}}\right)M^{\varepsilon}, \tag{2.1.11}$$

其中, $M^{\frac{3}{2}}\geqslant x\geqslant M^{\frac{2}{3}}$. 式 (2.1.11) 的结果比式 (2.1.7) 更强.

对于指数和在其他特殊数集上界估计问题的研究还有很多, 如 Banks [28], Shparlinski [29] 和 Gong [30] 研究了指数和、特征和在光滑数集上的问题并得到很好的上界估计. 本书在此背景下研究 Kloosterman 和在光滑数集以及无平方因子数集上的上界估计.

设 x 为正整数, $P(x)$ 表示 x 的最大素因子, 且规定 $P(1)=1$. 如果 $P(x)\leqslant y$, 就称 x 为 y-光滑数, 其中 y 为正整数, 且 $2\leqslant y<x$.

本节主要研究 Kloosterman 和在光滑数集上的均值估计问题, 它是 Shparlinski[31] 提出的公开问题 20, 形式如下:

$$T(a,m):=\sideset{}{'}\sum_{n\in\mathcal{S}(x,y)}e_m(a\overline{n}),$$

其中, $\mathcal{S}(x,y)$ 是 y-光滑数, 且

$$\mathcal{S}(x,y)=\{n \mid 1\leqslant n\leqslant x, P(n)\leqslant y\}.$$

为了探究上式是否存在更好的估计, 对和式 $T(a,m)$ 的模 m 求均值

$$\sum_{m\sim M}\max_{(a,m)=1}|T(a,m)|,$$

其中, $m\sim M$ 表示 $M\leqslant m<2M$.

首先给出一些引理作为定理证明的准备.

引理 2.1.1　设 m 为正整数且 $(m,n)=1$, a 为整数, 实数 $Y<Z$, 则有

$$\sum_{Y<n<Z} e\left(\frac{a\bar{n}}{m}\right) \ll \mu^2\left(\frac{m}{(a,m)}\right)\left(\frac{Z-Y}{m}+1\right)\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\dfrac{m}{(a,m)}\right)} + \tau(m)\tau((a,m))(\ln 2m)m^{\frac{1}{2}}.$$

证明　见文献 [24].

下面要证明的引理与 Friedlander 和 Iwaniec[32] 的证明思路类似, 不同的是将求和区间扩展到任意的区间, 且区间长度不限定小于模长 m.

引理 2.1.2　设 m 为正整数, a 是与 m 互素的整数. 令 K,L,X,Y 为实数且 $X,Y>0$, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{K<k\leqslant K+X}\left|\sum_{L<l\leqslant L+Y} e_m(a\overline{kl})\right| \ll \left(XY^{\frac{1}{2}}+XYm^{-\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}Y\right)m^{\varepsilon}.$$

证明　应用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{K<k\leqslant K+X}\left|\sum_{L<l\leqslant L+Y} e_m(a\overline{kl})\right|\right)^2\\
&\ll X\sum_{K<k\leqslant K+X}\left|\sum_{L<l\leqslant L+Y} e_m(a\overline{kl})\right|^2\\
&\ll X\sum_{L<l_1\leqslant L+Y}\sum_{L<l_2\leqslant L+Y}\left|\sum_{K<k\leqslant K+X} e_m(a\overline{k}(\overline{l_1}-\overline{l_2}))\right|\\
&\ll X^2Y+X\sum_{\substack{L<l_1,l_2\leqslant L+Y\\ l_1\neq l_2}}\left(\left(\frac{X}{m}+1\right)\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\dfrac{m}{((l_1-l_2),m)}\right)}\right.\\
&\qquad\left.+\tau(m)\tau((l_1-l_2,m))(\ln 2m)m^{\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

其中用到引理 2.1.1 以及 $(\overline{l_1}-\overline{l_2},m)=(l_1-l_2,m)$.

又因为 $\varphi(m)/\varphi(t)\leqslant m/t$ 对所有 $t|m$ 都成立, 且 $\tau(m)\ll m^{\varepsilon}$, 所以可以得到

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{K<k\leqslant K+X}\left|\sum_{L<l\leqslant L+Y}e_m(a\overline{kl})\right|\right)^2\\ \ll\ & X^2Y+X\left(\frac{X}{m}+1\right)\sum_{\substack{L<l_1,l_2\leqslant L+Y\\ l_1\neq l_2}}((l_1-l_2),m)+XY^2m^{\frac12+\varepsilon}\\ \ll\ & X^2Y+X\left(\frac{X}{m}+1\right)Y^2m^{\varepsilon}+XY^2m^{\frac12+\varepsilon}\\ \ll\ & X^2Ym^{\varepsilon}+(XY)^2m^{-1+\varepsilon}+XY^2m^{\frac12+\varepsilon}.\end{aligned}$$

从而引理 2.1.2 得证.

如果 $K=0$, 则引理 2.1.2 的结果可由以下引理改进.

引理 2.1.3 对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $c(\varepsilon)>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\sum_{k\leqslant X}\left|\sum_{L<l\leqslant L+Y}e_m(a\overline{kl})\right|\\ \leqslant\ & c(\varepsilon)m^{\varepsilon}\left(m^{\frac14}Y^{\frac{7}{12}}X^{\frac56}+m^{\frac12}Y^{\frac13}X^{\frac{7}{12}}+m^{\frac{1}{16}}Y^{\frac34}X+m^{-\frac{3}{16}}Y^{\frac{11}{12}}X^{\frac76}\right).\end{aligned}$$

证明 见文献 [32].

引理 2.1.4 假设 $2\leqslant y\leqslant z<n\leqslant x$ 且 $n\in S(x,y)$, 则存在唯一的一组整数 (p,u,v) 具有以下性质:

(1) $n=uv$;

(2) $u\in S(x/v,p)$;

(3) $z<v\leqslant zp$;

(4) $p|v$;

(5) 若 $r|v$, 则 $p\leqslant r\leqslant y$.

证明 见文献 [33].

引理 2.1.5 假设

$$L(H)=\sum_{i=1}^{m}A_iH^{a_i}+\sum_{j=1}^{n}B_jH^{-b_j},$$

其中, A_i,B_j,a_i,b_j 是正数. 若 $0\leqslant H_1\leqslant H_2$, 则存在 H 满足 $H_1\leqslant H\leqslant H_2$ 且

$$L(H)\ll\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(A_i^{b_j}B_j^{a_i})^{1/(a_i+b_j)}+\sum_{i=1}^{m}A_iH_1^{a_i}+\sum_{j=1}^{n}B_jH_2^{-b_j}.$$

证明　见文献 [34].

为了得到双线性型 Kloosterman 和的上界, 记 $J_K(m)$ 为同余方程

$$\overline{n_1}+\overline{n_2}\equiv\overline{n_3}+\overline{n_4}\pmod m$$

的解的个数, 其中 n_i 为整数且 $(n_i,m)=1$, $1\leqslant n_i\leqslant K$.

引理 2.1.6　设 m 是正整数且 K, $M\geqslant 1$, 则

$$\sum_{m\sim M}J_K(m)\ll\left(K^2M+K^4\right)K^{\varepsilon}.$$

证明　见文献 [24].

结合上面的引理, 可得如下结论.

定理 2.1.1　对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $m^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x\leqslant m^{\frac{4}{3}+\varepsilon}$, 有

$$T(a,m)\ll\left(xy^{-\frac{1}{16}}+m^{\frac{1}{4}}xy^{-\frac{1}{3}}\right)m^{\varepsilon}.$$

证明　由文献 [28] 可知

$$T(a,m)=\sum_{n\leqslant x}e_m(a\overline{n})-\sum_{\substack{n\leqslant x\\P(n)>y}}e_m(a\overline{n}).$$

对于右边第一项, 由式 (2.1.4) 可得

$$\sum_{n\leqslant x}e_m(a\overline{n})\ll m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{2.1.12}$$

现在主要来估计右边第二项. 对于每一个整数 n 都可以唯一地表示成 $n=kp$, 式中素数 $p>y$, 正整数 k 满足 $P(k)\leqslant p$, 则

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\P(n)>y}}e_m(a\overline{n})=\sum_{\substack{p>y\\p\nmid m}}\sum_{\substack{k\leqslant x/p\\P(k)\leqslant p\\(k,m)=1}}e_m(a\overline{kp}).$$

令 $L_k=\max\{y,P(k)-1\}$, 则有

$$\sum_{\substack{p>y\\p\nmid m}}\sum_{\substack{k\leqslant x/p\\P(k)\leqslant p\\(k,m)=1}}e_m(a\overline{kp})=\sum_{\substack{k\leqslant x/y\\(k,m)=1}}\sum_{\substack{L_k<p\leqslant x/k\\p\nmid m}}e_m(a\overline{kp}).$$

由于 $m^{\frac{4}{3}+\varepsilon}\geqslant x\geqslant y\geqslant m^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$, 可以利用式 (2.1.6) 来估计关于 p 的内层和, 从而得到

$$\sum_{\substack{k\leqslant x/y\\(k,m)=1}}\sum_{\substack{L_k<p\leqslant x/k\\p\nmid m}}e_m(a\overline{kp})$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \sum_{\substack{k\leqslant x/y\\(k,m)=1}}\left(\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{15}{16}}+m^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\right)m^{\varepsilon}\\
&\ll m^{\varepsilon}x^{\frac{15}{16}}\sum_{k\leqslant x/y}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{15}{16}}+m^{\frac{1}{4}+\varepsilon}x^{\frac{2}{3}}\sum_{k\leqslant x/y}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\\
&\ll m^{\varepsilon}x^{\frac{15}{16}}x^{\frac{1}{16}}y^{-\frac{1}{16}}+m^{\frac{1}{4}+\varepsilon}x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\\
&\ll xy^{-\frac{1}{16}}m^{\varepsilon}+xy^{-\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

结合式 (2.1.12), 可以得到

$$T(a,m)\ll m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}+xy^{-\frac{1}{16}}m^{\varepsilon}+xy^{-\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

由于右边第一项不是主要项, 因此定理 2.1.1 得证.

定理 2.1.2 令 v 定义为式 (2.1.8) 的形式且 $v\leqslant x^{\frac{1}{4}}$, $0<\delta\leqslant\dfrac{1}{24}$. 若 $vm^{\frac{1}{2}+\delta}\leqslant y\leqslant x\leqslant m^{\frac{3}{4}+\delta}$, 则

$$T(a,m)\ll_{\delta} xy^{-\frac{\delta^4}{2000}}.$$

证明 定理 2.1.2 的证明与定理 2.1.1 的证明类似, 只需将式 (2.1.6) 换成式 (2.1.9), 定理 2.1.2 即可得证.

注记 显然定理 2.1.2 中 x 的下界与定理 2.1.1 相比减小到 $m^{\frac{1}{2}+\delta}$.

定理 2.1.3 对任意的 $\varepsilon>0$, 当 $2\leqslant y<x^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}$ 时, 有

$$T(a,m)\ll m^{\frac{1}{10}+\varepsilon}x^{\frac{4}{5}}(\ln x)^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{5}}+m^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}x(\ln x)^{2}.$$

证明 固定实数 z 使得 $2\leqslant y\leqslant z\leqslant x$. 根据引理 2.1.4, 可得

$$T(a,m)=\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\n>z}}e_m(a\overline{n})+O(z)=\sum_{p\leqslant y}U_a(p,x,y,z)+O(z),\tag{2.1.13}$$

其中,

$$U_a(p,x,y,z)=\sum_{v\in\Omega(p,y,z)}\ \sum_{u\in\mathcal{S}(x/v,p)}e_m(a\overline{uv}),$$

且

$$\Omega(p,y,z)=\left\{v: z<v\leqslant zp,\ p|v,\ 若素数\ r|v,\ 则\ p\leqslant r\leqslant y\right\}.$$

令 $v=pw$, 则

$$|U_a(p,x,y,z)|\leqslant\sum_{z/p<w\leqslant z}\left|\sum_{u\in\mathcal{S}(x/wp,p)}e_m(a\overline{upw})\right|.$$

选取 Δ 满足 $y/z \ll \Delta < 1/2$, 令

$$\mathcal{M}(p,z)=\left\{\frac{z}{2p}(1+\Delta)^j : 0\leqslant j\leqslant N\right\},$$

其中,

$$N=\left\lfloor\frac{\ln(2p)}{\ln(1+\Delta)}\right\rfloor \ll \Delta^{-1}\ln p \ll \Delta^{-1}\ln x.$$

因此可得

$$\sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)} A^{\frac{1}{2}} \ll \Delta^{-1} z^{\frac{1}{2}}\ln x,$$

$$\sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)} A^{-\frac{1}{2}} \ll \Delta^{-1} (p/z)^{\frac{1}{2}}\ln x.$$

由 $A<w\leqslant A(1+\Delta)$ 可知

$$0\leqslant \sharp\mathcal{S}(x/Ap,p)-\sharp\mathcal{S}(x/wp,p)\leqslant \frac{x}{Ap}-\frac{x}{wp}\leqslant\frac{\Delta x}{Ap}.$$

对任意的 $A\in\mathcal{M}(p,z)$, 都有 $\Delta A\gg 1$. 因此,

$$\begin{aligned}
U_a(p,x,y,z) &\leqslant \sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)}\ \sum_{A<w\leqslant A(1+\Delta)}\left|\sum_{u\in\mathcal{S}(x/wp,p)} e_m(a\overline{upw})\right| \\
&\leqslant \sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)}\ \sum_{A<w\leqslant A(1+\Delta)}\left(\left|\sum_{u\in\mathcal{S}(x/Ap,p)} e_m(a\overline{upw})\right|+\frac{\Delta x}{Ap}\right) \\
&= \sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)}\left(\sum_{A<w\leqslant A(1+\Delta)}\left|\sum_{u\in\mathcal{S}(x/Ap,p)} e_m(a\overline{upw})\right|+O\left(\frac{\Delta^2 x}{p}\right)\right) \\
&= \sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)} W(p,x,z,A)+O\left(\frac{\Delta^2 xN}{p}\right),
\end{aligned}$$

其中,

$$W(p,x,z,A)=\sum_{A<w\leqslant A(1+\Delta)}\left|\sum_{u\in\mathcal{S}(x/Ap,p)} e_m(a\overline{upw})\right|.$$

根据引理 2.1.2, 可得

$$W(p,x,z,A)\ll m^{\varepsilon}\left(\Delta A\left(\frac{x}{Ap}\right)^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{4}}(\Delta A)^{\frac{1}{2}}\frac{x}{Ap}+\frac{\Delta x}{p}m^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{2.1.14}$$

由此可得

$$U_a(p,x,y,z) \ll \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4,$$

其中,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= m^{\varepsilon}\frac{\Delta x^{\frac12}}{p^{\frac12}}\sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)}A^{\frac12} \ll m^{\varepsilon}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac12} z^{\frac12}\ln x,\\
\Sigma_2 &= m^{\frac14+\varepsilon}\frac{\Delta^{\frac12}x}{p}\sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)}A^{-\frac12} \ll m^{\frac14+\varepsilon}\frac{x}{(\Delta pz)^{\frac12}}\ln x,\\
\Sigma_3 &= \frac{\Delta x}{p}m^{-\frac12}\sum_{A\in\mathcal{M}(p,z)}1 \ll \frac{x}{p}m^{-\frac12+\varepsilon}\ln x,\\
\Sigma_4 &= \frac{\Delta^2 xN}{p} \ll \frac{\Delta x\ln x}{p}.
\end{aligned}$$

利用式 (2.1.14), 可得

$$\begin{aligned}
T(a,m) \ll{}& m^{\varepsilon}\left((xyz)^{\frac12}\ln x+\Delta^{-\frac12}xm^{\frac14}y^{\frac12}z^{-\frac12}\ln x+xm^{-\frac12}(\ln x)^2\right)\\
&+\Delta x(\ln x)^2+z.
\end{aligned}$$

由于 $z\leqslant x$, 右边最后一项不是主要项.

为了估计 $T(a,m)$, 根据引理 2.1.5, 令 $\Delta_1=\dfrac{y}{z}$, $\Delta_2=\dfrac12$, 可以找到 Δ 满足条件 $y/z\ll\Delta<1/2$, 并使得

$$\begin{aligned}
T(a,m) \ll{}& xm^{\frac16+\varepsilon}y^{\frac13}z^{-\frac13}(\ln x)^{\frac43}+xm^{\frac14+\varepsilon}y^{\frac12}z^{-\frac12}\ln x\\
&+m^{\varepsilon}xyz^{-1}(\ln x)^2+m^{\varepsilon}(xyz)^{\frac12}\ln x+xm^{-\frac12+\varepsilon}(\ln x)^2.
\end{aligned}$$

再根据引理 2.1.5, 令 $z_1=y$, $z_2=x$, 可以找到 z 满足 $y\leqslant z\leqslant x$, 使得

$$\begin{aligned}
T(a,m) \ll{}& x^{\frac45}y^{\frac25}m^{\frac1{10}+\varepsilon}(\ln x)^{\frac65}+x^{\frac34}y^{\frac12}m^{\frac18+\varepsilon}\ln x+m^{\varepsilon}(xy)^{\frac23}(\ln x)^{\frac43}+y(\ln x)^2\\
&+x^{\frac23}y^{\frac13}m^{\frac16+\varepsilon}(\ln x)^{\frac43}+x^{\frac12}y^{\frac12}m^{\frac14+\varepsilon}\ln x+m^{\varepsilon}x^{\frac12}y\ln x+xm^{-\frac12+\varepsilon}(\ln x)^2.
\end{aligned}$$

由 $y<x^{\frac12}m^{-\frac14+\varepsilon}$ 知, 右边第一项和最后一项是主要项, 因此定理 2.1.3 得证.

定理 2.1.4 对任意的 $\varepsilon>0$, $y<x<my$, 可得

$$T(a,m)\ll m^{\frac14+\varepsilon}x^{\frac23}y^{\frac{11}{24}}(\ln x)^{\frac32}.$$

证明 类似定理 2.1.3 的证明, 只需将定理 2.1.3 的证明中的式 (2.1.14) 结合引理 2.1.3 即可证明定理 2.1.4.

注记 与定理 2.1.1 和定理 2.1.2 相比, 定理 2.1.3 得到了 y 取较小值时的上界. 当 $x>m^{\frac34+\varepsilon}y^{\frac{11}{8}}$ 时, 定理 2.1.4 是非平凡的, 并且当 $x>m^{\frac98+\varepsilon}y^{\frac7{16}}$ 时, 定理 2.1.4 改进了定理 2.1.3 式子中的右边第一项, 但比第二项的结果要弱.