

桥梁工程方向研究生教材

FINITE ELEMENT ANALYSIS
OF BRIDGE STRUCTURES

桥梁结构有限元分析

重庆交通大学 同济大学
长安大学 浙江大学 主 编
湖南大学
中南大学 主 审



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

桥梁工程方向研究生教材

桥梁结构有限元分析

Finite Element Analysis of Bridge Structures

重庆交通大学 周水兴 王小松

同济大学 赵林

长安大学 郝宪武

浙江大学 徐荣桥

湖南大学 李立峰

中南大学 戴公连 杨孟刚 主审

主编



人民交通出版社股份有限公司

China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本书是桥梁工程方向研究生教材之一,由重庆交通大学、同济大学、长安大学、浙江大学、湖南大学共同编写,中南大学主审。全书共10章,主要内容包括:概述,弹塑性力学及有限元基础,杆、梁、索单元,弹性力学中的平面和空间问题,等参数单元,板壳单元,几何非线性和材料非线性,桥梁结构有限元建模,桥梁结构动力效应,结构稳定问题。

本书可作为土木工程专业桥梁工程方向研究生的教学用书,同时可供本学科的科研人员和有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

桥梁结构有限元分析 / 重庆交通大学等主编. — 北

京:人民交通出版社股份有限公司,2018.5

ISBN 978-7-114-14554-4

I. ①桥… II. ①重… III. ①桥梁结构—有限元分析

IV. ①U443

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 030570 号

桥梁工程方向研究生教材

书 名:桥梁结构有限元分析

著 作 者:重庆交通大学 同济大学 长安大学 浙江大学 湖南大学

责任编辑:卢俊丽 李 喆

责任校对:宿秀英

责任印制:张 凯

出版发行:人民交通出版社股份有限公司

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址:<http://www.ccpress.com.cn>

销售电话:(010)59757973

总 经 销:人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销:各地新华书店

印 刷:北京鑫正大印刷有限公司

开 本:787×1092 1/16

印 张:22.25

字 数:524 千

版 次:2018年5月 第1版

印 次:2018年5月 第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-14554-4

定 价:62.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

出版说明

随着我国研究生招生规模的持续扩大,以及“双一流”建设的开展,各高校对研究生培养质量越来越重视。教材建设是教学的重要环节之一,做好教材建设是提高人才培养质量的重要保障。相比于本科教材,桥梁工程方向研究生教材规划建设相对薄弱,已不能满足教学实际需要。在此背景下,高等学校交通运输与工程教材建设委员会桥梁工程分委员会决定组织编写一套适用于新时期研究生教学需要的教材。

2016年10月28日在长安大学举行的高等学校交通运输与工程教材建设委员会桥梁工程分委员会第三次会议上,经主任委员葛耀君教授倡议,决定启动桥梁工程方向研究生教材的多校联合编审工作,并指定同济大学葛耀君教授、西南交通大学李亚东教授、重庆交通大学向中富教授作为联合编审组召集人。考虑各学校研究生教学的共性以及对教材需求的紧迫程度,经讨论确定的第一批联合编审的研究生教材有《高等桥梁结构试验》、《桥梁结构有限元分析》、《钢桥理论与设计》和《组合结构桥梁理论与设计》。2016年12月24日在西南交通大学召开了桥梁工程方向研究生教材第一次编审研讨会,制定了“参编自愿、合编共用、编用合一”的原则,并确定了各教材联合编审组,具体为:《高等桥梁结构试验》的主编单位为福州大学、武汉理工大学、重庆交通大学、东北林业大学,主审单位为同济大学;《桥梁结构有限元分析》的主编单位为:重庆交通大学、同济大学、浙江大学、

湖南大学、长安大学,主审单位为中南大学;《钢桥理论与设计》的主编单位为西南交通大学、长沙理工大学、长安大学、河海大学,主审单位为同济大学、北京交通大学;《组合结构桥梁理论与设计》的主编单位为东南大学、同济大学、长沙理工大学、北京交通大学,主审单位为西南交通大学、长安大学。2017年10月16日,在东南大学召开了桥梁工程方向研究生教材第二次编审研讨会,会议对四本教材的编写质量及进度进一步提出了相关要求。

为确保教材的编写质量,编审工作由编审单位共同参与、同步进行,即主审单位全程参与教材大纲、样章和正文的审查、修改和编写工作,开创了新的教材编审模式。

本系列教材汇集了国内主流院校研究生教学的经验和成果,贯彻了研究生教学和科研的要求,从规划、编写、审查到出版共有20多所高校和企事业单位参与,在编写过程中得到了主编单位和主审单位的大力支持。希望该套教材的出版能为我国桥梁工程专业研究生人才培养起到积极的作用,为我国桥梁工程事业的发展做出贡献。

高等学校交通运输与工程教材建设委员会

桥梁工程分委员会

2018年1月

序

《桥梁结构有限元分析》教材是在“高等学校交通运输与工程教材建设委员会——桥梁工程分委员会”的统一部署和指导下开展编审工作的。2016年10月28日在长安大学举行的分委员会第三次会议决定,启动桥梁工程专业研究生教材的多校联合编审工作,确定第一批联合编写的研究生教材有《高等桥梁结构试验》《桥梁结构有限元分析》《钢桥理论与设计》和《组合结构桥梁理论与设计》四部,并指定重庆交通大学向中富教授担任《桥梁结构有限元分析》教材联合编审组召集人,先后召集了编审组五次研讨会和五轮书稿审核,最终完成本教材的编写和审核工作。

2016年12月24日,在西南交通大学举办了“桥梁工程方向研究生教材”第一次编写研讨会暨《桥梁结构有限元分析》教材编审组第一次研讨会,会议制定了多校联合编审原则——“参编自愿、合编共用、编用合一”,即教材的参编单位可以自愿申请,多校参与联合编写教材,参编单位承诺使用;选定本教材主审单位——中南大学,主编单位——重庆交通大学、同济大学、长安大学、浙江大学以及湖南大学,分工负责教材编审工作;明确了编写思路——“注重基础、强调应用、内容全面、兼顾不同院校使用”,由此确定教材编写内容包括应具备的弹塑性力学及有限元基础、弹性力学中的平面和空间问题等基础知识;应掌握的各类单元、几何非线性

性和材料非线性以及桥梁结构有限元建模分析等基本分析能力以及可选讲的桥梁结构动力效应和结构稳定问题等难度更高的结构分析能力。布置了书稿大纲和样章的编写工作。2017年2月28日,完成了书稿第一轮审核工作——编写大纲审核。

2017年4月1日,在重庆交通大学召开了本教材编写组第二次研讨会,会议就详细大纲进行了深入讨论,同时明确了下一步的工作和要求;会议对样章及其章节的内容提出了修改意见与建议;会议讨论确定了编审时间安排,应出版社要求,将交付出版的时间确定为2017年年底。2017年8月10日,完成了书稿第二轮审核工作——部分初稿审核。

2017年5月13日,在中南大学召开了本教材第三次编审组研讨会。主审单位参加会议,并决定在后续编写过程中邀请主审单位全程参与。会议就2017年4月1日会议上提出的《桥梁结构有限元分析》教材的详细大纲与样章分别进行了交流和讨论。决定本教材由10章组成,包括:概述,弹塑性力学及有限元基础,杆、梁、索单元,弹性力学中的平面和空间问题,等参数单元,板壳单元,几何非线性和材料非线性,桥梁结构有限元建模,桥梁结构动力效应以及结构稳定问题。并决定了各章的分节;会议讨论了编审时间安排,调整提前了主要时间节点,明确全书初稿8月31日提交。2017年9月6日,完成了书稿第三轮审核工作——全书初稿审核。

2017年9月8日,在人民交通出版社召开了本教材第四次编审组研讨会,会议结合主审单位初步审查意见,讨论确定了书稿需要统一修改的内容,明确了全书正文、图表和公式等的格式;会议对各章书稿需要调整和修改的内容逐一进行了讨论,详细列出了每位编写人员的修改内容;会议确定书稿完成和提交出版的时间提前到11月30日。2017年10月15日,完成了书稿第四轮审核工作——全书修改稿审核。

2017年10月16日,在东南大学召开了“桥梁工程方向研究生教材”第二次编写研讨会暨《桥梁结构有限元分析》教材编审组第五次研讨会,会议讨论确定了书稿需要再次统一的修改内容;会议对各章书稿内容再次进行了详细讨论,特别注意了内容重复,个别知识点疏漏,与桥梁工程的针对性以及文字和语句方面的问题;会议决定不再举行集中的编审研讨会,由各编写人对所编写的章节再次梳理、

修改后送主审单位、出版社及召集人。2017年11月10日,各编写人针对主审单位、出版社及召集人意见,再一次对书稿进行了修改;随后进行了统稿,并于2017年11月30日完成了书稿第五轮审核工作——全书书稿定稿,并提交人民交通出版社出版。

在此,特向各院校及编写人员、主审人以及出版社对本教材编写出版所付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。由于联合编审组成员专业水平有限,虽然尽了最大的努力,五次召开编审组研讨会、五轮审核书稿,但仍然难以保证书稿质量不存在问题,特别是编写中难免有错漏之处,敬请同行专家和专业读者批评指正。

向中富

重庆交通大学

2017年11月

前言

《桥梁结构有限元分析》是面向土木工程专业研究生(包括硕士生和博士生)的一门专业课程。有限单元法是解决复杂边值问题的一种有效方法,已成为桥梁工程结构分析的主要手段。《桥梁结构有限元分析》的任务是让学生了解有限单元法的发展,掌握有限元法的基本理论知识,熟悉有限元分析的基本过程、方法及工程应用,具备桥梁工程设计、施工以及服役中结构分析的基本技能。同时,可供从事桥梁及土木工程专业设计、施工、科研、管养等技术人员参考。

本教材是在具有结构有限元分析相关教材知识的基础上,针对桥梁工程发展实际与研究生学习需要,通过多校合作编写而成,全书共分为10章,其中:第1章概述,第2章弹塑性力学及有限元基础,第3章杆、梁、索单元,第4章弹性力学中的平面和空间问题,第5章等参数单元,第6章板壳单元,第7章几何非线性和材料非线性,第8章桥梁结构有限元建模,第9章桥梁结构动力效应,第10章结构稳定问题。

本教材的编写单位有重庆交通大学、同济大学、长安大学、浙江大学以及湖南大学,其中第1章由重庆交通大学周水兴教授编写,第2、9章及附录由同济大学赵林教授编写,第3章由重庆交通大学王小松教授编写,第4章由长安大学郝宪武教授编写,第5、6、7章由浙江大学徐荣桥教授编写,第8章由重庆交通大学周水兴教授和湖南大学李立峰教授共同编写,第10章由湖南大学李立峰教授编写。

全书由重庆交通大学周水兴教授和向中富教授统稿,中南大学戴公连教授、黄方林教授、杨孟刚教授、文颖副教授、周智辉副教授以及邹云峰讲师主审。

由于编者水平有限,教材中难免有差错和不当之处,敬请专家同行和读者批评指正。

编者
2017 年 11 月

目录

第1章 概述	1
1.1 有限单元法及其发展简况	1
1.2 有限单元法分析的基本过程	4
1.3 有限元法的应用	6
1.4 有限元软件介绍	10
思考题	14
本章参考文献	14
第2章 弹塑性力学及有限元基础	15
2.1 应力应变	15
2.2 本构关系	20
2.3 屈服函数与屈服准则	28
2.4 有限单元法的基本原理与方程	32
思考题	43
本章参考文献	44
第3章 杆、梁、索单元	45
3.1 杆单元	46
3.2 梁单元	48
3.3 索单元	64
3.4 坐标变换	72
3.5 矩阵形式的平衡方程	75
3.6 平衡方程求解与后处理	80
3.7 特殊边界条件的处理	83
3.8 示例	86
思考题	91

本章参考文献	92
第4章 弹性力学中的平面和空间问题	93
4.1 平面三角形单元	93
4.2 形函数与面积坐标	96
4.3 单元刚度矩阵与等效节点荷载	101
4.4 平面矩形单元	106
4.5 空间轴对称单元	109
4.6 空间四面体单元	114
4.7 示例	120
思考题	128
本章参考文献	130
第5章 等参数单元	131
5.1 平面等参数单元	131
5.2 空间轴对称等参数单元	140
5.3 空间等参数单元	142
5.4 示例	149
思考题	153
本章参考文献	154
第6章 板壳单元	155
6.1 弹性板的弯曲	155
6.2 矩形薄板单元	158
6.3 三角形薄板单元	161
6.4 基于 Mindlin 板理论的四边形单元	167
6.5 平面壳体单元	169
6.6 退化壳单元	172
6.7 示例	175
思考题	179
本章参考文献	179
第7章 几何非线性和材料非线性	180
7.1 有限变形下的应变和应力	180
7.2 几何非线性	184
7.3 材料非线性	188
7.4 非线性有限元的求解方法	198
7.5 示例	201
思考题	202
本章参考文献	203
第8章 桥梁结构有限元建模	205
8.1 建模规划	205

8.2	整体建模	212
8.3	边界条件模拟	220
8.4	荷载模拟	230
8.5	局部分析	240
8.6	连续梁桥的建模方法与示例	249
8.7	斜拉桥的建模与验算	255
	思考题.....	266
	本章参考文献.....	266
第9章	桥梁结构动力效应	267
9.1	有限元动力学方程的建立	267
9.2	动力特性求解	271
9.3	动力学方程的解法	275
9.4	桥梁结构风致效应模拟	280
9.5	桥梁结构地震效应模拟	292
9.6	移动车辆荷载作用下桥梁振动响应分析	300
9.7	示例	302
	思考题.....	308
	本章参考文献.....	309
第10章	结构稳定问题	310
10.1	稳定问题的分类.....	310
10.2	稳定问题的求解方法.....	313
10.3	第一类稳定.....	317
10.4	第二类稳定.....	326
10.5	跃越失稳.....	327
10.6	桥梁稳定分析案例.....	328
	思考题.....	330
	本章参考文献.....	330
附录1	标量、矢量与张量	331
附1.1	矢量空间和运算法则	331
附1.2	标量场和矢量场	334
附1.3	张量性质	335
附1.4	张量运算法则	337
附1.5	示例	339

第1章

概述

引言:有限单元法是求解复杂边值问题的一种有效方法,本章回顾了有限单元法的发展情况,重点介绍了开展有限元分析的基本过程及其应用,最后扼要介绍了国内外通用的有限元软件和桥梁工程专业软件。

1.1 有限单元法及其发展简况

自然界中的许多工程分析问题,如固体力学中的位移场和应力场分析、电磁学中的电磁场分析、传热学中的温度场分析、流体力学中的流场分析,这些都可归结为在给定边界条件下求解其控制方程(常微分方程或偏微分方程)的问题。求解控制方程的方法有解析法和数值法。对于给定的问题,如果经简化后可将方程和边界条件转化为能够处理的问题,用具体的表达式来获得问题的解答,这样的求解方法称之为解析法。然而,能用解析法求出精确解的只有少数方程性质比较简单、几何边界相当规则的情况,过多的简化可能导致不准确的甚至错误的解。绝大多数的科学研究和工程技术问题,由于其几何形状、边界条件、材料特性和外部荷载的复杂性和不规则性或者问题的某些非线性特征,很少能得到解析解。在广泛吸收现代数学、力学理论的基础上,借助于计算机来获得满足工程要求的数值解,即数值模拟技术。

目前在工程技术领域中常用的数值模拟技术方法有:有限单元法、无限单元法、边界元法、无网格法、样条有限元法、离散单元法和有限差分法。但就其实用性和应用的广泛性而言,主

要是有限单元法。

1.1.1 有限单元法

有限单元法是将求解区域看作由许多在节点处互相连接的子域(单元)所构成,其分析模型是给出基本方程的(子域)分片近似解。有限单元法起源于20世纪40年代。1943年,Richard Courant 在求解扭转问题时,将截面划分为若干三角形区域,在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数,通过定义在三角形域上的分片连续函数,利用最小势能原理求得了圣维南扭转问题的正确解。由于当时计算机尚未出现,并没有引起人们的注意。之后,人们认识到 Richard Courant 工作的重大意义,并将1943年作为有限单元法的诞生之年。1955年,德国出现了第一本关于结构分析中的能量原理和矩阵方法的书,为后续有限元研究奠定了重要的基础。1956年,M. J. Turner、R. W. Clough、H. C. Martin 和 L. J. Topp 在分析飞机机翼强度时,系统研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式,将矩阵位移法推广应用于弹性力学平面问题中,第一次采用三角形单元求解平面应力问题。1960年,R. W. Clough 教授进一步处理了平面弹性问题,将应用范围扩展到飞机以外的土木工程中,首次使用有限单元法(Finite Element Method,简称FEM)一词,并得到广泛认可。到20世纪60~70年代,随着计算机和软件技术的发展,有限单元法也随之迅速发展起来。在此期间,力学家和数学家对有限单元法进行了全面深入的研究,包括有限单元法在数学和力学领域的理论依据,证明了有限单元法是基于变分原理的里兹法的另一种形式,确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法;单元的划分原则,形状函数的选择及协调性;有限元方法涉及的数值计算方法及其误差、收敛性和稳定性;计算程序设计技术等。我国学者对有限单元法的创建和发展做出了不少贡献,20世纪60年代初,冯康与西方国家几乎同时,独立地发展了有限单元法理论,1964年,创立了数值求解偏微分方程的有限单元方法,形成了标准的算法形态,编制了通用的工程结构分析计算程序。1965年,冯康提出了基于变分原理的差分格式,标志着有限单元法在我国的诞生。1967年,辛克维奇(O. C. Zienkiewicz)教授与张佑启(Cheung)教授出版了世界上第一本有限元法著作《The Finite Element Method in Structural Mechanics》,研制了英国第一套有限元软件并应用于Clywedog水坝的计算。1971年,卞学璜指出,对某些边值问题,有限单元法和有限差分法的方程组是一致的,但有限单元法比一般的瑞利—里兹法更灵活,在不规则区域和非匀质问题中比差分法更方便。1981年起,龙驭球针对位移型有限元的“协调之谜”,建立了广义协调理论与广义协调元,从根本上解决了有限元法中非协调不收敛的难题,把后验式“分片检验”方法变成预先的理论保证,重新发现被传统方法排斥在外的上百个高性能结构新单元模型。2004年,针对麦克尼尔细长梁问题,提出了基于四边形面积坐标的广义协调元AGQ6,彻底解决了四边形单元网格的畸变敏感问题,广泛应用于壳体三重非线性大变形分析、金属板壳成形、金属罐刺穿冲击断裂等问题中;提出的分区混合有限元法,破解了应力奇点计算难题,成为迄今为止计算代价最小、精确度最好的奇异问题有限元分析方法。

然而,有限元方法与其他近似数值方法一样,都存在算法的可靠性和有效性低的问题。有限元分析结果的误差来自于分析过程的各个环节,其中一个主要的误差来源是模型的离散化,网格剖分的质量对分析结果的精度有决定性影响。单凭经验、直觉和猜测的网格剖分,存在分析效率低和可靠性低等问题。1971年,Oliverira通过极小化能量,利用最优节点分布,讨论了网格的优化问题,提出了在应变能密度变化最大的区域加密网格或增设插值函数的高阶自由

度,奠定了自适应有限单元法的基础。自适应有限单元法是以误差估计与自适应网格改进技术为核心,通过后验误差估计进行自动调整算法以改进求解过程的高效率、高可靠性的数值方法。分析之初,只需定义描述问题几何特性的初始网格和可接受的误差水平,由程序自动对误差较大的区域产生满足要求的网格。自适应有限元法涉及的主要技术问题有误差估计、网格自适应改进以及瞬态问题的时间步长自适应调整等。自适应有限元法中有 h-法、p-法、h-p 组合法。h-法不改变单元阶次,仅在局部区域进行网格加密以提高求解精度。p-法是在需优化的区域中不改变划分网格的大小,仅通过逐次增加单元的阶次来提高精度。h-p 组合法是在需要优化的区域内,将网格尺寸和单元的阶次同时改进,以达到网格参数 h 、 p 的最优配置,从而高效提高网格精度。

1.1.2 其他数值方法

为适应不同工程问题的求解,克服有限单元法的某些不足,相继提出了多种数值分析方法,如边界元法、无限单元法、无网格法、显式/隐式有限元法、离散单元法、刚体弹簧单元法、界面元法、超级有限元法、样条有限元法、动态有限元法、随机有限元法、时间域有限元法、非协调有限元法、混合有限元法、间断 Galerkin 有限元法、有限条(带)法、刚塑性有限元法等。

边界元法:也称边界积分方程法,是 20 世纪 60 年代发展起来的一种新数值方法。与有限元法在连续体域内划分单元的基本思想不同,边界元法仅在定义域的边界上划分单元,用满足控制方程的函数去逼近边界条件,因此边界元与有限元相比具有单元和未知数少、数据准备简单等优点。边界元法分为直接法和间接法两种基本类型,大量工程分析中多采用直接边界元法。边界元法适用于求解高维、奇异、耦合、无限域等复杂问题,在岩土地质工程、地下结构、流-固耦合、海洋工程、热传导技术和电磁场等工业技术领域应用广泛。

无限单元法:也称无界单元、无穷单元法,是在有限元基础上发展起来的一种计算方法,主要用于数值模拟无限或半无限域问题,如工程地震中地震波的传播、地面结构与地基的相互作用分析,海洋工程中波浪与结构相互作用分析,水库、岩土、地下结构、地质力学的分析等。无限元法包括两大类,一类是离散型无限元,它是在有限元基础上将计算域边界处的单元沿外法向无限延伸而成,由于单元是无限的,因此其形函数不再是原来简单分片多项式插值函数,而沿无限方向引入解析函数,故属于半解析数值方法的一种,一般简称为无限元法。这类无限元往往和一般有限元分区联合应用。另一类是半解析型无限元,它是在半解析有限元基础上延伸发展形成的,某些方向解析、某些方向离散的半解析单元法中,如果解析方向是沿无限方向,即构成这类无限元。因此,半解析型无限元往往有一个以上方向采用解析函数,并且沿无限方向采用的是解析函数级数。这种单元是半解析单元法与分向半解析法的一种,可以和半解析有限元分区耦合使用,也可以独立应用。

无网格法:无网格法兴起于 20 世纪 90 年代,与基于网格的有限元等方法不同,无网格法用一组点来离散求解区域,直接借助于离散点来构造近似函数,可以彻底或部分消除网格,不需要网格的初始划分和重构,不仅可以保证计算的精度,而且可以减小计算的难度。基于网格的数值方法,如有限差分法、边界元法、有限元法,在用拉格朗日法求解金属冲压成形、高速冲击和爆炸、裂纹动态扩展、流固耦合、形状优化等涉及特大变形或需要不断进行网格重构的问题时,不仅会产生畸变和扭曲,而且严重影响解的精度。无网格法也存在一些固有缺陷,如无网格近似函数一般很复杂,其计算量较大;大多数的无网格近似函数不具有插值特性,其本质

边界条件的施加比有限元繁琐等。目前已有 30 多种以加权余量法为主线的无网格法,主要区别在于所采用的加权余量法和试探函数,常用试探函数有移动最小二乘法、核函数与径向基函数。整体方程有配点法、最小二乘法、伽辽金法。伽辽金法是应用最广、最稳定的无网格法之一。

显式/隐式有限元法:显式/隐式有限元法只需对可以简化为对角阵的质量矩阵求逆,没有增量步内迭代收敛问题,可以一直计算下去。显式计算具有时间步长很小、误差累积、不存在迭代不收敛的问题、计算量随计算规模基本呈线性增长的特点。这种计算方法的代表软件有 ABAQUS。隐式计算具有时间步长增量较大、每个荷载步都能控制收敛,避免误差累积;存在迭代不收敛的问题、计算量随计算规模增大而呈超线性增长的特点。

离散单元法:离散单元法也称为散体单元法,最早是 1971 年由 Cundall 提出的一种不连续数值方法模型。这种方法的优点是适用于模拟离散颗粒组合体在准静态或动态条件下的变形过程。离散单元法不是建立在最小势能变分原理上,而是建立在最基本的牛顿第二运动定律上。它以每个刚体的运动方程为基础,建立描述整个破坏过程的显式方程组后,通过动力松弛迭代求解。

刚体弹簧单元法:刚体弹簧单元法最早于 1976 年由 Kawai 提出,最初意图是以较少的自由度来求解结构问题。它把体系分解为一些均布在接触面上的弹簧系统联系起来的刚性元,刚性元本身不发生弹性变形,因此结构的变形仅能储存在接触面的弹簧系统中。由于刚体弹簧元单元间的作用力通过单元界面上弹簧传递,可以直接得到界面的作用力,因此在岩土界面分析等领域也有着较好的应用。

1.2 有限单元法分析的基本过程

有限单元法的分析过程,概括起来可以分为以下几个步骤。

1) 结构的离散化与单元类型选择

结构的离散化是有限单元法分析的基础。所谓离散,就是将一个连续的求解域人为地划分为一定数量的单元(Element),单元又称网格(Mesh),单元之间的连接点称为节点(Node),单元间的互相作用只能通过节点连接。通过离散,一个连续体被分割为由有限数量单元组成的组合体,如图 1-1 所示。对于由杆件通过节点连接而成的杆系结构,可以取每根杆件作为一个单元。但若求解域是一个连续体,不仅需要将连续体划分为具有相关节点的等价系统,还需要选择最适当的单元类型来最接近地模拟实际的物理性能。

单元类型的选择取决于实际受载条件下物体的物理构成,也取决于分析人员所期望的对实际行为的近似程度。有限单元法中常用的单元类型有以下三种:

(1) 线单元:由杆(或桁架)和梁单元组成。

(2) 二维单元(平面单元):由基本的三角形或四边形线性单元和含有边中节点的二次单元组成。

(3) 三维单元:由基本的四面体单元和六面体单元与有边中节点或面中节点的高阶单元组成。