高等院校“十三五”规划教材

线性代数

金 珩 等 编

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

高等院校"十三五"规划教材

线性代数

主　编：金　珩　包　霞
副主编：杨云飞　常　建　黄月梅　袁春红

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材考虑了高等院校计算机、物理、经济、管理、地理等专业对数学的需求，本着“够用”并照顾考研同学提高的原则，对教学内容进行了适当的选择，内容涵盖了这些专业所需要的《线性代数》的基本知识，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换等内容.

本教材以介绍基本概念、培养基本运算能力、训练解题的一般方法为主要目标；对教学重点、难点的把握比较精准，对教学内容的讲解不仅深入浅出，而且渗透了编者多年的教学心得；对理论性、逻辑性较强的推导做了适度的弱化，适当增加了例题数量，并对例题的解题过程做了比较详细讲解；为便于读者根据自己的需要选择合适的习题进行练习，还把习题根据难度进行了分类，可以满足各层次教学人员及学生的不同需求.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/ 金珩等编著. --天津：南开大学出版社，2017.1

ISBN 978-7-310-05333-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 013014 号

高等院校“十三五”规划教材

线性代数

出版发行 南开大学出版社
(天津市南开区卫津路 94 号 邮编 300071 电话 23508339)
出 版 人 刘立松
经 销 全国各地新华书店
印 刷 三河市海新印务有限公司
开 本 170mm×230mm
印 张 18
字 数 232 千字
版 次 2017 年 1 月第 1 版 2018 年 3 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-310-05333-9
定 价 39.80 元

前　言

本教材的内容安排力求符合当下高等院校计算机、物理、经济、管理、地理等应用性较强的专业对数学的需求，并参照“理工科本科数学基础课程教学基本要求”，本着“够用”并照顾考研同学提高的原则，对教学内容进行了适当的选择，内容涵盖了这些专业所需要的《线性代数》的基本知识，以介绍基本概念、培养基本运算能力、训练解题的一般方法为主要目标；我们还注意了高校生源的实际情况，与中学数学做了较好的衔接，对教学重点、难点的把握较为精准，内容讲解不仅深入浅出，而且渗透了编者多年的教学心得；对理论性、逻辑性较强的推导则做了适度的弱化，适当增加了例题数量，对例题的解题过程做了较详细的讲解；为便于同学根据自己的需要选择习题进行练习，还根据题目难度对习题进行了适当的分类. 总之，本教材既可以作为高等院校非数学本科各专业的教材，也可以作为相关人员的教学参考书目.

本教材参编人员的职称结构合理，学历结构丰富，都曾主讲过多轮数学专业《高等代数》课或公共《线性代数》课，且都取得了很好的教学效果.

本教材第一至第三章主要由金珩老师执笔编写，袁春红老师参与了部分章节的编写并配备了这三章的习题及部分习题答案；第四章主要由杨云飞老师执笔编写并配备了相应的习题及部分习题答案；第五章主要由常建老师执笔编写并配备了相应的习题及部分习题答案；第五章第四节、第六章主要由黄月梅老师执笔编写并配备了相应的习题及部分习题答案；第七章主要由包霞老师执笔编写并配备了相应的习题及部分习题答案. 金珩、包霞、杨云飞三位老师配合，共同完成了本教材的统稿工作.

由于编写时间仓促，本教材中可能会有考虑不周、疏漏、甚至错误之处，敬请同行及广大读者批评指正.

编者

2016 年 11 月

目 录
CONTENTS

第一章　行列式 …… (001)

　第一节　二阶行列式与三阶行列式 …… (001)

　第二节　全排列及其逆序、逆序数 …… (009)

　第三节　n 阶行列式的定义 …… (013)

　第四节　行列式的性质 …… (024)

　第五节　行列式的按行（列）展开 …… (039)

　第六节　克莱姆法则——行列式的应用举例 …… (051)

　习题一 …… (059)

第二章　矩阵及其运算 …… (065)

　第一节　矩阵的概念 …… (066)

　第二节　矩阵的运算 …… (073)

　第三节　逆矩阵 …… (095)

　第四节　矩阵分块法 …… (107)

　习题二 …… (114)

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组 …… (120)

　第一节　矩阵的初等变换 …… (120)

　第二节　初等矩阵 …… (126)

　第三节　矩阵的秩 …… (135)

　第四节　线性方程组的解 …… (142)

　习题三 …… (149)

第四章　向量组的线性相关性 …… (154)

　第一节　向量组及其线性组合 …… (154)

　第二节　向量组的线性相关性 …… (162)

　第三节　向量组的秩 …… (168)

第四节　线性方程组解的结构 …… (174)
第五节　向量空间 …… (186)
习题四 …… (195)
第五章　矩阵对角化 …… (200)
第一节　矩阵的特征值与特征向量 …… (200)
第二节　相似矩阵 …… (206)
第三节　向量的内积、长度与正交性 …… (212)
第四节　实对称矩阵的相似对角化 …… (218)
习题五 …… (222)
第六章　二次型 …… (225)
第一节　二次型及其标准形 …… (225)
第二节　用配方法化二次型成标准形 …… (231)
第三节　合同变换法化二次型成标准形 …… (233)
第四节　正定二次型 …… (237)
习题六 …… (244)
第七章　线性空间与线性变换 …… (246)
第一节　线性空间的定义、例子及性质 …… (246)
第二节　线性空间的基与维数、向量的坐标 …… (250)
第三节　线性空间的基变换、坐标变换 …… (255)
第四节　子空间 …… (260)
第五节　线性映射与线性变换 …… (262)
习题七 …… (269)
部分习题答案 …… (272)

第一章 行列式

行列式本是中学数学应该涉及的教学内容，但因为高考不考，所以很多中学都"偷工减料"，根本就没讲过．为照顾大多数同学的数学基础，我们还是先对中学数学中的二阶、三阶行列式来进行讨论；之后，在此基础上进行推广，最终引入阶可以是任意正整数的n阶行列式的概念；最后，还将对n阶行列式的性质、计算方法、实际应用等进行一些较为详细的讨论．

第一节　二阶行列式与三阶行列式

在中学数学中，大家都应该有这样一种感觉，那就是二元一次方程组[①]的求解不如一元二次方程的求解方便！这是因为一元二次方程在求解时，可以套求根公式这个万能的办法来直接求得结果，而二元一次方程组的求解则必须或者加减消元、或者代入消元才行，没有万能的方法．于是，我们自然想，如果二元一次方程组也能有一个万能的"求解公式"的话，那二元一次方程组的求解不就变得和一元二次方程的求解一样方便了吗？但问题是这个万能的"求解公式"有没有呀？为了回答这个问题，我们先来看引例．

引例　用消元法解二元一次方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

解　在方程组（Ⅰ）中，$(1)\times a_{22}+(2)\times(-a_{12})$便可消去未知数$x_2$，得到

①因为一个二元一次方程在坐标平面上的图形是一条直线，所以，在数学中一次方程经常被称为线性方程，一次方程组当然也就经常被称为线性方程组了．

一个新方程：$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$，它显然是一元的、次数不超过1的方程；再用与此完全类似的方法改为消去未知数 x_1，也可以得到另一个新的方程 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$，这显然也是一元的、次数不超过1的方程. 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 成立时，从这两个新方程中，我们即可求得此线性方程组的唯一解为

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

总结这个例子，我们立刻可以得到如下结论：

命题1 在方程个数等于未知量个数、形式为标准形式的二元线性方程组（Ⅰ）中，当系数交叉运算的结果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（Ⅰ）有唯一解，且此唯一解可以用公式（Ⅱ）直接求出.

到此，我们就确实把方程个数等于未知量个数、形式为标准形式的二元线性方程组（Ⅰ）的求解过程，也变成了一个万能的求解公式. 以后再遇到（Ⅰ）这种形式的二元线性方程组时，我们也就可以直接套用公式（Ⅱ）来求解了，从而确实使二元线性方程组的求解变得和一元二次方程的求解一样方便了！但这显然有一个前提，那就是公式（Ⅱ）必须要能准确无误地记住才行，而这并不容易. 中学数学的二阶行列式，正是为了记忆这个公式而引入的一种数学符号！

下面，我们就来向大家介绍什么是二阶行列式.

定义1 把任意 $2^2=4$ 个数 a,b,c,d 排成二行二列的正方形数表，用两条竖线夹起来，即写成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，并规定这个符号表示了这四个数的如下运算：从左上到右下对角线上两个元相乘取正号，从右上到左下对角线上两个元相乘取负号，之后再取所有这种项的和，即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，做了如上运算规定以后的符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，就称为一个**二阶行列式**.

应该看到，在如上定义中，二阶行列式的本质是一种运算符，它表达的是符

号$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$中四个数的如上的、先乘后加的特定运算，写成$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$这样的形式仅仅是为了记忆方便！另外，为了叙述方便，我们以后把符号$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$叫做二阶行列式，而把它的计算结果 $ad-bc$ 称为此二阶行列式的展开式.

我们仔细观察二元线性方程组（Ⅰ）的求解公式（Ⅱ），不难发现，公式（Ⅱ）中的分子、分母其实都可以改用新引入的二阶行列式的符号来表达——分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 可用二阶行列式表示成 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，因为它恰好是由二元线性方程组（Ⅰ）的系数按它们在原方程组中的次序来排得的，所以习惯上称它为二元线性方程组（Ⅰ）的**系数行列式**；而 x_1 的分子 $b_1a_{22}-a_{12}b_2$ 可用二阶行列式表示成 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，它恰好是把（Ⅰ）的系数行列式 D 中 x_1 系数那一列换成了（Ⅰ）的常数项！与此完全相同，x_2 的分子 $a_{11}b_2-b_1a_{21}$ 也可用二阶行列式表示成 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，它恰好是把（Ⅰ）的系数行列式 D 中 x_2 系数那一列换成了（Ⅰ）的常数项！因此，引例的结论完全可以改用二阶行列式重新叙述成：

命题 1′ 在方程个数等于未知量个数、形式为标准形式的二元线性方程组（Ⅰ）中，当它的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，二元线性方程组（Ⅰ）有唯一解，且此唯一解可以用二阶行列式表示成公式

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

以上就是用二阶行列式表达的、标准形式的二元线性方程组（Ⅰ）的求解公式，这样表达的方程组（Ⅰ）的求解公式才具有实用价值. 下面，我们就用刚刚介绍的行列式法，来解一个二元线性方程组.

例 1 用公式（Ⅲ）求解二元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1 = 12 + 2x_2, \\ 2x_1 + x_2 - 1 = 0.\end{cases}$$

解 **（因为要用行列式法来解此题，所以应首先看它是不是方程个数等于未知量个数的线性方程组，其次，还必须看所给的二元线性方程组是不是如（Ⅰ）的标准形式. 当上面两问回答都是"是"了，还要会写出和计算它的系数行列式 D 及其值，只有 $D \neq 0$ 再成立了，才能按此法求其解，当然真正求解时，还得会写出和计算 D_1、D_2 的值.）**

首先，把所给线性方程组整理成标准形式，即整理成（Ⅰ）的形式为：

$$\begin{cases}3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1;\end{cases}$$

其次，写出并计算其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix}3 & -2 \\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7 \neq 0,$$

于是，由命题 1′ 知，本题线性方程组有唯一解；而

$$D_1 = \begin{vmatrix}12 & -2 \\ 1 & 1\end{vmatrix} = 12 \times 1 - (-2) \times 1 = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix}3 & 12 \\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3 \times 1 - 12 \times 2 = -21,$$

把它们代入公式（Ⅲ），便得到此方程组的唯一解为

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3.\end{cases}$$

在中学数学中，我们除了会遇到二元线性方程组的求解问题，还会遇到三元线性方程组的求解问题，而这时我们必须更耐心、更仔细地进行消元、计算才行！但现在二元线性方程组已经有了一个用二阶行列式表示的"求解公式"了，我们当然要问：对三元线性方程组是否也应该有一个用行列式来表示的"求解公式"呢？对此问题的回答当然是肯定的，但其中所涉及的行列式显然不再是二阶的，而应该是三阶行列式了！为了能够方便地给出三元线性方程组用三阶行列式来表示的"求解公式"，我们也必须先来介绍三阶行列式的概念.

定义 2 把任意 $3^2=9$ 个数排成三行三列的正方形数表，之后用两条竖线夹起来，即写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

并规定它也表示了此正方形数表中这九个数的一种新的运算：此符号从左上到右下三条对角线上的三个元分别相乘取正号，从右上到左下三条对角线上三个元分别相乘取负号，之后再取这种所有项的和，即

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

做了如上计算规定后的、带两竖线的正方形数表，就称为一个**三阶行列式**.

也应看到，三阶行列式的本质也是运算符——它表达的是该数表中的九个数确定一个数、先乘后加的特定运算，写成数表这样的形式，也仅仅是为了记忆方便！与二阶行列式的术语一样，我们以后也把带有竖线的三行三列数表叫做**三阶行列式**，而把那六项的代数和的形式，称为**三阶行列式的展开式**.

例 2 计算以下三阶行列式的值.

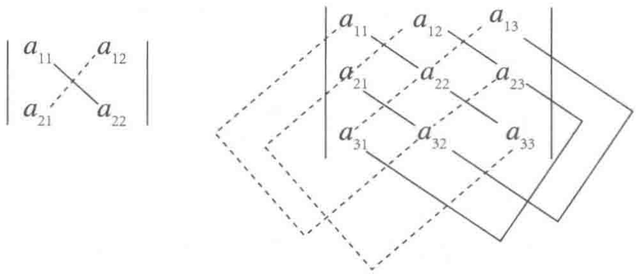
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 此题中行列式直接按定义展开计算即可，没有什么特别技巧.

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-2)\times 4\times(-4)- \\ &\quad (-4)\times 2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times 1\times 4 \\ &= -4-6+32-24-8-4=-14. \end{aligned}$$

由定义 1 及例 1、定义 2 及例 2，不难看到，如上计算二阶、三阶行列式的方法有一个共同的特点，那就是都按对角线来找出它的所有项，之后再取所有项的代数和，因此很多教材都形象地称之为“**对角线法则**”.

为记忆计算二阶、三阶行列式的对角线法则时方便、形象，初学者可以参考如下的图形：（其中，左图为二阶行列式的对角线法则、右图为三阶行列式的对角线法则）



注:图中实连线对应项为正号,虚连线对应项为负号.

例 3 求以下用三阶行列式表达的方程的根.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解 **(在此题中,先把行列式按对角线法则展开计算,即可得到一个关于 x 的二次三项式,令它等于 0,便得到本题的一元二次方程;之后再分解因式或用求根公式求解即可.)**

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times x^2 + 2 \times 9 \times 1 + 1 \times x \times 4 - 1 \times 3 \times 4 -$$

$$1 \times 2 \times x^2 - 1 \times x \times 9 = x^2 - 5x + 6,$$

$\therefore$ 题目中的方程变为 $x^2 - 5x + 6 = 0$,解之,便得:$x = 2$ 或 $x = 3$.

有了如上的三阶行列式的知识后,我们就真的可以用三阶行列式来给出三元(线性)一次方程组

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的"求解公式"了.

命题 2 若三元线性方程组(Ⅳ)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组(Ⅳ)有唯一解，且此唯一解可用三阶行列式表示成公式

$$(\mathrm{V})\ x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,3),$$

其中 D_j 也是把系数行列式 D 中 x_j 系数那一列换成常数项得到的三阶行列式.

以上就是用三阶行列式来解三元线性方程组(Ⅳ)的结论. 下面，我们也来举一个用三阶行列式解三元线性方程组的例子.

例 4 用三阶行列式求三元线性方程组的解.

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=3+5x_3,\\ x_1+x_3=2x_2,\\ 3x_1+x_2+3x_3=7\end{cases}$$

解 本题按例 1 一样的方法、一样的步骤来改写方程组和计算各个行列式即可.

首先把所给方程组整理成标准形式

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3=3,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ 3x_1+x_2+3x_3=7;\end{cases}$$

其次写出系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix},$$

并按定义计算之，得

$$D=2\times(-2)\times3+3\times1\times3+(-5)\times1\times1-(-5)\times(-2)\times3-3\times1\times3-2\times1\times1=-12+9-5-30-9-2=-49\neq0,$$

于是由命题 2 知，本题方程组有唯一解；再写出并计算得

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 3 & -5\\ 0 & -2 & 1\\ 7 & 1 & 3\end{vmatrix}=-18+21+0-70-0-3=-70,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 7 & 3\end{vmatrix}=0+9-35-0-9-14=-49,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&3\\1&-2&0\\3&1&7\end{vmatrix}=-28+0+3-(-18)-21-0=-28.$$

把它们代入公式(V),便得到此方程组的唯一解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-70}{-49}=\dfrac{10}{7},\\[2ex] x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-49}{-49}=1,\\[2ex] x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-28}{-49}=\dfrac{4}{7}.\end{cases}$$

总结如上内容,不难发现这样的规律,那就是对于这种方程个数等于未知量个数的二元、三元线性方程组,都有形式上完全相同的、用二阶或三阶行列式来表示的求解公式!由此,我们很自然就会去猜想对于这种方程个数等于未知量个数的 n 元线性方程组是否总有与上面完全相同的、都是用行列式来表示的求解公式呢?如果真有,那当然是非常理想的事情了!

那到底有没有这个理想中的求解公式呢?要想回答这个问题,显然不可避免地要涉及什么是 n 阶行列式. 许多同学可能会说,定义 n 阶行列式太容易了,我们只要像下面这样定义,不就行了么?

定义 3 把任意 n^2 个数,排成 n 行 n 列的正方形数表,之后也用两条竖线夹起来,即写成

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

的形式,我们以后就把这种用两条竖线夹起来的、n 行 n 列的正方形数表称为一个 n **阶行列式**.

但非常遗憾,这样定义 n 阶行列式是远远不够的!因为上面定义的 n 阶行列式虽然与二阶、三阶行列式"长"得很像,但却没有像二阶、三阶行列式那样,来规定这个形式符号的本质!因此我们说,定义 3 所给出的只是 n **阶行列式的"形式定义"**,这样的 n 阶行列式缺少灵魂!

前面，我们已经强调过，二阶行列式符号的本质是一种运算符，它表达的是这个符号中的四个数得一个数的一种先乘后加的特定运算，三阶行列式符号的本质也是一种运算符，它表达的也是该符号中的九个数得一个数的一种先乘后加的特定运算；当然，我们前面定义中都是用“**对角线法则**”来给出二阶、三阶行列式这个先乘后加的特定运算的.

于是，我们自然想到：n 阶行列式的定义中带有竖线的 n 行 n 列数表也应该是一个表示 n^2 个数的某种先乘后加特定运算的运算符！但进一步的问题是，这个先乘后加的特定运算到底该怎样规定呢？亦即构成此形式符号的那 n^2 个数到底怎么样来决定那唯一的一个数呢？再或者说这个数能否也用“对角线法则”来定义呢？

要回答上面这些问题可不容易，必须要用到全排列的逆序、逆序数等相关知识，而这正是在教材第一章第二节我们要讨论的内容.

第二节　全排列及其逆序、逆序数

在排列组合中，我们已经知道什么是 n 个不同元素的全排列（简称为 n 元排列）、n 元排列的总个数 $P_n = n!$ 等等，有关排列组合的知识还有很多. 但在线性代数中，我们不再关心原来的这些知识，而是去关心排列组合中的一个全新知识点——**（全）排列的逆序和逆序数**，它们是专门为定义 n 阶行列式的本质——构成行列式的那 n^2 个数到底怎么样决定唯一一个数来服务的.

定义 1　设 1、2、3、…、n 表示 n 个不同的元素，在这 n 个不同的元素构成的一个全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若某对数 $(p_i, p_j)(i \neq j)$ 的前后次序与自然顺序不同，即小数反而排在了大数的后面，则就称这对数在该排列中构成了一个**逆序**；排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中逆序的总个数，称为此排列的**逆序数**，记为 $N(p_1p_2\cdots p_n)$①.

例 1　求排列 32514 的所有逆序及其逆序数.

解　在此排列中，数对(3,2)、(3,1)、(2,1)、(5,1)、(5,4) 都是大数排在了

①有些教材把排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$ 或者 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$，看参考书时请注意.

小数前面，所以它们都是此排列中的逆序，且仔细考察后可见，此排列中再没有其他的逆序了，所以它的逆序数为5，按定义应记为 $N(32514)=5$.

如上例子中，我们是先找出了一个排列的所有逆序、再数它们的个数来求出的其逆序数，这种方法在求 n 较大的 n 元排列的逆序数时，非常容易遗漏或重复计数，因此实用性较差. 在实际中，我们并不用此方法求 n 元排列的逆序数，而是采用下面介绍的方法，这是大家必须熟练掌握的一个一般方法.

求一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数的实用方法为：（从左到右依次做如下工作）

① 找出第一个数码 p_1 后面比 p_1 小的数码个数 t_1，它就是此 n 元排列中含有 p_1 的逆序的个数；

② 找出第二个数码 p_2 后面比 p_2 小的数码个数 t_2，它就是此 n 元排列中含有 p_2 但不含 p_1 的逆序个数（因为含有 p_2 又含 p_1 的逆序，已经在求 t_1 时考虑过了，故在这步中，千万不能再考虑 p_2 和 p_1 的关系，否则有可能重复计算）；

③ 找出第三个数码 p_3 后面比 p_3 小的数码个数 t_3，它就是此 n 元排列中含有 p_3 但不含 p_1，p_2 的逆序的个数（因为含有 p_3 又含 p_1 或 p_2 的逆序，也已经在求 t_1，t_2 时都考虑过了，故不能再考虑 p_1 或 p_2 与 p_3 的关系，否则也有可能重复计算）；

不断重复此过程，对每个 p_i，都找出 p_i 后面比 p_i 小的数的个数 t_i，则立刻求得此排列的逆序数 $N(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$.（**在下面举例时，我们将均按上面刚刚介绍的一般方法来求排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 此外我们还可以对每个 p_i 都改成找出 p_i 前面比 p_i 大的数的个数 T_i，则 $N(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}T_i$，道理同上. 另外，找 t_i 或 T_i 的工作，除了从左到右外，还可以从右到左做.**）

例 1′ 重新求排列 32514 的逆序数.

解 从左到右，对每个数码 p_i 都找出 p_i 后面比 p_i 小的数码的个数 t_i，则 $N(32514)=2+1+2+0+0=5$；依然从左到右，但对每个数码 p_i 都改成找出 p_i 前面比 p_i 大的数码的个数 T_i，则 $N(32514)=0+1+0+3+1=5$.（**对比此排列的三个方法求得的逆序数，可以看到完全一样，但现在的方法更好.**）

在实际应用中，我们其实不太关心一个排列的逆序数的具体值，而是更关心

它的奇偶性，为以后叙述方便，就特别把逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 2 判定排列 32514、34251 和 $n(n-1)\cdots321$ 的奇偶性.

解 因为前面我们已求出 $N(32514)=5$，所以排列 32514 为奇排列；

又因为 $N(34251)=2+2+1+1+0=6$，所以排列 34251 为偶排列；

再因为 $N(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=n(n-1)/2$ 既可能是偶数，也可能是奇数，所以排列 $n(n-1)\cdots321$ 既可能是偶排列，也可能是奇排列.（**事实上，此排列的奇偶性由相邻正整数 n、$(n-1)$ 中的偶数能否被 4 整除决定 —— 能被 4 整除时，是偶排列，不能被 4 整除时，是奇排列.**）

接下来，我们再来讨论一下对换及其性质，这也是为下面讨论行列式的性质做准备的. 为此，我们先来明确一下什么是对换：

定义 2 在一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，只交换其中两个数码 p_i 和 $p_j(i\neq j)$ 的位置，其他数码不动，这样一种把已知排列化成新排列的简单办法，就称为一个对换，记为 $p_i\leftrightarrow p_j(i\neq j)$. 又若所对换的两个数码处于该排列中的相邻位置，则这个对换就称为**相邻对换**.

很显然，在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，我们总可以通过调整某些元的次序来获得一个新排列，而且这个效果总可以通过逐次对换、甚至是逐次相邻对换来实现.（**比如：123456789 通过调整 4、5 的位置就可以变成 451236789，而这个过程显然可以通过依次做对换 $(4\leftrightarrow1)$、$(2\leftrightarrow5)$、$(3\leftrightarrow1)$、$(3\leftrightarrow2)$ 来实现，当然也可以通过相邻对换 $(4\leftrightarrow3)$、$(4\leftrightarrow2)$、$(4\leftrightarrow1)$、$(5\leftrightarrow3)$、$(5\leftrightarrow2)$、$(5\leftrightarrow1)$ 来实现**）. 这说明对换、特别是相邻对换才是由已知排列来获得新排列的根本办法. 我们下面要研究的对换性质，其实就是研究对换对排列奇偶性的影响.

为了使下面的结论容易被大家接受和理解，我们来考察下面实例：

例 3 求排列 32541 经 $(2\leftrightarrow4)$ 后的新排列，并讨论它们奇偶性异同.

解 $32514\xrightarrow{(2\leftrightarrow4)}34512$；因为已知 $N(32514)=5$，所以排列 32514 为奇排列；又因为 $N(34512)=2+2+2+0+0=6$，所以排列 34512 为偶排列.

这个例子说明，此排列在对换 $(2\leftrightarrow4)$ 前后它的奇偶性是不同的，如果我们多做几例就会发现这似乎是一个规律！于是，我们猜测应该有下面的定理：

定理 1 一次对换改变排列的奇偶性一次.