高等职业教育“十三五”规划教材

# 线性代数与线性规划

XIANXING DAISHU YU XIANXING GUIHUA

宋建梅 董竹青 景滨杰 编著

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

高等职业教育“十三五”规划教材

# 线性代数与线性规划

宋建梅　董竹青　景滨杰　编著

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

## 内 容 提 要

本书是基于高等职业院校培养应用型人才的目标，结合各专业的特点而编写的.

本书系统地介绍了线性代数的相关知识及其应用，全书共六章，包括行列式、矩阵、线性方程组、线性规划问题的数学模型、线性规划问题解的性质、单纯形法.

本书简明扼要、通俗易懂、应用性强，可作为各类高等职业院校的线性代数教材，也可作为经济管理工作者和相关专业技术资格考试者的参考用书.


**图书在版编目（C I P）数据**

线性代数与线性规划 / 宋建梅，董竹青，景滨杰编著. -- 镇江 ：江苏大学出版社，2017.8
ISBN 978-7-5684-0547-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①宋… ②董… ③景… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材②线性规划－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2②O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 192093 号

**线性代数与线性规划**
Xianxing Daishu Yu Xianxing Guihua

编　　著 / 宋建梅　董竹青　景滨杰
责任编辑 / 吴昌兴
出版发行 / 江苏大学出版社
地　　址 / 江苏省镇江市梦溪园巷 30 号（邮编：212003）
电　　话 / 0511-84446464（传真）
网　　址 / http://press.ujs.edu.cn
排　　版 / 北京金企鹅文化发展中心
印　　刷 / 北京市科星印刷有限责任公司
开　　本 / 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 208 千字
版　　次 / 2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-5684-0547-8
定　　价 / 26.50 元

# 编者的话

本书根据高等职业院校教学大纲，并密切结合各专业特点及经济工作需要而编写，具有以下特点：

1. 内容系统，重点突出．本书系统介绍了线性代数的基本知识，着重讲解基本概念、基本理论、基本方法及在实际生产和生活中的应用，简略介绍性质和定理的证明，切实有效地培养学生的数学思维能力、熟练运算能力和分析解决实际问题的能力．

2. 难易适当，通俗易懂．本书在编写内容和选择例题时，注意难易适当，并采用深入浅出和通俗易懂的方式进行讲解，以便于学生融会贯通、举一反三．

3. 循序渐进，便于教学．本书从简到难，循序渐进，既有利于老师授课，也有利于学生学习和理解．另外，每章都设有习题和答案，以便检查学习效果．

本书由宋建梅、董竹青、景滨杰编著．

本书在编写过程中参考了大量的文献资料，并得到了有关专家和同行的悉心指导与帮助．在此，编者向所有对此书的出版提供帮助的人士表示诚挚的谢意！

由于时间仓促，编者水平有限，书中疏漏与不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正．

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登录北京金企鹅文化发展中心网站（www.bjjqe.com）下载。

著　者

2017 年 7 月

# 目录

# 第一章　行列式

行列式的概念是由解线性方程组引入的，是线性代数中最基本的内容，也是学习矩阵与线性方程组的理论基础．本章主要包括行列式的概念、性质、展开及应用——克莱姆法则．

## 第一节　二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式的概念在中学已有介绍，在此进一步复习巩固．

### 一、二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

由消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组仅有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了进一步分析研究线性方程组解的规律，引入新的符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

表示代数和 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ ．

此符号由未知量的系数排成二行二列，称为二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中，构成行列式的各个量 $a_{11}$，$a_{12}$，$a_{21}$，$a_{22}$ 称为行列式的元素．元素的第 1 个脚标表示其所在的行数，称为行标；元素的第 2 个脚标表示其所在的列数，称为列标；元素的一般形

式可记为 $a_{ij}(i,j=1,2)$，$i$ 为行标，$j$ 为列标．行列式的左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**．

二阶行列式的计算，可用图线的方法表示和记忆．如图 1-1 所示，二阶行列式的计算方法为：主对角线（实线）上两元素之积减去次对角线（虚线）上两元素之积．

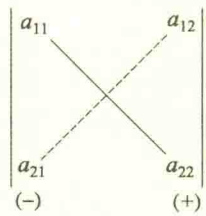


图 1-1

另外，由二阶行列式的定义知，代数和 $(b_1a_{22}-b_2a_{12})$ 与 $(b_2a_{11}-b_1a_{21})$ 也可用二阶行列式的形式表示为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然，$D_1,D_2$ 可看作是以 $b_1,b_2$ 为一列分别取代 $D$ 中第 1 列、第 2 列得到．

于是，方程组的解可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

由此，二元线性方程组可通过其未知量系数、常数项构成的二阶行列式 $D,D_1,D_2$ 计算求解．

**例 1**　求解 $\begin{cases} 3x_1-x_2=-4, \\ x_1+2x_2=1. \end{cases}$

**解**　系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-(-1)\times 1=7.$$

以常数项 $-4,1$ 为一列，分别取代 $D$ 中第 1 列，第 2 列得

$$D_1=\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=7,$$

所以，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-7}{7} = -1, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{7}{7} = 1. \end{cases}$$

例2 设 $D = \begin{vmatrix} k & 1 \\ k^2 & 2 \end{vmatrix}$，问：

（1）当 $k$ 为何值时，$D = 0$；

（2）当 $k$ 为何值时，$D \neq 0$.

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 \\ k^2 & 2 \end{vmatrix} = 2k - k^2,$$

当 $2k - k^2 = 0$，则 $k = 0$ 或 $k = 2$．所以，

（1）$k = 0$ 或 $k = 2$ 时，$D = 0$；

（2）$k \neq 0$ 或 $k \neq 2$ 时，$D \neq 0$.

## 二、三阶行列式

考察三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1-2}$$

用消元法消去 $x_2, x_3$ 得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned} \tag{1-3}$$

显然，$x_1$ 的系数只与方程组（1-2）未知量系数及其排列顺序有关．于是，为研究问题的简捷，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

来表示变形方程（1-3）中 $x_1$ 的系数，它是由未知量系数排成三行三列构成的，称为三阶行列式，即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

由此，变形方程（1-3）右端的代数和也可记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

它是以 $b_1,b_2,b_3$ 为一列取代 $D$ 中第 1 列得到的．因此，方程组（1-3）可写成

$Dx_1=D_1$．

同理，由方程组（1-2）可得

$Dx_2=D_2$（消去 $x_1,x_3$），

$Dx_3=D_3$（消去 $x_1,x_2$），

$D_2,D_3$ 是以 $b_1,b_2,b_3$ 为一列，分别取代 $D$ 中第 2 列、第 3 列得到的．

因此，方程组（1-2）可写成

$$\begin{cases} Dx_1=D_1, \\ Dx_2=D_2, \\ Dx_3=D_3. \end{cases}$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组（1-2）仅有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

由此可知，三元线性方程组可通过三阶行列式 $D,D_1,D_2,D_3$ 计算求解．

三阶行列式的计算，也可用图线的方法表示、记忆，如图 1-2 所示．实线联结的三个元素之积取正，虚线联结的三个元素之积取负．

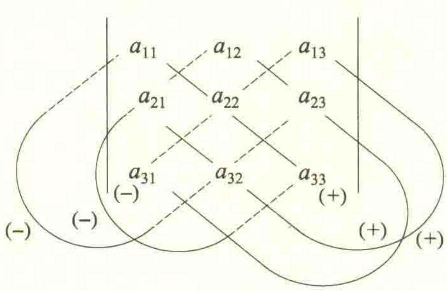


图 1-2

例 3　求方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3=1, \\ x_1+5x_2+2x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=-1 \end{cases}$ 的解．

解　系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&5&2\\1&1&1\end{vmatrix}=2\times5\times1+4\times2\times1+1\times1\times1-1\times5\times1-4\times1\times1-2\times2\times1=6\cdot$$

以常数项$1,2,-1$分别取代$D$中第1，第2，第3列得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&4&1\\2&5&2\\-1&1&1\end{vmatrix}=-6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=6,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&5&2\\1&1&-1\end{vmatrix}=-6.$$

所以，方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-6}{6}=-1,\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=1,\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1.\end{cases}$$

例 4　讨论$D=\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}>0$的充分必要条件.

解　因为$D=a^2-1$，所以

$a^2-1>0$，即$a^2>1$，$|a|>1$.

因此，$a>1$或$a<-1$是$D>0$的充分必要条件.

## 第二节　$n$阶行列式

为了讨论四元、五元以及$n$元线性方程组，需要将行列式的概念推广到四阶、五阶及任意$n$阶．在讨论任意阶行列式定义之前，先来明确两个概念——排列与逆序.

### 一、排列与逆序

定义 1　由$1,2,3,\cdots,n$组成一个不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个$n$级排列.

例如：1 2，2 1 为 2 级排列.

1 2 3 4，4 3 2 1 为 4 级排列.

$n(n-1)(n-2)\cdots 21$ 为 $n$ 级排列.

在 $n$ 级排列中，$1\,2\,3\cdots n$ 是唯一按自然顺序（即递增顺序）构成的排列，称为 $n$ 级顺序排列（或称 $n$ 级标准排列）.

例如：1 2 3 为 3 级顺序排列.

1 2 3 4 5 为 5 级顺序排列.

定义 2　在一个 $n$ 级排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 中，若有较大的数 $i_t$ 排在较小的数 $i_s$ 前面 $(i_s<i_t)$，则称 $i_t$ 与 $i_s$ 构成一个逆序. 一个排列中逆序的总个数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1\,i_2\cdots i_n)$.

例如：$N(3\,2\,1)=3$，$N(1\,2\,3\,4)=0$，$N=(1\,2\,5\,3\,4)=2$.

定义 3　如果 $N(i_1\,i_2\cdots i_n)=$ 偶数（或零），则称排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 为偶排列；如果 $N(i_1\,i_2\cdots i_n)=$ 奇数，则称排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 为奇排列.

例如，上面的排列 1 2 3 4，1 2 5 3 4 为偶排列；3 2 1 为奇排列.

## 二、$n$ 阶行列式的定义

有了排列、逆序，二阶、三阶行列式的预备知识，不难给出 $n$ 阶行列式的定义.

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，先来考察一下二阶、三阶行列式的构成规律.

（1）行列式中元素个数：

二阶行列式：由 $4=2\times 2=2^2$ 个元素构成，排成 2 行 2 列.

三阶行列式：由 $9=3\times 3=3^2$ 个元素构成，排成 3 行 3 列.

（2）行列式展开中的项数：

二阶：$2=2\times 1=2!$ 项的代数和.

三阶：$6=3\times 2\times 1=3!$ 项的代数和.

（3）展开式中每一项的特点：

二阶：每一项均为来自不同行不同列两个元素的积.

三阶：每一项均为来自不同行不同列三个元素的积.

也就是说，每一项中各元素的行标、列标分别不会重复，否则，不是行列式中的项.

行列式展开的所有项中，前面取正号与取负号的项各占一半，当某一项中各元素的行标按顺序排列时，相应列标的逆序数为零或偶数时，展开项前面取正号；相应列标的逆序为奇数时，前面取负号.

例如：$a_{11}a_{22}$ 项，列标逆序数 $N(1\ \ 2)=0$，前面取正号；

$a_{12}a_{21}$ 项，列标逆序数 $N(2\ \ 1)=1$，前面取负号.

$a_{12}a_{23}a_{31}$ 项，列标逆序数 $N(2\ \ 3\ \ 1)=2$，前面取正号；

$a_{13}a_{22}a_{31}$ 项，列标逆序数 $N(3\ \ 2\ \ 1)=3$，前面取负号.

由以上规律得$n$阶行列式的定义：

定义 4　由$n^2$个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排列成$n$行$n$列（$a_{ij}$位于第$i$行第$j$列），在其两边各画一条竖线，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$$

称为$n$阶行列式.

$n$阶行列式表示$n!$项的代数和，每一项都是由$n$个来自不同行不同列的元素之积构成，其中正、负项各占一半，即$\frac{n!}{2}$项. 每一项的符号是：当这一项元素的行标顺序排列时，列标构成的排列逆序数为零或偶数（偶排列）时，取正号；奇数（奇排列）时，取负号. 因此$n$阶行列式的一般项可表示为

$$(-1)^{N(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

特别规定：一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$.

例 1　判断乘积$a_{23}a_{12}a_{32}$是否为三阶行列式中的项.

解　在乘积$a_{23}a_{12}a_{32}$中，元素$a_{12}$与$a_{32}$的列标同为 2，说明这两个元素均来自第 2 列，因而乘积$a_{23}a_{12}a_{32}$不是三阶行列式中的项.

例 2　$a_{24}a_{12}a_{31}a_{43}$是四阶行列式中的项，判断其前面应取什么符号.

解　适当交换所给项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，即为

$$a_{24}a_{12}a_{31}a_{43}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43},$$

则相应列标的逆序数为

$$N(2\ 4\ 1\ 3)=3,$$

是奇数，所以$a_{24}a_{12}a_{31}a_{43}$前面应取负号.

例 3　确定元素列标$l,m$的值，使得$a_{21}a_{4m}a_{53}a_{1l}a_{34}$是五阶行列式中前面取正号的项.

解　因为$a_{21}a_{4m}a_{53}a_{1l}a_{34}$中，元素的行标各不相同，说明它们来自不同的行. 适当交换各元素的次序，使行标按顺序排列，即为

$$a_{21}a_{4m}a_{53}a_{1l}a_{34}=a_{1l}a_{21}a_{34}a_{4m}a_{53}.$$

欲使此项为五阶行列式中的项，各元素必来自不同的列，即

$$l=2,m=5\text{ 或 }l=5,m=2.$$

当$l=2,m=5$时，所给项为

$$a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53},$$

相应的列标逆序数为

$$N(2\ 1\ 4\ 5\ 3)=3,$$

是奇数，所以该项前面取负号.

当 $l=5, m=2$ 时，所给项为

$$a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53},$$

相应的列标逆序数为

$$N(5\ 1\ 4\ 2\ 3)=6,$$

是偶数，所以该项前面取正号.

因此，$l=5, m=2$ 时，$a_{21}a_{4m}a_{53}a_{1l}a_{34}$ 为五阶行列式中前面取正号的项.

例 4　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

解　因为行列式 $D$ 中不为零的元素有:

$$a_{12}=1, a_{23}=2, a_{24}=2, a_{31}=3, a_{34}=3, a_{41}=4, a_{44}=4.$$

根据行列式的构成规律，行列式每一项中各元素应来自不同行不同列，所以 $D$ 中只有 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 与 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 两项不为零，且 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 项列标逆序数 $N(2\ 3\ 1\ 4)=2$ 为偶数，前面取正号；$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 项列标逆序数 $N(2\ 3\ 4\ 1)=3$ 为奇数，前面取负号.

因此，

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\times2\times3\times4-1\times2\times3\times4=0.$$

## 三、特殊行列式

### （一）转置行列式

定义 5　将行列式 $D$ 的行与列互换后得到的行列式，称为 $D$ 的转置行列式，记为 $D^{\mathrm{T}}$ 或 $D'$.

如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

$D$ 与 $D^{\mathrm{T}}$ 的值满足什么关系呢？由下面的三阶行列式来考察：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

显然，$D=D^{\mathrm{T}}$.

这个结论对 $n$ 阶行列式同样成立.

**定理 1** 转置行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 的值与行列式 $D$ 的值相等，即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

由此得知，在行列式中，行与列的地位是同等的. 凡对行（列）有的性质，对列（行）必然成立. 所以，后面讨论行列式的性质时，以行为主进行讨论.

### （二）三角形行列式

**定义 6** 若行列式 $D$ 主对角线以上或以下的元素全为零，则称行列式 $D$ 为**三角形行列式**.

例如：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\text{为下三角形行列式；}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\text{为上三角形行列式.}$$

三角形行列式的值如何？下面以下三角形行列式为例进行分析.

我们知道，$n$ 阶行列式 $D_1$ 的项数应为 $n!$ 项，但 $D_1$ 中许多元素为 0，而含 0 元素的项皆为 0，所以，只要考虑不为 0 的项即可. 在不为 0 的项中，必有一个元素来自第 1 行，第 1 行只有 $a_{11}$ 不为 0，于是只能含 $a_{11}$；其他元素中必有一个是第 2 行的，第 2 行有 $a_{21}, a_{22}$，而 $a_{21}$ 与 $a_{11}$ 同一列，则只能含 $a_{22}$；同理，依次类推，分别来自第 $3,4,\cdots,n$ 行的元素只能分别是 $a_{33}, a_{44}, \cdots, a_{nn}$. 因此，只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不为 0，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

同理可得

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

结论：三角形行列式的值等于主对角线上各元素之积.

### （三）对角形行列式

定义 7　若行列式 $D$ 主对角线以外的元素全为零，则称 $D$ 为对角形行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

实际上，对角形行列式是特殊的三角形行列式，它的值为主对角线上元素之积，即

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

例 5　已知行列式 $D=2$，求 $3D^{\mathrm{T}}$ 的值.

解　因为 $D^{\mathrm{T}}=D=2$，所以，

$$3D^{\mathrm{T}}=3\times 2=6.$$

例 6　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解　因为 $D$ 为上三角形行列式，所以，

$$D=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=n!.$$

例 7　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-x \end{vmatrix}.$$

解　因为 $D$ 为对角形行列式，所以，

$$D=(1-x)(2-x)\cdots(n-x).$$