高等数学（下）

Advanced Mathematics

李小玲 朱 建 夏大峰 吴 斌 李栋梁 编著

科学出版社

高等数学（下）

李小玲　朱　建　夏大峰　吴　斌　李栋梁　编著

高等学校博士学科点专项科研基金(20113228110003)
南京信息工程大学教材建设基金
共同资助

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本教材适用于各理工学科中非数学专业的高等数学课程. 由于高等数学基本理论、基本方法和基本技能，特别是微积分的基本理论和方法在各理工类等学科中具有广泛的应用，所以本教材进一步完善了微积分方面的基本理论和方法. 同时，因傅里叶级数在理工类学科中具有广泛的应用背景，所以本教材把傅里叶级数单独作为一章，其目的是强调傅里叶级数的重要性. 本教材的特点是每一章节都列举了大量的例题，题型多样化，除了有利于学生掌握知识外，还有利于学生思维能力的培养；每一节附有习题，每一章附有总复习题.

本教材共十二章，分上、下两册. 上册内容：函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何；下册内容：多元函数微分法及其应用，重积分及其应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数，傅里叶级数，微分方程.

带“*”部分的教学内容可以略讲或不讲，不影响高等数学教学内容的整体性，也不影响考研数学一、数学二的内容.

本教材不仅可作为理工类各学科非数学专业的教材，也可作为其他学科有关专业的高等数学课程教材，还可以作为全国考研数学一、数学二高等数学的教材和参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下/李小玲等编著. —北京：科学出版社，2016
ISBN 978-7-03-049053-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 141852 号

责任编辑：胡 凯 许 蕾／责任校对：张怡君
责任印制：张 倩 ／封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2016 年 8 月第一次印刷 印张：20
字数：474 000

定价：59.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

高等数学是理工类各学科非数学专业和相关学科专业的基础课程，除了要求学生掌握高等数学的有关知识外，还强调培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力和定量思维能力，以及应用数学的理论和方法解决实际问题的能力.

本教材由高等学校博士学科点专项科研基金 (20113228110003) 和南京信息工程大学教材建设基金共同资助，按照理工类各学科非数学专业的高等数学教学内容要求，参照全国考研数学一、数学二的考研大纲，以及我校气象类学科和其他理工类各学科非数学专业人才培养的要求，借鉴国内外其他高校高等数学教学改革的成功经验编写而成. 本教材既继承传统教材的优点又力求突出以下几个方面：

(1) 注意将数学素质的培养有机地融合于基础知识的讲解之中，突出微积分的基本思想和基本方法. 以高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握为宗旨，注重基本概念、基本理论的理解，强调数学思维能力的渗透，强化理论知识的应用，力求使学生会用所学知识解决相应的实际问题，最大限度地为理工类各学科非数学专业后续课程夯实数学基础.

(2) 在确保高等数学科学性的前提下，充分考虑到高等教育大众化的新形势和全国考研数学一、数学二的内容，构建学生易于接受的高等数学体系，力求使学生在学习过程中能较好地了解各部分内容的内在联系，从整体上掌握高等数学的思想方法，力求揭示数学概念和方法的本质. 例如，对极限等概念，先介绍其描述性概念，再介绍它们的精确定义，便于学生接受并理解其概念；对微分与积分概念，都由实际问题引入，不仅介绍几何意义还介绍物理等方面的意义，使学生对所学知识有实际理解.

(3) 本教材对例题做了精心选择，例题丰富，紧扣教学内容，题型多样化，且许多例题是经济管理等方面的实际问题，既具有代表性又有一定的难度，适应理工类等各专业读者的需求.

(4) 为了便于实现因材施教以及分层教学的要求，对有关内容和习题进行了精心设计和安排. 每节后面的习题以本节教学内容为主进行配置，同时还选择一些考研的数学题. 每章后面还配有总复习题，总复习题融复习、巩固和考研为一体，为学生提供必要的训练.

(5) 带有 “*” 的内容可以不作要求，不影响内容的整体结构. 对于带有 “*” 的基本理论建议在教学过程中简要介绍其应用. 例如归结原理在有些高等数学教材中很少介绍，实际上归结原理在讨论函数的极限不存在性、判别无界性等方面都有广泛的应用.

总体来说，本教材的编写思路是处理好传统高等数学教材优点与教学改革的关系，使之相互融为一体. 本教材保留了高等数学传统教材说理浅显、叙述详细、深浅适度、结构严谨、例题较多、习题适度、便于自学等优点；还将数学专业的数学分析有关基本理论和方法渗入其中，有的理论和方法虽然没有给出证明，但适当强调了其应用，例如归结原理在判别极限不存在、无界以及无界但不是无穷大量等方面的作用等.

高等数学是大气科学中最重要的数学基础，在大气科学各领域中具有广泛的应用. 为此，李栋梁教授针对大气科学中用到的数学知识提出总体构想与框架. 在此基础之上，本教材的编写人员集体讨论了全书的框架和教学内容的安排，并参与各章节内容的编写. 全书主要由夏大峰统稿与定稿. 第一章、第二章、第三章、第十二章由夏大峰编写；第四章、第五章由吴斌编写；第六章、第七章由朱建编写；第八章、第九章、第十章由李小玲编写；第十一章由夏大峰、李小玲共同编写. 在教材编写的前期讨论中，南京信息工程大学大学数学部的老师也参与了教材结构框架的讨论，并提出了许多有益的建议.

本书的编写得到了南京信息工程大学教务处、数学与统计学院有关领导的大力支持和帮助，也得到了许多老师的鼓励，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2016 年 1 月

目　　录

第七章　多元函数微分法及其应用 ······ 1
第一节　多元函数的基本概念 ······ 1
第二节　偏导数 ······ 9
第三节　全微分 ······ 15
第四节　多元复合函数的微分法 ······ 20
第五节　隐函数的求导公式 ······ 25
第六节　方向导数、梯度 ······ 31
第七节　多元函数微分法在几何上的应用 ······ 36
* 第八节　多元函数的泰勒公式 ······ 42
第九节　多元函数的极值及其求法 ······ 44
总复习题七 ······ 53
第七章参考答案 ······ 54
第八章　重积分及其应用 ······ 60
第一节　重积分的概念与性质 ······ 60
第二节　二重积分的计算 ······ 66
第三节　三重积分的计算 ······ 82
第四节　重积分的应用 ······ 92
总复习题八 ······ 100
第八章参考答案 ······ 102
第九章　曲线积分与曲面积分 ······ 106
第一节　对弧长的曲线积分 ······ 106
第二节　对面积的曲面积分 ······ 113
第三节　对坐标的曲线积分 ······ 121
第四节　格林公式 ······ 130
第五节　对坐标的曲面积分 ······ 139
第六节　高斯公式　通量与散度 ······ 151
第七节　斯托克斯公式　环流量与旋度 ······ 158
* 第八节　场论初步 ······ 164
总复习题九 ······ 172
第九章参考答案 ······ 173
第十章　无穷级数 ······ 177
第一节　常数项级数的概念和性质 ······ 177
第二节　常数项级数的收敛判别法 ······ 184

第三节　函数项级数 …… 200
第四节　幂级数 …… 210
第五节　函数展开成幂级数 …… 219
总复习题十 …… 230
第十章参考答案 …… 232
第十一章　傅里叶级数 …… 235
第一节　傅里叶级数 …… 235
第二节　周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 …… 245
* 第三节　贝塞尔不等式与帕斯瓦尔等式 …… 250
总复习题十一 …… 255
第十一章参考答案 …… 257
第十二章　微分方程 …… 260
第一节　微分方程的基本概念 …… 260
第二节　一阶微分方程的初等解法 …… 264
第三节　一阶线性微分方程 …… 273
第四节　可降阶的高阶微分方程 …… 277
第五节　高阶线性微分方程解的结构 …… 282
第六节　常系数线性微分方程 …… 289
* 第七节　线性微分方程的幂级数解法与常系数线性微分方程组 …… 302
总复习题十二 …… 308
第十二章参考答案 …… 310

第七章　多元函数微分法及其应用

上册研究了一元函数微积分, 从一元函数到多元函数不仅仅是一种形式上的推广, 从数学角度来看, 更是对客观世界认识的一个飞跃. 事物的存在、变化不只依赖某一个因素, 而往往受多个因素的影响, 这些因素反映到数学上就是多元函数的问题.

本章主要讨论多元函数微分学的基本概念、基本理论和基本方法. 与一元函数相比, 二元函数的微分法有它独特的规律, 二元以上的多元函数, 其微分法则可以类推. 所以在讨论多元函数微分法的过程中, 我们以二元函数为主.

第一节　多元函数的基本概念

本节介绍有关平面点集的一些基本概念, 然后给出多元函数及其极限、多元函数的连续性的定义.

一、 平面点集

1. 平面点集

由平面解析几何知道, 在平面上建立了一个直角坐标系后, 有序实数组 (x,y) 与平面上的点之间就建立了一一对应关系. 因此, 今后我们将把有序实数组 (x,y) 与平面上的点看作是完全等同的. 这种建立了坐标系的平面称为**坐标平面**. 二元有序实数组 (x,y) 的全体就表示坐标平面, 记作 $\mathbf{R}^2$, 即

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}.$$

坐标平面上满足某种条件 P 的点构成的集合, 称为**平面点集**, 记作

$$E=\{(x,y)|(x,y)\text{满足条件}P\}.$$

例如, 平面上以原点为中心、r 为半径的圆周以及圆内所有点构成的集合为

$$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}.$$

2. 邻域

$\mathbf{R}^2$ 中任意两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离 $|P_1P_2|$ 定义为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上一定点, 所有与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的点构成的平面点集, 称为**点 P_0 的 δ 邻域**, 记作 $U(P_0,\delta)$ (或简称为**邻域**, 记作 $U(P_0)$), 即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,||PP_0|<\delta\},$$

或

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

在点 P_0 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$ 中去掉中心点 P_0 得到的点集

$$\{P\,|0<|PP_0|<\delta\}\quad 或\quad \left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为**点 P_0 的去心 δ 邻域**, 记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ (或简记作 $\mathring{U}(P_0)$, 简称为**去心邻域**).

在几何上, $U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 P_0 为中心、δ 为半径的圆内部的点的全体, 而 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 则是 xOy 平面上以点 P_0 为中心、δ 为半径且去掉圆心 P_0 的圆内部的其他点的全体.

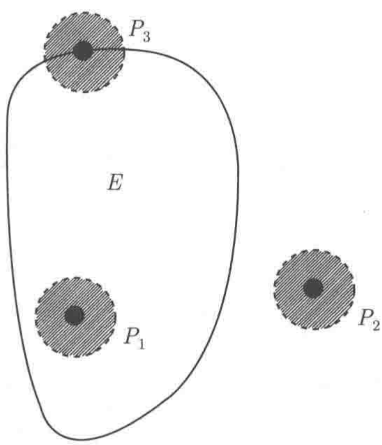

图 7-1-1

3. 点与点集的关系

下面利用邻域来描述点与点集之间的关系.

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点:

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\subset E$, 则称 P 为 E 的内点 (图 7-1-1 中的 P_1).

(2) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\cap E=\varnothing$, 则称 P 为 E 的外点 (图 7-1-1 中的 P_2).

(3) 如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点 (点 P 本身可以属于 E, 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的边界点 (图 7-1-1 中的 P_3). E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作 ∂E.

(4) 如果对 $\forall\delta>0$, $\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$, 则称 P 是 E 的聚点.

显然, 点集 E 的内点必属于 E, 而 E 的边界点与聚点可能属于 E, 也可能不属于 E, E 的外点必不属于 E.

例如, 平面点集 $E_1=\{(x,y)\,|a^2<x^2+y^2\leqslant b^2\}(b>a>0)$(图7-1-2) 中满足 $a^2<x^2+y^2<b^2$ 的每个点都是 E_1 的内点, 满足 $x^2+y^2=a^2$ 的每个点都是 E_1 的边界点, 它们都不属于 E_1, 满足 $x^2+y^2=b^2$ 的每个点也是 E_1 的边界点, 它们都属于 E_1.

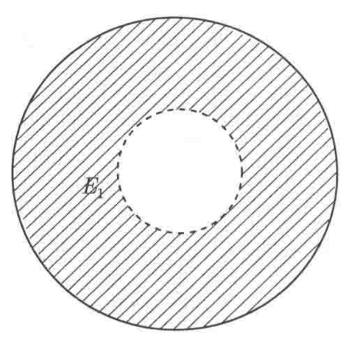

图 7-1-2

如果点集 E 的每个点都是 E 的内点, 则称 E 为**开集**. 如果点集 E 的余集 E^{c} 为开集, 则称 E 为**闭集**.

如果点集 E 内任何两点都可用一条包含于 E 内的折线连结起来, 则称 E 为**连通集**. 连通的开集称为**开区域**. 开区域连同其边界一起构成的点集称为**闭区域**. 开区域、闭区域, 或者开区域连同其部分边界构成的点集统称为**区域**.

对于点集 E, 如果存在 $\delta>0$, 使得 $E\subset U(O,\delta)$, 则称 E 为**有界集**, 其中 O 为坐标原点. 一个集合如果不是有界集, 则称它为**无界集**.

例如, 点集 $\{(x,y)\,|a^2<x^2+y^2<b^2\}$ 为有界开区域; 点集 $\{(x,y)\,|a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$ 为有界闭区域; 点集 $\{(x,y)\,|x+y>0\}$ 为无界开区域; 点集 $\{(x,y)\,|a^2\leqslant x^2+y^2<b^2\}$ 既非开区域也非闭区域, 但它是区域.

二、 n 维空间

一般地, 设 n 为一个取定的自然数, 用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成的集合, 即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也可用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 表示, 即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

规定: 当 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,0,\cdots,0)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的零元素, 记作 $\mathbf{0}$.

为了便于集合 $\mathbf{R}^n$ 中的元素之间建立联系, 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义如下线性运算.

设 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\forall\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 规定:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

这种定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n **维线性空间**, 简称为 n **维空间**.

$\mathbf{R}^n$ 中的每个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点, 数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为该点的第 i 个坐标. 当 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 这个点称为 **$\mathbf{R}^n$的坐标原点**, 记为 O.

设 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点, 实数

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

称为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中点 P 与 Q 之间的**距离**, 记作 $|PQ|$, 即

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

容易验证, 当 $n=1,2,3$ 时, 上述规定与解析几何中数轴上、平面直角坐标系中、空间直角坐标系中两点间距离的定义是一致的.

前面就平面点集所叙述的一系列概念, 可推广到 n 维空间中去.

例如, 设点 $P_0\in\mathbf{R}^n$, δ 是某一正数, 则称 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,||PP_0|<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}$$

为 R^n 中点 P_0 的 δ 邻域. 以邻域概念为基础, 可进一步定义 n 维空间点集的内点、外点、边界点和聚点以及开集、闭集、区域等一系列概念.

三、多元函数的概念

在很多实际问题中, 有多个变量之间相互依赖的情形.

例 1　三角形的面积 A 由它的底边长 a 与高 h 所决定, 即

$$A=\frac{1}{2}ah.$$

例 2　万有引力定律告诉我们, 自然界中任何两个物体都是相互吸引的, 引力的大小与两物体的质量的乘积成正比, 与两物体间距离的平方成反比. 即

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}.$$

其中, G 表示万有引力常数; m_1,m_2 分别表示两个物体的质量; r 表示两个物体之间的距离; F 表示两个物体之间引力的大小, 它随着 m_1,m_2,r 的变化而变化.

上面的例子说明事物的存在、变化依赖于多个因素, 抽象出它们在数量关系上的共性可概括出多元函数的概念.

定义 1　D 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个非空子集, 映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为定义在D上的二元函数, 记作

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

或

$$z=f(P),\quad P\in D.$$

其中, 点集 D 称为该函数的**定义域**, x,y 称为**自变量**, z 称为**因变量**.

由定义 1 可知, 与自变量 x,y 相对应的因变量 z 的值, 称为函数 f 在点 $P(x,y)$ 处的**函数值**, 记作 $f(x,y)$. 函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**, 记作 $f(D)$, 即

$$f(D)=\{z\,|z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

一般地, 二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域是指函数有意义的点构成的点集, 称为函数 $z=f(x,y)$ 的**自然定义域**. 在解决实际问题时还要考虑实际背景对变量的限制.

例 3　求二元函数

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$$

的定义域.

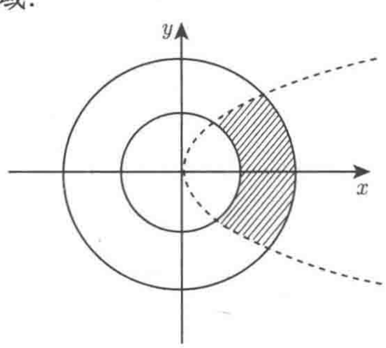

图 7-1-3

解　要使表达式有意义, 必须有

$$\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leqslant 1,\\ x-y^2>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\\ x>y^2,\end{cases}$$

故所求定义域 (图 7-1-3) 为

$$D=\left\{(x,y)|2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x>y^2\right\}.$$

例 4　已知 $f(x,y)=x^2+y^2-xy$, 求 $f(x-y,x+y)$.

解　将 $f(x,y)$ 中 x,y 分别用 $x-y,x+y$ 代替即可.

$$f(x-y,x+y)=(x-y)^2+(x+y)^2-(x-y)(x+y)=x^2+3y^2.$$

例 5　已知 $f(x-y,x+y)=x^2+3y^2$, 求 $f(x,y)$.

解　令 $u=x-y,v=x+y$, 则 $x=\dfrac{u+v}{2},y=\dfrac{v-u}{2}$, 于是

$$f(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+3\left(\frac{v-u}{2}\right)^2=u^2-uv+v^2,$$

从而 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, 对 $\forall P(x,y)\in D$, 对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 如果以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标, 这样就确定了空间一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 的所有点时, 便得到一个空间点集

$$S=\{(x,y,z)\,|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

称点集 S 为**二元函数**$z=f(x,y)$**的图形**(图 7-1-4). 显然, 属于 S 的点 $M(x,y,z)$ 满足三元方程

$$z-f(x,y)=0,$$

所以二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形就是空间中的一张曲面.

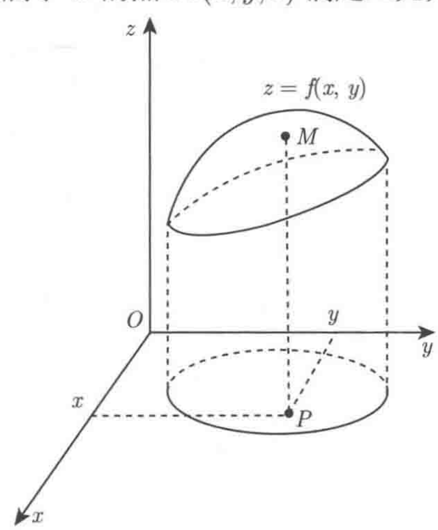

图 7-1-4

例如, 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示以原点为中心、半径为 1 的上半球面, 它的定义域 D 是 xOy 面上以原点为中心的单位圆盘; 二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示顶点在原点的圆锥面, 它的定义域 D 是整个 xOy 面.

一般地, 把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D, 则可类似地定义 n 元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或记为

$$u=f(P),\quad P\in D.$$

当 $n=1$ 时, n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时, n 元函数就统称为**多元函数**.

多元函数的定义域、值域等概念与二元函数类似, 这里不再赘述.

四、 多元函数的极限

与一元函数极限概念类似, 我们考虑当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时, 对应的函数值 $z=f(x,y)$ 是否无限接近某确定的常数 A(即二元函数的极限概念). 下面用 "$\varepsilon-\delta$" 来描述极限概念.

定义 2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 $D\subset\mathbf{R}^2$, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时, 恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的**极限**, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

也可记作

$$f(x,y)\to A(\rho\to 0) \quad 或 \quad f(P)\to A(P\to P_0),$$

这里, $\rho=|PP_0|$.

为了区别于一元函数的极限, 我们称二元函数的极限为**二重极限**.

必须指出: 在定义 2 中, $P\to P_0$ 表示动点 P 以任意方式趋于点 P_0, 也就是表示动点 P 与点 P_0 之间的距离趋于 0, 即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

因此, 当点 $P(x,y)$ 以某些特殊方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 即使函数 $f(x,y)$ 趋于 A, 也不能断言 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$. 如果 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数 $f(x,y)$ 趋于不同的常数; 或者当 $P(x,y)$ 以某种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数 $f(x,y)$ 不趋于任何常数, 则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

例 6　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

证　当点 $P(x,y)$ 沿着 x 轴趋于点 $O(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0,$$

当点 $P(x,y)$ 沿着抛物线 $y=x^2$ 趋于点 $O(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

这一结果表明动点沿不同的曲线趋于点 $O(0,0)$ 时, 对应的函数值趋于不同的常数, 因此, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

关于多元函数的极限运算, 有与一元函数类似的运算法则, 在此就不再叙述了.

例 7 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin(xy)+xy^2\cos x-2x^2y}{x}$.

解 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right] = \lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 1} y = 1,$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)+xy^2\cos x-2x^2y}{x}\\ =&\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin(xy)}{x}+\lim_{(x,y)\to(0,1)}(y^2\cos x)-\lim_{(x,y)\to(0,1)}(2xy)=1+1-0=2.\end{aligned}$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$.

解 由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\sqrt{1+x^2+y^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, 因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

例 9 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2\sin(2xy)}{x^2+y^4}$.

解 由于当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$0\leqslant\left|\frac{xy^2\sin(2xy)}{x^2+y^4}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\sin(2xy)\right|\to 0,$$

由夹逼原理知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2\sin(2xy)}{x^2+y^4}=0.$$

关于二元函数极限的定义及运算性质均可相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去, 这里不再赘述.

五、 多元函数的连续性

下面利用二元函数的极限概念给出二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处连续的定义.

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 $D\subset\mathbf{R}^2$, $P_0(x_0,y_0)\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续, 也称 $z=f(x,y)$ 是 D 上的连续函数. 在区域 D 上连续的二元函数的图形是 D 上一张无 "孔" 无 "缝" 的连续曲面.

例 10 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^x$, 证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

证　对于任意的 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$, 因为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x_0}=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^x$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

由 $P_0(x_0,y_0)$ 的任意性知, $f(x,y)=\mathrm{e}^x$ 作为 x,y 的二元函数在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

与一元初等函数相类似, 可以用一个式子表示的函数称为**多元初等函数**. 多元初等函数在定义域内是连续的.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续, 则称 P_0 为**函数$z=f(x,y)$的间断点**.

例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的定义域为 $D=\mathbf{R}^2$. 由于当 $(x,y)\to(0,0)$ 时其极限不存在, 所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

二元函数的间断点也可以形成一条曲线, 称为**间断线**.

例如, 函数 $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $C=\{\,(x,y)|\ x^2+y^2=1\,\}$ 上没有定义, 所以该圆周上每一点都是其间断点.

由二元函数极限的运算法则可知: 二元连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍为连续函数, 二元连续函数的复合函数仍为连续函数.

例 11　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\ln(x^2+y^2)$.

解　由于函数 $\ln(x^2+y^2)$ 是二元初等函数, $(0,2)$ 是其定义区域内的点, 故

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\ln(x^2+y^2)=\ln(0^2+2^2)=\ln 4.$$

二元函数连续性的定义、运算法则及其相关性质可以推广到 $n(n>2)$ 元函数, 这里不再赘述.

六、闭区域上多元连续函数的性质

与闭区间上一元连续函数的性质相似, 在有界闭区域上多元连续函数也有如下重要性质.

性质 1(有界性定理)　*在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上有界.*

性质 2(最大值和最小值定理)　*在有界闭区域 D 上的多元连续函数在 D 上一定有最大值和最小值.*

性质 3(介值定理)　*在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定能在 D 上取得介于它的最大值与最小值之间的任何值.*

习　题　7-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;　　(2) $z=\ln(x+y)$;

(3) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$;　　　　(4) $z=\sqrt{x\sin y}$.

2. 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $x>0$, 求 $f(x)$.

3. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, 求 $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$.

4. 设 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$, 求 $f(x,y)$.

5. 设函数 $z=f(x,y)$ 满足关系式 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$, 试将 $f(x,y)$ 化成 $z=x^kF\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式.

6. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y\sin(2x)}{\sqrt{xy+1}-1}$;　　　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\sqrt{x^2y+1}}{x^3y^2}\sin(xy)$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y)\sin\dfrac{1}{x}$;　　　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3y^3+2yx^2}{x^2-xy+y^2}$.

7. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x-y}{x+y}$;　　　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

8. 讨论函数 $f(x,y,z)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{|x^2+y^2+z^2-1|}}$ 在何处间断.

9. 讨论下列函数在点 $(0,0)$ 处的连续性.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

10. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 证明:

(1) 一元函数函数 $\phi(x)=f(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续;

(2) 一元函数函数 $\varphi(y)=f(0,y)$ 在点 $y=0$ 处连续;

(3) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

11. 函数 $z=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}$ 是经过怎样的两个关系式复合而成的?

第二节　偏　导　数

一、偏导数的概念及其计算

在一元函数中我们讨论了它的变化率即导数问题, 对于多元函数, 同样需要讨论函数对每一个变量的变化率问题.

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0)$ 内有定义, 当 $y=y_0$ 时,

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的**偏增量**. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对x的偏导数**, 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_x(x_0,y_0),$$

即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}. \tag{7-2-1}$$

类似地, 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_y(x_0,y_0),$$

即

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}. \tag{7-2-2}$$

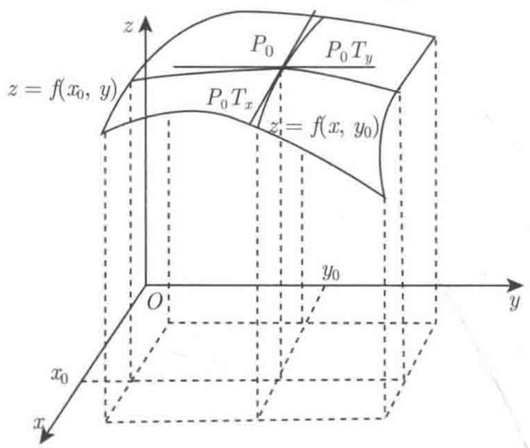

图 7-2-1

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数有下述几何意义.

设 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点, 过 P_0 作平面 $y=y_0$, 截此曲面得一曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y),\\ y=y_0,\end{cases}$$

此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$, 那么偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\big|_{x=x_0}$, 也就是此曲线在点 P_0 处的切线 P_0T_x 对 x 轴的斜率 (图 7-2-1). 同样, 偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线 $\begin{cases} z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$ 在点 P_0 处的切线 P_0T_y 对 y 轴的斜率.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数仍是 x,y 的函数, 并称它为**函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导函数**, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x\quad 或\quad f_x(x,y),$$