



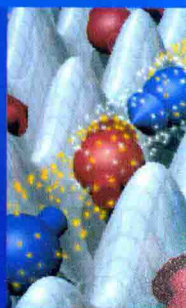
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主编 杨国桢 副主编 程福臻

力学与理论力学

[下册]



(第二版)

秦 敢 向守平 编著



科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主 编 杨国桢 副主编 程福臻

力学与理论力学(下册)

(第二版)

秦 敢 向守平 编著



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是《力学与理论力学(下册)》,即理论力学部分,也是“中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书”中的一本.本书是作者在中国科学技术大学授课时所用讲稿的基础上,经过十几年的教学实践不断修改而成的,其特点是注重归纳法教学、物理直觉能力的培养和物理方法的阐述,这对在大学中初学物理的学生是有益和重要的.本书内容精练、物理概念准确清晰,着力用现代观点审视教学内容,并为当代前沿开设了一些窗口和接口.

本书可作为综合性大学及理工类院校的理论力学教材或参考书,也可供大专院校物理师生及物理教学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

力学与理论力学.下册/秦敢,向守平编著.—2版.—北京:科学出版社,2017.8

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书/杨国桢主编
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
ISBN 978-7-03-054413-1

I. ①力… II. ①秦…②向… III. ①力学-高等学校-教材 ②理论力学-高等学校-教材 IV. ①O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 220050 号

责任编辑:窦京涛 王 刚 / 责任校对:邹慧卿
责任印制:霍 兵 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2017 年 8 月第 二 版 印张:15 1/2

2017 年 8 月第六次印刷 字数:368 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版丛书序

2008年这套丛书正式出版,至今使用已五年,回想当初编书动机,有一点值得一提.我初到中国科学技术大学理学院担任院长,一次拜访吴杭生先生,向他问起科大的特点在哪里,他回答在于它的本科教学,数理基础课教得认真,学生学得努力,特别体现在十年CUSPEA考试(中美联合招收赴美攻读物理博士生考试)中,科大学生表现突出.接着谈起一所大学对社会最重要的贡献是什么,他认为是培养出优秀的学生,当前特别是培养出优秀的本科生.这次交谈给了我深刻的印象和启示.后来一些参加过CUSPEA教学的老教师向我提出,编一套科大物理类本科生物理教材,我便欣然同意,并且在大家一致的请求下担任了主编.我的期望是,通过编写这套丛书将CUSPEA教学的一些成果能保留下来,进而发扬光大.

应该说这套书是在十年CUSPEA班的教学内容与经验基础上发展出来的,它所涵盖的内容有相当的深度与广度,系统性与科学的严谨性突出;另外,注重了普通物理与理论物理的关联与融合、各本书物理内容的相互呼应.但是,使用了五年后,经过教师的教学实践与学生的互动,发现了一些不尽如人意的地方和错误,这次能纳入“‘十二五’普通高等教育本科国家级规划教材”是个很好的修改机会,同时大家也同意出版配套的习题解答,也许更便于校内外的教师选用.为大学本科生教学做一点贡献是我们的责任,也是我们的荣幸.盼望更多的使用本套书的老师和同学提出宝贵建议.



2013年10月于合肥

第一版丛书序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年.值此筹备校庆之际,由几位长年从事基础物理教学的老师建议,编著一套理科基础物理教程,向校庆五十周年献礼.这一建议在理学院很快达成了共识,并受到学校的高度重视和大力支持.随后,理学院立即组织了在理科基础物理教学方面有丰富教学经验的老师,组成了老、中、青相结合的班子,着手编著这套丛书,并以此进一步推动理科基础物理的教学改革与创新.

中国科学技术大学在老一辈物理学家、教育家吴有训先生、严济慈先生、钱临照先生、赵忠尧先生、施汝为先生的亲自带领和指导下,一贯重视基础物理教学,历经五十年如一日的坚持,现已形成良好的教学传统.特别是严济慈和钱临照两位先生在世时身体力行,多年讲授本科生的力学、理论力学、电磁学、电动力学等基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带领出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.这套丛书的作者,应该说都直接或间接受到过两位先生的教诲.出版这套丛书也是表达作者对先生的深深感激和最好纪念.

这套丛书共九本:《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》、《光学》、《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学 热力学与统计物理(上、下)》.每本约40万字,主要是为物理学相关专业本科生编写的,也可供工科专业物理教师参考.每本书的教学学时约为72学时.可以认为,这套丛书系列不仅是普通物理与理论物理横向关联、纵向自洽的基础物理教程,同时更加适合我校理科人才培养的教学安排,并充分考虑了与数学教学的相互配合.因此,在教材的设置上,《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》中,上册部分分别是普通物理内容,而下册部分为理论物理内容.还要指出的是,在《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学 热力学与统计物理(上、下)》中,考虑到普通物理与理论物理内容的界限已不再那样泾渭分明,而比较直接地用现代的、实用的概念、物理图像和理论来阐述,这确实不失为是一种有意义的尝试.

这套丛书在编著过程中,不仅广泛吸取了校内老师的经验,采纳了学生的意见,而且还征求了中国科学院许多相关专家的意见和建议,体现了“所系结合”的特点.同时,还聘请了兄弟院校及校内有丰富教学经验的教授进行双重审稿,期望将其错误概率降至最低.

历经几年,在科学出版社大力支持下,这套丛书终于面世,愿她能在理科教学改革与创新中起到一点作用,成为引玉之砖,共同来促进物理学教学水平的提高及其优秀人才的培养,并望广大师生及有关专家们继续提出宝贵意见和建议,以便改进.最后,对方方面面为这套丛书编著与出版的完成所付出艰辛努力及其给予关心、帮助的同志表示深切感谢!

中国科学技术大学理学院院长

杨国桢 院士

2007年10月

第二版前言

本书是在科学出版社 2008 年 7 月《力学与理论力学(下册)》(秦敢、向守平编著)第一版的基础上进行修订和补充后再版的.

相比于第一版,本版补充了“1.6 不独立坐标”和“2.5 连续体系的拉格朗日方程”两节内容;将“两体问题的约化”从“2.2.1 两体系统”移到“2.1.3 粒子散射的一般性理论”中;将 3.2 与 3.3 两节互换顺序,并在“3.3 正则变换”中,增加了“3.3.3 无穷小正则变换”和“3.3.4 正则变换的辛矩阵理论”两小节;在“4.4.4 定点转动的对称陀螺——拉格朗日陀螺”中增补了“3.快速陀螺实例——拉莫尔进动”.由于在“3.3.4 正则变换的辛矩阵理论”中对于泊松括号正则不变性有了更简洁的论证,所以删除了第一版附录中的“3.泊松括号正则变换不变性的证明”.此外,一些笔误和欠妥处也做了修订,个别习题做了更合适的表述并放到更恰当的位置.

在第一版长达 8 年多的使用过程中,中国科学技术大学的同仁和同学对本书提出了不少有意义的意见和建议,在此深表感谢!

中国科学技术大学朱界杰副教授仔细审阅了第二版手稿,提出了若干意见和建议,特别是对泊松括号正则不变性提供了更简洁严谨的证明,在此特别感谢!

由于水平有限,本书不妥之处在所难免.希望广大读者和同仁继续批评指正.

秦 敢 向守平

2016 年 12 月于中国科学技术大学

第一版前言

以“力”为研究着眼点的牛顿理论取得了从天上到人间的辉煌成功，证明了该理论是描述宏观低速力学体系的正确理论。但这一事实并不能说明力学领域中牛顿理论是独一无二的。如果我们能跳出“力”这个日常生活中比较熟悉的概念，寻找到其他恰当物理量作为研究的核心，以此为出发点，就可能建立起另一套力学理论。

几何光学的情况就是正确理论不唯一的一个例子。我们知道在几何光学适用的范围里，光在均匀介质中直线传播，在两个介质的边界上有反射定律和折射定律。这三个基本定律可以从惠更斯原理（更严格的是麦克斯韦电磁波理论）证明。然而还有一种思路完全不同的理论，即费马原理，其表述是，在起点和终点固定时，光的实际路径一定使光程取极值。令人惊奇的是，从费马原理也能得到几何光学的三个基本定律。

经过以拉格朗日和哈密顿为杰出代表的众多数理科学家的努力，两大类全新的力学理论建立了起来，它们统称为分析力学。分析力学以“能量”或“类能量”（拉格朗日函数）为立足点，只要得到某力学体系中它们的数学形式，将之代入到新理论体系的动力学方程后就可以对该力学体系进行求解。由于能量是一个标量，与力矢量相比较，数学处理往往较简单，且与坐标系方向无关，也容易推广到量子力学和相对论情形^①。对于约束问题，分析力学通过引入广义坐标和其他一些数学手段，可以很方便地进行求解，作为对比，牛顿理论中的运动方程涉及事先未知的约束力，求解比较繁琐。当然分析力学的更大意义在于，由于能量是所有运动形式的共有“度量”，分析力学能应用到力学体系之外的其他领域，特别是近代物理学科，如量子力学和统计物理等，这是以“力”为中心的牛顿理论难以做到的。

从“力”转到“能量”，刚开始需要一段适应过程。希望同学们从现在开始，有意识地培养新的习惯，以便在普通物理学知识的基础上更顺利地学习更高层次的物理学知识。

本书是《力学与理论力学》的下册，上册中对于牛顿理论体系已经作了全面的阐述，所以在下册中，一开始就介绍分析力学，使大家能在有限的学时里充分熟悉和掌握这些新的理论体系。具体安排如下：

第1章从达朗贝尔原理和哈密顿变分原理两条途径建立拉格朗日方程，并分

^① 在相对论情形，能量作为四矢量的一个分量作相对论变换，而力的相对论变换较复杂。

析对称性与守恒定律的内在联系. 第2章是拉格朗日方程的一些有意义的应用, 主要包括碰撞与散射和小振动, 对非线性振动以及电磁场中带电粒子也作了简单的介绍. 第3章是哈密顿力学, 包括哈密顿正则方程、正则变换、泊松括号以及哈密顿-雅可比方程等.

刚体是理论力学传统的内容之一, 知识点颇多, 单独成章是极其自然的. 尽管本书主要采用拉格朗日力学方法讨论该问题, 但由于刚体有太多属于自身的特别性质, 所以为避免冲淡分析力学主体内容的连贯性, 我们把这一章放到哈密顿力学之后.

自20世纪60年代以来, 非线性科学开始了迅速的发展, 并逐渐引起人们普遍的关注. 不仅是数学和物理学, 在化学、生物学、医学、气象学、天文学以及工程、信息科学等领域, 甚至在经济学、金融学以及社会学等人文科学领域, 对非线性问题的研究都日益广泛和深入. 现在人们了解到, 非线性现象是普遍存在的, 世界的本质可以说就是非线性的, 而真正线性的问题反而只是一些特殊或局部的情况. 因此, 我们深感有必要向大学生介绍一些非线性现象的基本知识. 考虑到非线性问题数学处理的复杂性以及本书篇幅的限制, 本书只对非线性力学的基本概念和重要结论作一简要介绍, 例如非线性与混沌、确定性的随机、分形与分维以及非线性波与孤立子等. 当然, 这些概念和结论中, 很多不仅适用于力学, 而且在其他领域也是普适的.

理论力学是理论物理的第一门课程, 所以指出学习理论物理与普通物理时的区别是很有必要的. 普通物理侧重于从个别的实验事实归纳出局部的理论规律, 最后再上升到这一学科领域的统一规律. 在论述问题时采用的数学工具比较初等, 有时在逻辑严密性上不太苛求, 而理论物理往往一开始就介绍最普遍规律, 之后才是这些规律在各种具体情形时的简化以及应用. 在论述问题时采用的数学工具更高级, 推演过程有着严格的逻辑性. 这种风格上的差异决定了学习时的方法也应该有所不同, 比如说, 相比于普通物理课程, 在理论物理课程的学习中掌握基本原理, 在做题时举一反三就显得更加重要.

在学习中, 还要处理好“树木”和“森林”的关系, 既要每一个关键细节揣摩, 也要注意学习的整体性, 具体是两个方面的, 其一是各分析力学体系之间, 以及它们与牛顿力学体系之间的比较, 其二是分析力学与其他学科, 如电磁学、光学、量子力学以及统计物理学等的联系.

此外, 要顺利地学习这门课程, 下列数学基础也是至关重要的——微积分、张量分析、线性代数、常微分方程和简单的偏微分方程.

在本书的编写过程中, 中国科学技术大学理论力学教研组的全体同仁曾对本书的风格和结构展开积极的讨论, 提供了一些建设性的思路. 中国科学院国家天文台邹振隆研究员、清华大学物理系安宇教授、中国科学技术大学李书民副教授和

汪秉宏教授认真阅读了本书的初稿，并提出了很多重要的建议和修正意见。本书全体编写组成员多次的相互讨论，也使我们受益匪浅。另外，在去年的试讲中热心同学的得力相助使本书增色不少。在此我们一并表示衷心的感谢！

本书在编写过程参考了国内外很多理论力学教材，比较重要的列在附录中。作者希望能博采众家之长，并在一些章节中加入我们自己对若干基本概念、重要原理以及科学方法的理解，目的是抛砖引玉，激发同学们的进一步思考。

尽管我们已经尽心尽力，但限于自身的科研教学水平，本书一定存在不妥之处。希望广大读者提出宝贵意见，以便再版时及时修正。

秦 敢 向守平

2008年3月于中国科学技术大学

目 录

第二版丛书序

第一版丛书序

第二版前言

第一版前言

第 1 章 拉格朗日方程	1
1.1 约束和广义坐标	1
1.1.1 约束的分类	2
1.1.2 广义坐标	5
1.2 达朗贝尔原理与拉格朗日方程	7
1.2.1 达朗贝尔原理	7
1.2.2 由达朗贝尔原理推出拉格朗日方程	12
1.3 哈密顿原理与拉格朗日方程	15
1.3.1 变分法简介	15
1.3.2 由哈密顿原理推出拉格朗日方程	23
1.4 拉格朗日力学的进一步讨论	25
1.4.1 拉格朗日函数的可加性和非唯一性	25
1.4.2 拉格朗日方程解题实例	28
1.4.3 拉格朗日方程求平衡问题	31
1.5 拉格朗日方程的运动积分与守恒定律	33
1.5.1 运动积分	33
1.5.2 能量守恒定律	34
1.5.3 动量守恒定律	36
1.5.4 角动量守恒定律	37
1.5.5 广义动量和循环坐标	38
1.6 不独立坐标	38
1.6.1 平衡问题	38
1.6.2 不独立坐标拉格朗日方程	40
第 2 章 拉格朗日方程的应用	43
2.1 两体的碰撞与散射	43
2.1.1 两体系统概述	43

2.1.2	弹性碰撞	43
2.1.3	粒子散射的一般性理论	46
2.1.4	卢瑟福散射	55
2.2	多自由度体系的小振动	57
2.2.1	自由振动	58
2.2.2	阻尼振动	69
2.2.3	受迫振动	73
2.3	非线性振动	80
2.4	带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数	85
2.5	连续体系的拉格朗日方程	87
2.5.1	一维均匀弹性棒的纵向振动	87
2.5.2	由哈密顿原理导出连续体系的拉格朗日方程	88
2.5.3	电磁场的拉格朗日方程	90
第3章	哈密顿力学	93
3.1	哈密顿正则方程	93
3.1.1	勒让德变换与哈密顿正则方程	93
3.1.2	哈密顿原理与哈密顿正则方程	96
3.1.3	循环坐标和劳斯方法	97
3.1.4	应用举例	99
3.2	泊松括号	102
3.2.1	泊松括号的定义和性质	102
3.2.2	泊松括号的应用	103
3.3	正则变换	106
3.3.1	正则变换方程	106
3.3.2	正则变换实例	110
3.3.3	无限小正则变换	113
3.3.4	正则变换的辛矩阵理论	115
3.4	哈密顿-雅可比方程	118
3.4.1	哈密顿-雅可比方程	118
3.4.2	应用举例	120
3.5	经典力学的延伸	124
3.5.1	经典力学与统计力学 1——相空间和刘维定理	124
3.5.2	经典力学与统计力学 2——位力定理	127
3.5.3	经典力学与量子力学——定态薛定谔方程的建立	128

第 4 章 刚体的运动	132
4.1 刚体运动的描述	133
4.1.1 刚体的自由度和运动分类	133
4.1.2 刚体运动的欧拉定理	134
4.1.3 无限小转动和角速度	136
4.1.4 刚体上任一点的速度和加速度	138
4.2 欧拉刚体运动学方程	140
4.2.1 欧拉角	140
4.2.2 欧拉刚体运动学方程	142
4.3 转动惯量张量和惯量主轴	142
4.3.1 转动惯量张量	142
4.3.2 角动量与转动动能	148
4.3.3 惯量主轴	148
4.3.4 惯量椭球	152
4.4 欧拉动力学方程和应用	155
4.4.1 欧拉动力学方程的建立	155
4.4.2 自由刚体——欧拉陀螺的一般解	157
4.4.3 对称欧拉陀螺	161
4.4.4 定点转动的对称陀螺——拉格朗日陀螺	165
第 5 章 非线性力学简介	171
5.1 非线性与混沌	172
5.1.1 单摆的运动	173
5.1.2 洛伦茨方程和奇怪吸引子	175
5.2 相平面、奇点(平衡点)的类型与稳定性	176
5.3 保守系统和耗散系统,吸引子	183
5.4 庞加莱映射	185
5.5 走向混沌的例子——倍周期分岔	187
5.6 混沌的刻画——李雅普诺夫指数	193
5.7 分形与分维	195
5.8 非线性波与孤立子	201
习题与答案	206
参考书目	218
中英文人名对照	219
附录 数学知识	220
名词索引	222
教学进度和作业布置	229

第 1 章 拉格朗日方程

1.1 约束和广义坐标

物体的机械运动可以分为两类:一类称为自由运动,做此类运动的物体,其坐标和速度完全决定于有确定形式的力和初始条件;另一类运动,除了要满足运动方程外,物体的坐标和速度还存在一些形式上不涉及任何力的限制关系,我们称这些关系为约束,称这类运动为非自由运动或有约束运动.

在牛顿力学框架中,对于有 N 个自由运动质点的体系的求解,可归结为求解二阶微分方程组

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1.1.1)$$

上式右边的第一项是除了第 i 个质点外的其余 $N-1$ 个质点对第 i 个质点的作用力,属于体系的内力,第二项是第 i 个质点所受到的体系外的作用力,即外力. 这些力都有给定的明确表达式,称为主动力. 求解上述方程组只是一个数学问题,简单情形有解析解,复杂情形则总有数值解,所以原则上自由运动问题都已经解决了.

非自由运动的运动方程为

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e + \mathbf{R}_i \quad (1.1.2)$$

与式(1.1.1)相比,上式右边多了最后一项 \mathbf{R}_i ,它保证第 i 个质点的运动服从某种给定约束形式的约束力. 与主动力不同,约束力不能事先就给出确切的表达式,而是与质点的运动状态相关,所以在研究约束体系时必须对包含约束力的运动方程以及所有约束方程(详见 1.1.1 节)进行联合求解. 求解方式将因约束情况的不同而千差万别,往往复杂繁琐,不再像自由运动情形那样简单明了.

与牛顿力学有所不同,分析力学通过一些数学手段,对于一些非自由运动问题,无需求解约束力就可以求得最终解. 此外,分析力学中“能量”或“类能量”代替了牛顿力学中“力”的地位,所以新的研究方法可以很方便地用于非力学体系.

分析力学是一个博大精深的理论体系,本章是其入门,所以有必要介绍一些基本概念. 我们首先对约束进行分类,然后引入简化此类运动问题的一个重要工具——广义坐标.

1.1.1 约束的分类

根据约束对质点或质点系运动的限制条件的不同性质,可以按以下三种方法对约束进行分类.

1. 完整约束与非完整约束

对于 N 个质点组成的质点系,记 \mathbf{r}_i 为第 i 个质点的位矢,所谓完整约束(或几何约束),是指质点系满足约束方程

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; t) = 0 \quad (1.1.3)$$

也就是说约束仅与各质点的坐标以及时间参量 t 有关,而与各质点的速度无关.

常见的完整约束是:质点被约束在某一曲线或曲面上运动,则约束方程就是该曲线或曲面的方程.例如,在水平圆环上运动的质点,在图 1.1.1 所示坐标系中,受到的完整约束是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

而在图 1.1.2 中旋转抛物面上运动的质点,其完整约束方程是

$$x^2 + y^2 = 2pz \quad (1.1.5)$$

又如,刚体中的任意两个质点之间的距离不变

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = d_{ij} = \text{const.} \quad (1.1.6)$$

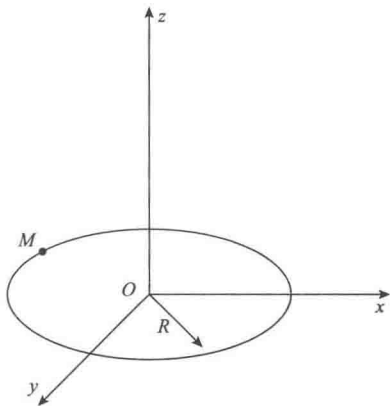


图 1.1.1 在水平圆环上运动的质点

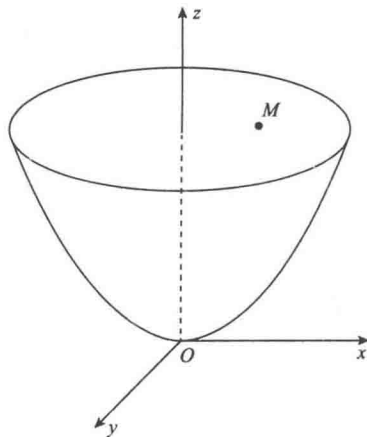


图 1.1.2 在旋转抛物面上运动的质点

但要注意,完整约束不仅仅对坐标有约束.如果将完整约束关系式对时间分别求一次或二次导数,就能得到与速度或加速度相关的约束,可见这些约束也存在于完整约束之中,只是它们与坐标约束并不独立.

描述一个完整约束体系所需独立参量的数目被定义为该体系的自由度.在三维空间中,确定一个自由质点的空间位矢需要三个独立的参量,而 N 个自由质点

组成的体系则需要 $3N$ 个独立的参量来描述. 于是单个质点的自由度为 3, 而 N 个自由质点体系的自由度是 $3N$.

如果该质点系存在 k 个完整约束

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.1.7)$$

则独立坐标的数目减少 k 个, 自由度

$$s = 3N - k \quad (1.1.8)$$

如果约束方程不仅含有坐标和时间, 还与速度相关, 即

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = 0 \quad (1.1.9)$$

则称该约束为微分约束.

有些微分约束具有可积性, 能转化为式(1.1.7)的形式. 例如, 如果两个质点的速度有以下限制关系

$$\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_0 \quad (1.1.10)$$

其中 \mathbf{v}_0 是常量. 此式可以积分为

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_0 t + \text{const.} \quad (1.1.11)$$

所以该约束关系等价于仅仅对坐标的限制. 这类具有可积性的微分约束仍然属于完整约束.

相反, 有些微分约束不具有可积性, 即不能转化为坐标之间的约束关系, 则称其为非完整约束. 例如, 一个半径为 a 的圆盘保持竖直, 在 Oxy 水平面上做纯滚动, 如图 1.1.3 所示. 全面描述此运动体系的坐标可以选取为圆盘中心的坐标 x, y , 速度与 x 轴的夹角 θ , 以及圆盘的自转角 φ . 但这四个参量彼此不完全独立. 设盘心速度大小为 v , 则

$$v = a\dot{\varphi}, \quad \dot{x} = v\cos\theta, \quad \dot{y} = v\sin\theta \quad (1.1.12)$$

消去 v , 得到两个微分约束方程

$$dx - a\cos\theta d\varphi = 0, \quad dy - a\sin\theta d\varphi = 0 \quad (1.1.13)$$

由式(1.1.13)消去 φ 得

$$dx \sin\theta - dy \cos\theta = 0 \quad (1.1.14)$$

$$\frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{v^2} = 1$$

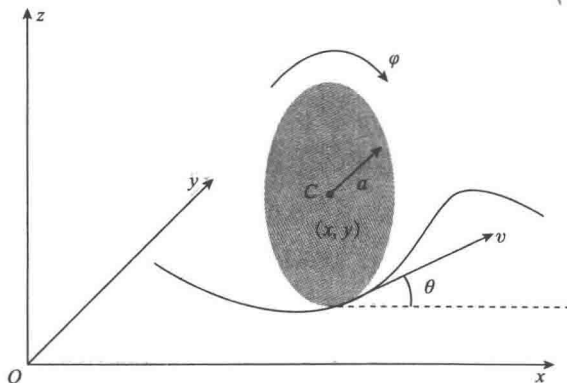


图 1.1.3 在水平面上滚动的竖直圆盘

数学上可以证明(见附录中的参考书目《分析动力学》,陈滨编著),微分式

$$F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

具有可积性,即该式乘以某积分因子 $\phi(x, y, z)$ 后能变为全微分 $df(x, y, z)$ 的充分必要条件是

$$F_x \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) + F_y \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + F_z \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.1.15)$$

或者写成紧凑的形式为

$$\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (1.1.16)$$

其中 \mathbf{F} 的三个分量分别是 F_x, F_y 和 F_z .

可以证明,式(1.1.14)不能满足式(1.1.16)(将变量 z 换成 θ),所以此处的微分约束不具有可积性,因而属于非完整约束。

与完整约束不同,非完整约束的独立参量数和自由度并不一致,详见1.6节。

2. 定常约束与非定常约束

需要指出的是,这些对质点约束的曲线或曲面既可以静止,也可以处于确定的运动状态,比如匀速运动或更复杂的其他运动.从约束是否与时间有关的角度来考虑,我们把不显含时间的约束称为定常约束(或稳定约束),其一般形式的数学表示为

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = 0 \quad (1.1.17)$$

而显含时间的约束称为非定常约束(或不稳定约束)。

定常约束体系在另一个有相对运动的参考系中看,可以是非定常约束.如一个质点在一个半径为 R 的固定球面上运动,则质点受定常约束 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,但在相对于固定球面沿 x 正方向以速度 v 运动的参考系中,约束关系变成了

$$(x' + vt)^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 \quad (1.1.18)$$

但是非定常约束和定常约束的这种转换并非总能进行,例如,一个质点被约束在一个球面上运动,但球面半径是随时间变化的,则约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R(t)^2 \quad (1.1.19)$$

此非定常约束就不能通过改变参考系来变换成定常约束。

3. 双侧约束与单侧约束

质点受约束的确定性也是约束的一个重要方面.如果质点始终不能脱离某约束,即该约束是等式的形式,则称该约束为双侧约束(或称双面约束、不可解约束^①);如果质点可以在某一侧脱离约束,即该约束是不等式的形式,则称为单侧约束(或称单面约束、可解约束)。

例如,两个质点在 xy 平面内运动,两质点由长为 l 的刚性杆相连,则该体系可以用这两个质点的直角坐标 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 来描述,这四个参量服从约

^① 此处的“可解”是指可以解脱,不是常规所指的可以求解。