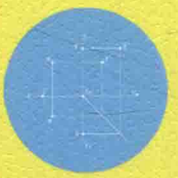
高等数学

习题解析（上）

徐乃楠　许静波　主　编
柳长青　杜奕秋　副主编



清华大学出版社

高等数学习题解析

（上）

徐乃楠　许静波　主　编
柳长青　杜奕秋　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是高等院校数学课程《高等数学(上)》(ISBN：978-7-302-47529-3)一书相配套的习题解析。本书严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过习题解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论，掌握相应的方法和技巧。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题解析. 上 / 徐乃楠，许静波　主编. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-47810-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①徐… ②许… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－题解 Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 168952 号

责任编辑：王　定　程　琪
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：曹　阳
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http：//www. tup. com. cn，http：//www. wqbook. com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup. tsinghua. edu. cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup. tsinghua. edu. cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：11.75　　**字　　数**：256 千字
版　　次：2018 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：45.00 元

产品编号：071021-01

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍“高等数学”课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》	ISBN：978-7-302-47529-3	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（上）》	ISBN：978-7-302-47810-2	定价：45.00 元
《高等数学（下）》	ISBN：978-7-302-47530-9	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（下）》	ISBN：978-7-302-47577-4	定价：45.00 元

本书是高等院校数学课程《高等数学（上）》（ISBN：978-7-302-47529-3）一书相配套的习题解析，严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过习题解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论，掌握相应的方法和技巧。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课程“高等数学”的学习辅助材料，以及其他数学教育工作者的参考资料。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编著者

2017 年 8 月

目　录

第1章　函数、极限与连续

1.1　函　　数

1.1.1　知识点概况

1. 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，简记为 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中，x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为这个函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$；函数值 $f(x)$的全体组成的集合称为 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y: y=f(x),\ x\in D\}$.

2. 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$中的每一个值 y，在 D 中有且只有一个值 x 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$.

3. 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则由 $y=f[g(x)]$，$x\in D_g$ 确定的函数，称为由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$所构成的复合函数，记为 $f\circ g$，即$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$. 它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

4. 给定两个函数 $f(x)$，$x\in D_f$ 和 $g(x)$，$x\in D_g$. 记 $D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，我们定义这两个函数的下列运算：

和(差) $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D-\{x: g(x)=0,\ x\in D\}$.

5. (1) 常值函数：$y=C$，C 为常数；

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$，$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数；

(3) 指数函数：$y=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq1$；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$，$a>0$ 且 $a\neq1$，特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$；

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这六类函数称为基本初等函数.

6. 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所得到的函数，称为初等函数.

7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

若存在数 M_1，使得对任一 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的有上界函数，称 M_1 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在数 M_2，使得对任一 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的有下界函数，称 M_2 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

若存在 $M>0$，使得对任一 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，$f(x)$ 是 D 上的有界函数. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，此时也就是说对任何 $G>0$，总存在 $x\in D$，使得 $|f(x)|>G$.

8. $f(x)$ 在 D 上有界等价于 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

9. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 D 上.

如果对任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，那么称 $f(x)$ 是 D 上的增函数.

如果对任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，那么称 $f(x)$ 是 D 上的减函数.

增函数与减函数统称为单调函数.

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

若对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数. 奇函数的图形关于原点对称.

若对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 通常我们说周期是指最小正周期.

1.1.2 习题解答

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2018x-1}$；

解 由 $2018x-1\geqslant 0$ 得函数的定义域 $D=\left[\frac{1}{2018}, +\infty\right)$.

(2) $y=\frac{1}{4-x^2}$；

解 由 $4-x^2\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, -2)\cup(-2, 2)\cup(2, +\infty)$.

(3) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$；

解　由 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 得函数的定义域 $D=[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$.

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

解　由 $1-x^2>0$ 得函数的定义域 $D=(-1,\ 1)$.

(5) $y=\cos\sqrt{x}$；

解　由 $x\geqslant 0$ 得函数的定义域 $D=[0,\ +\infty)$.

(6) $y=\tan(x-1)$；

解　由 $x-1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$得函数的定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

(7) $y=\arcsin(x-1)$；

解　由 $|x-1|\leqslant 1$ 得函数的定义域 $D=[0,\ 2]$.

(8) $y=\sqrt{1-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

解　由 $1-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1]$.

(9) $y=\ln(1+x^2)$；

解　由 $1+x^2>0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$.

(10) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$；

解　由 $x^2\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

(11) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{\lg(5-x)}$；

解　由$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\\ 5-x>0,\\ 5-x\neq 1\end{cases}$得函数的定义域 $D=[2,\ 3)\cup(3,\ 4)\cup(4,\ 5)$.

(12) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；

解　由$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\\ x^2-x-2>0\end{cases}$得函数的定义域 $D=(2,\ 3]$.

(13) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arccos\ln\sqrt{1-x}$；

解　由$\begin{cases}x\neq 0,\\ \left|\ln\sqrt{1-x}\right|\leqslant 1,\\ 1-x>0\end{cases}$得函数的定义域 $D=[1-e^2,\ 0)\cup(0,\ 1-e^{-2}]$.

(14) $y=\begin{cases}x^2+3,\ x<0,\\ \lg x,\ x>0;\end{cases}$

解 函数的定义域 $D=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

(15) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$；

解 由$\begin{cases}x>0,\\1-\ln x\neq 0\end{cases}$得函数的定义域 $D=(0,\ e)\cup(e,\ +\infty)$.

(16) 已知 $y=f(x)$的定义域是$[0,\ 1]$，求下列函数的定义域：

① $f(x-4)$；　　② $f(\lg x)$.

解 ① 因为 $f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$，故 $f(x-4)$应满足 $0\leqslant x-4\leqslant 1$，得 $4\leqslant x\leqslant 5$，即函数的定义域 $D=[4,\ 5]$.

② 因为 $f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$，故 $f(\lg x)$应满足 $0\leqslant \lg x\leqslant 1$，得 $1\leqslant x\leqslant 10$，即函数的定义域 $D=[1,\ 10]$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

解 不同．因为定义域不同.

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

解 不同．因为对应法则不同，$x<0$ 时，$g(x)=-x$.

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

解 相同．因为定义域、对应法则均相同.

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 不同．因为定义域不同.

3. 求下列函数的解析式：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(x+1)$与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

解 $f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\dfrac{x}{x+2}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

(2) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(x-1)$；

解 设 $t=x+\dfrac{1}{x}$，即 $x_1=\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$，$x_2=\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$，所以 $f(t)=\dfrac{t^2+t\sqrt{t^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{t^2+t\sqrt{t^2-4}}$或 $f(t)=\dfrac{t^2-t\sqrt{t^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{t^2-t\sqrt{t^2-4}}$，

即 $f(x)=\dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{x^2+x\sqrt{x^2-4}}$或 $f(x)=\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{x^2-x\sqrt{x^2-4}}$，

所以 $f(x-1)=\frac{x^2-2x-1+(x-1)\sqrt{(x-1)^2-4}}{2}+\frac{2}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$

或 $f(x-1)=\frac{(x-1)^2-(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-2}{2}+\frac{2}{(x-1)^2-(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$.

(3) 设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

解　由于 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$，故 $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$.

4. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x$；

解　由于 $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\cos(-x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}+\tan x$；

解　$f(-x)=(-x)\sqrt{(-x)^2-1}+\tan(-x)=-x\sqrt{x^2-1}-\tan x=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x)=x(1-x)$；

解　由于 $f(-x)=(-x)[1-(-x)]=-x(1+x)$，$f(x)\neq f(-x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$ 故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(4) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解　由于 $f(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

5. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；

解　是周期函数，周期为 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$；

解　是周期函数，周期为 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin\pi x$；

解　是周期函数，周期为 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$；

解　不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x$.

解　是周期函数，周期为 $l=\pi$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；

解　由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$，所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

解　由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；

解　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\dfrac{-\mathrm{d}y+b}{cy-a}$，所以 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\dfrac{-\mathrm{d}x+b}{cx-a}$.

(4) $y=2\sin 3x$；

解　由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) $y=1+\ln(x+2)$；

解　由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，所以 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

解　由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

7. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=\ln\sin^2 x$；

解　$y=\ln\sin^2 x$ 由 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

(2) $y=5^{\cos\sqrt{x}}$；

解　$y=5^{\cos\sqrt{x}}$ 由 $y=5^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

(3) $y=\arctan \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

解　$y=\arctan \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 由 $y=\arctan u$，$u=\mathrm{e}^v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

(4) $y=\cos^2(\ln x)$.

解　$y=\cos^2(\ln x)$ 由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=\ln x$ 复合而成.

8. 求下列复合函数：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解　$f[f(x)]=\begin{cases}\sqrt{1-[f(x)]^2}, & |f(x)|<1,\\ [f(x)]^2+1, & |f(x)|\geqslant 1.\end{cases}$

当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，$f[f(x)]=\sqrt{1-[f(x)]^2}=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}=|x|$.

当 $x=0$ 时，$f(x)=1$，$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=2$.

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=x^2+1>1$，$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

因此，$f[f(x)]=\begin{cases}|x|, & 0<|x|<1,\\ 2, & x=0,\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1,\end{cases}$ 即 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$ 即 $g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

9. 分别就 $a=2$，$a=\dfrac{1}{2}$，$a=-2$ 讨论 $y=\lg(a-\sin x)$是不是复合函数．如果是，求其定义域.

解　当 $a=2$，$a=\dfrac{1}{2}$时，该函数是复合函数．当 $a=-2$ 时，该函数不是复合函数．因为 $a=-2$ 时，$\sin x$ 的值域是$[-1, 1]$，所以 $a-\sin x$ 的值域是$[-3, -1]$，$\lg(a-\sin x)$没有意义，所以 $a=-2$ 时，该函数不是复合函数.

当 $a=2$ 时，$a-\sin x$ 的值域为$[1, 3]$，所以 x 可以取任意实数．

当 $a=\dfrac{1}{2}$时，$a-\sin x$ 的值域为$\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$，而 $\lg x$ 的定义域为大于 0，所以只需求这两部分的交叉部分即可，即 $\sin x<\dfrac{1}{2}$，得出 x 的定义域为$\left(2k\pi-\dfrac{7\pi}{6}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$($k$ 为任意整数).

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解　当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=-x\leqslant 0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$f[g(x)]=1-x$.

当 $x<0$ 时 $g(x)=x^2>0$，所以当 $x<0$ 时，$f[g(x)]=x^2+2$.

因此，$f[g(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 1-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

11. 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解　$f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$.

令 $x=t-2$，代入得 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$，即 $f(x)=2^{x^2-4}-x+2$.

因此，$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$.

12. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$.

解 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，

所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1$.

仅当$|x|=1$时，$\psi(x)=1$；当$|x|\neq 1$时，$1<\psi(x)\leqslant 2$.

因为 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |\psi(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |\psi(x)|>1,\end{cases}$ 所以 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1;\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

易知 $\varphi[\psi(x)]$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

1.2　数列极限

1.2.1　知识点概况

1. 若函数 f 的定义域为全体正整数集合 $\mathbf{N}_+$，则称函数 $f(n)$，$n\in\mathbf{N}_+$ 为数列.

2. 数列极限的通俗定义(不精确)：对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

3. 数列极限的精确定义($\varepsilon-N$ 语言)：设 $\{x_n\}$ 为一数列，a 为定值，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，定值 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

上述数列极限的 $\varepsilon-N$ 语言可以简写为：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 其中，记号 $\forall$ 表示“对任意的”“对每一个”，$\exists$ 表示“总存在”.

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就说数列 $\{x_n\}$ 不收敛，或称 $\{x_n\}$ 是发散数列.

4. (唯一性)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

5. (有界性)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

6. (保号性)如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$(或 $a<0$)，那么存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

7. 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant0$(或 $x_n\leqslant0$)，且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么 $a\geqslant0$(或 $a\leqslant0$).

8. (夹挤原理)如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) 从某项起，即 $\exists\,n_0\in\mathbf{N}_+$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

9. 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列.

10. (收敛数列与其子数列间的关系)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

11. 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列 $\{x_n\}$ 发散.

12. 有界的数列不一定收敛. 例如，$\{(-1)^n\}$ 是有界的但却是发散的. 这是因为它的奇数子列收敛于 -1，但是其偶数子列收敛于 1.

13. 若数列 $\{x_n\}$ 的奇数子列和偶数子列均收敛于 a，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

14. (四则运算法则)设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么 $\{x_n\pm y_n\}$，

$\{x_n \cdot y_n\}$也都是收敛数列，且有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\cdot B$.

当$y_n\neq 0(n=1, 2, \cdots)$且$B\neq 0$时，$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$也是收敛数列，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}$.

1.2.2 习题解答

1. 观察如下数列$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$；

解 当$n\to\infty$时，$x_n=\dfrac{1}{2^n}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$；

解 当$n\to\infty$时，$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}=0$.

(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n}$；

解 当$n\to\infty$时，$x_n=2+\dfrac{1}{n}\to 2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$.

(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；

解 当$n\to\infty$时，$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}\to 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $x_n=n\cdot(-1)^n$.

解 当$n\to\infty$时，$x_n=n\cdot(-1)^n$没有极限.

2. 用数列极限的定义验证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$；

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{n+1}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$成立，即$n>\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$，取$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$.

可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{n+1}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$；

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$成立，即$n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$，取$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$.

可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$；

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\dfrac{1}{2n^2}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$. 可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|=\dfrac{n+3}{n^2+n+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. 可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

3. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；

分析　要使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只需 $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明　因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；

分析　要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$.

证明　因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

分析　要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$.

证明　因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

4. 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　因为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又因为 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，