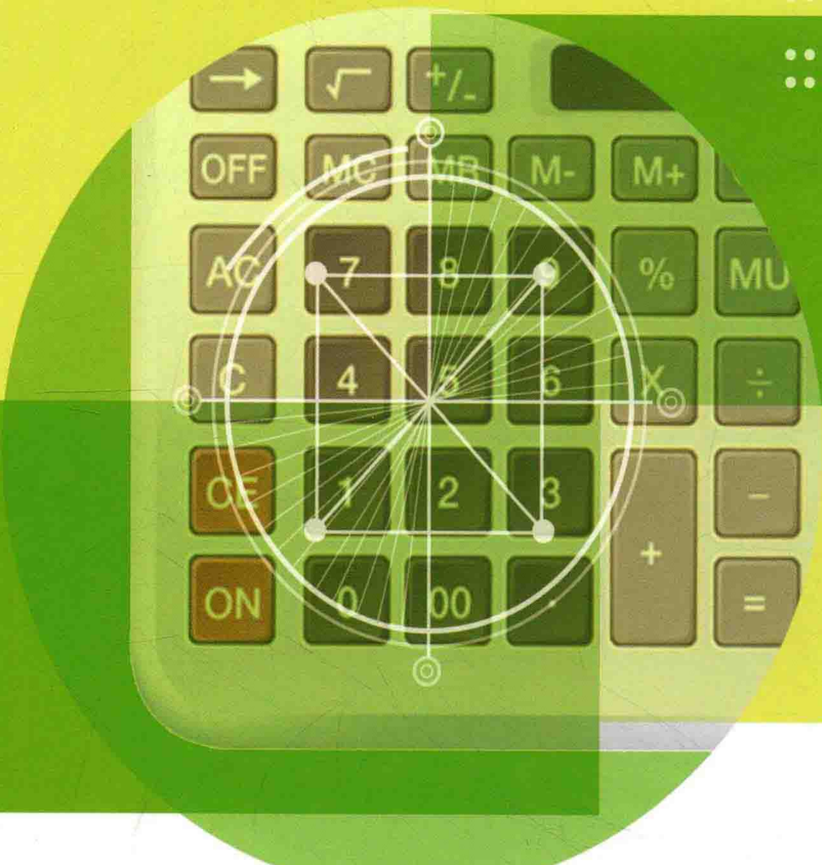
普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

赠教学课件

王开宝 李峥嵘 阳衡 主编



延边大学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

主 编 王开宝 李峥嵘 阳衡

延边大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 王开宝，李峥嵘，阳衡主编. ——延吉：
延边大学出版社，2017. 5
ISBN 978—7—5688—2818—5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… ②李… ③阳… Ⅲ. ①线性代数
高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 126133 号

线性代数

主编：王开宝　李峥嵘　阳衡
责任编辑：刘奕
封面设计：曾宪春
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　邮编：133002
网址：http：//www. ydcbs. com
E—mail：ydcbs@ydcbs. com
电话：0433—2732435　传真：0433—2732434
发行部电话：0433—2732442　传真：0433—2733266
印刷：北京彩虹印刷有限责任公司
开本：787×1092 毫米　1/16
印张：12　字数：300 千字
版次：2017 年 8 月第 1 版
印次：2017 年 8 月第 1 次
ISBN 978—7—5688—2818—5

定价：33. 00 元

前　　言

线性代数是理工科和经济管理类学生的一门重要基础课程，它不仅是学习其他数学课程的基础，也是在自然科学和工程技术等各个领域中广泛应用的数学工具。随着现代科技的飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数在理论和应用上的重要性越来越突出，同时也对线性代数的教学内容和教学理念从深度和广度上提出了更高的要求。编者根据教育部高等院校数学与统计学教学指导委员会制定的大学数学理工科线性代数课程的基本要求，结合理工科大学的专业特点和不同专业对线性代数内容的需要，以及编者多年来教授线性代数的教学经验和体会，精心编写了本书。

线性代数的基本概念、理论和方法具有很强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性。在选材编写过程中，以线性方程组为主线，以矩阵和向量为工具阐述线性代数的基本概念、基本原理和方法，尽量从简单实例入手，力图做到突出重点、简明扼要、清晰易懂，对重点内容提供较多的典型例题，以帮助学生更好地理解、掌握和运用线性代数的知识。

全书内容共分 8 章，分别介绍了行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换和线性规划等内容。在每章结尾还配置既注重基本内容的训练又有适当提高的习题。本书内容全面、体例完整，既可以作为高等院校“线性代数”课程教材，也可以作为有关专业人员的自学参考书.

本书在编写过程中，借鉴、参考了国内外的相关研究成果和兄弟院校的课程教材，在此谨对这些成果的著作人和编者表示最诚挚的感谢。

本书虽然经过多次讨论和修改，但由于水平有限，难免存在不妥之处，恳请广大专家、同行和读者批评指正，以便使之日臻完善。

编　者

目　录

第一章 行 列 式

【内容提要】行列式是线性代数的基本内容之一．本章首先介绍行列式定义，然后介绍行列式的基本性质和计算方法．为便于研究，约定在本教材中，线性方程组未知元按下角标由小到大的顺序排列，并称其为线性方程组的标准型．

【预备知识】解二元、三元线性方程组的加减消元法．

【学习目标】

1. 理解行列式的定义和性质．
2. 会用行列式的性质计算行列式．
3. 了解克莱姆法则，会用克莱姆法则求解线性方程组．

第一节 行列式的基本概念

一、二阶行列式

(一)背　景

设二元线性方程组的标准型为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

利用加减消元法，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆这个公式，引入二阶行列式的概念．

(二)定　义

定义 1　将 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 写成下面的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**，它表示 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 的差，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

等式右边的式子称为二阶行列式的**展开式**.

在二阶行列式中,横排称为**行**,竖排称为**列**,数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下角标 i 称为**行标**,表明该元素位于第 i 行;第二个下角标 j 称为**列标**,表明该元素位于第 j 列.

(三) 对角线法则

二阶行列式的展开式可以用**对角线法则**来记忆(见图 1 - 1).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1 - 1

把 a_{11}, a_{22} 所在直线称为**主对角线**, a_{12}, a_{21} 所在直线称为**副对角线**,于是二阶行列式的展开式就是主对角线的两个元素之积与副对角线两个元素之积的差.

(四) 二元线性方程组的行列式求解公式

在二元线性方程组的标准型中,未知元系数按原来的相对位置构成的行列式称为该方程组的**系数行列式**,并记作 D.

由二阶行列式的定义,得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

分别记作 D_1 和 D_2,于是二元线性方程组标准型的求解公式为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

其中, $D\neq 0$.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2=8 \\ 7x_1+2x_2=5 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=8-21=-13\neq 0$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=16-15=1$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}=20-56=-36$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{-13}=-\frac{1}{13}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-36}{-13}=\frac{36}{13}$$

二、三阶行列式

（一）背景

设三元线性方程组的标准型为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

用消元法可得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=$$
$$b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,$$
$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2=$$
$$a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31},$$
$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3=$$
$$a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}.$$

若

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0,$$

则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$
$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$
$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

与二元线性方程组的情形相类似，为便于记忆三元线性方程组的求解公式，引入三阶行列式的概念.

（二）定义

定义 2 将 9 个数写成式子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，其值规定为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

将右边二阶行列式展开整理得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$.

（三）对角线法则

三阶行列式的展开式也可以用**对角线法则**来记忆.

称 a_{11}, a_{22}, a_{33} 所在直线为**主对角线**，a_{13}, a_{22}, a_{31} 所在直线为**副对角线**.

观察发现，三阶行列式的展开式为 6 项的代数和，遵循图 1 - 2 所示的规律：每一项均为取自不同行、不同列的三个元素之积，实线相连的三个元素之积取“+”号，虚线相连的三个元素之积取“−”号.

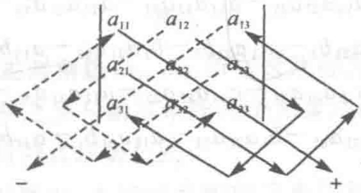


图 1 - 2

（四）三元线性方程组的行列式求解公式

对于三元线性方程组的标准型，未知元系数按原来相对位置构成的行列式称为该方程组的**系数行列式**，并记作 D，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

记 D_1, D_2, D_3 依次为下面的三阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

于是，当 $D\neq 0$ 时，三元线性方程组的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$[1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1]$$

$$-[1\times1\times(-1)+1\times(-3)\times1+(-2)\times2\times(-1)]=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=2+0+1-0-2-6=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-1+(-6)+0-(-1)-0-4=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0+2+(-4)-2-1-0=-5$$

所以该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-5}{-5}=1$$

三、n 阶行列式

前面，以记忆二元、三元线性方程组的求解公式为背景，定义了二阶行列式和三阶行列式，对于 n 元线性方程组，同样需要考虑类似的问题．

三阶行列式是以二阶行列式为基础定义的，即把三阶行列式降为二阶行列式，按此方法定义 n 阶行列式．

定义 3 设 $(n-1)(n\geqslant3)$ 阶行列式已经定义，规定由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的具有 n 行 n 列的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式．其值规定为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,n-1}\end{vmatrix}$$

其中，n 阶行列式的横排称为行，竖排称为列，数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 阶行列式的

元素．元素 a_{ij} 的第一个下角标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下角标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列．把 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在直线称为**主对角线**，$a_{1n},a_{2n-1},\cdots,a_{n1}$ 所在直线称为**副对角线**．

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$.

【思考】高于三阶的行列式是否也有对角线展开法则？

定义 4 划去 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，剩余元素按原来相对次序构成的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}．把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

根据定义 4，三阶行列式和 n 阶行列式可以分别缩写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}=$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

例 3 在 n 阶行列式中，主对角线上方的元素都为零的行列式称为**下三角行列式**．试计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值．

解 由行列式定义，按第一行展开时，元素 $a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}$ 的值皆为零，所以

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}$$

以此类推，得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得，**上三角行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地,位于主对角线之外的元素都为零的行列式称为**对角行列式**. 显然

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$D=1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$1-0+0-8=-7$$

第二节 行列式的性质

显然,高阶行列式直接用定义计算较为烦琐. 下面介绍行列式的性质,以此简化行列式的计算. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等.

性质 1 说明,行列式关于行成立的性质对于列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式中两行(列),行列式的值改变符号.

互换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,互换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1 如果行列式中有两行(列)元素对应相等,则此行列式的值为零.

性质 3 用常数 k 乘以一个行列式,等于此行列式中的某一行(列)中所有的元素都乘以同一常数 k,即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \overline{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将行列式$\overline{D}$按第 i 行展开，得

$$\overline{D}=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=kD$$

推论 2 行列式中某一行(列)中所有元素的公因数，可以提取到行列式的外面．

推论 3 如果行列式中某行(列)的元素全为零，则此行列式的值为零．

推论 4 如果一个行列式的两行(列)元素对应成比例，则此行列式的值为零．

性质 4 如果行列式中某行(列)的各元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

与性质 3 的证明类似，将等式左边的行列式按第 i 行展开即可．

性质 5 把行列式的某一行(列)的元素乘以常数 k 加到另一行(列)对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 4 和推论 4 即可证得．

第 j 行的 k 倍加到第 i 行对应元素上记作 r_i+kr_j，第 j 列的 k 倍加到第 i 列对应元素上记做 c_i+kc_j.

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1-1)$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\,(j=1,2,\cdots,n) \qquad (1-2)$$

定理 2 行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$$

定理 1,定理 2 证明从略.

例 1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&-1&3\\-1&3&3&0\\1&-1&2&1\\3&-1&0&1\end{vmatrix}$$

解 观察发现,运用定理 1 式(1 - 2),行列式 D 最终按第 2 列展开降阶比较简便.

$$D\overset{r_3-r_4}{\underset{r_2+3r_4}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2&0&-1&3\\8&0&3&3\\-2&0&2&0\\3&-1&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\times(-1)\begin{vmatrix}2&-1&3\\8&3&3\\-2&2&0\end{vmatrix}=-60$$

【思考】运用定理 1 式(1 - 1),行列式 D 最终按第 1 行展开降阶会怎么样?运用式(1 - 2),行列式 D 最终按第 4 列展开降阶如何?

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是各列元素的和都是 6,所以可以把第 2,3,4 行同时加到第 1 行上去,提出公因子 6,然后各行再减去第 1 行.

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{r_1+(r_2+r_3+r_4)}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\times\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=}}$$

$$6\times\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times2\times2\times2=48$$

例 3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式的性质将 D 化为上三角行列式.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[①]{r_1\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{\substack{r_4-r_3 \\ r_2+r_1}}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[②]{5r_3+3r_2} -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+\frac{1}{3}r_3}$$

$$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=24$$

【思考】

(1)在等号下面序号为①的那一步为什么要添加“$-$”号？

(2)在等号下面序号为②的那一步为什么要乘以$\frac{1}{5}$？不乘可以吗？乘以$\frac{1}{3}$可以吗？

(3)按照例 1 的方法计算该如何考虑？

(4)你是否可以按本例的解法编写一个小程序，在计算机上计算？

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

解 方法一

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[3r_4+r_2]{r_3-r_2}$$

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=11$$

方法二

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\-1&3&3&0\\1&3&1&5\\3&-1&0&8\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+3r_1}\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\2&3&0&9\\2&3&0&8\\3&-1&0&8\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix}2&3&9\\2&3&8\\3&-1&8\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}2&3&9\\0&0&-1\\3&-1&8\end{vmatrix}=$$

$$-(-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix}2&3\\3&-1\end{vmatrix}=11.$$

在计算过程中常见以下几种错误：

错误一

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\-1&3&3&0\\1&3&1&5\\3&-1&0&8\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&3&2&3\\1&3&1&5\\3&-1&0&8\end{vmatrix}=\cdots$$

错误二

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\-1&3&3&0\\1&3&1&5\\3&-1&0&8\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&3&2&3\\0&3&2&2\\0&-1&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal[3r_4+r_2]{r_3-r_2}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&3&2&3\\0&0&0&-1\\0&0&11&0\end{vmatrix}=\cdots$$

错误三

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\-1&3&3&0\\1&3&1&5\\3&-1&0&8\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&3&2&3\\0&3&2&2\\0&-1&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&-1&3&-1\\0&3&2&2\\0&3&2&3\end{vmatrix}=\cdots$$

错误四

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\-1&3&3&0\\1&3&1&5\\3&-1&0&8\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+r_2\\r_4+3r_2}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&0&-1&3\\0&3&2&3\\0&6&4&5\\0&8&9&8\end{vmatrix}=\cdots$$