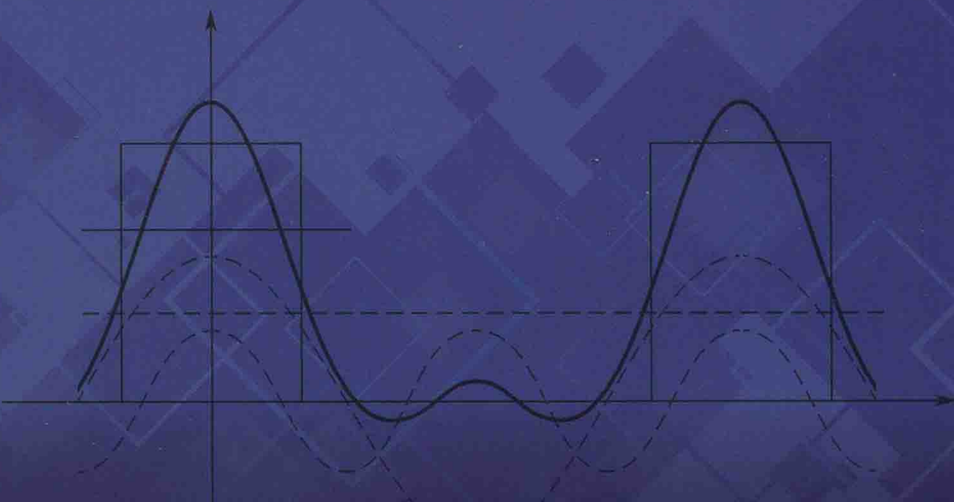
高等学校数理类基础课程“十三五”规划教材

复变函数与积分变换

第二版

刘国志　编著



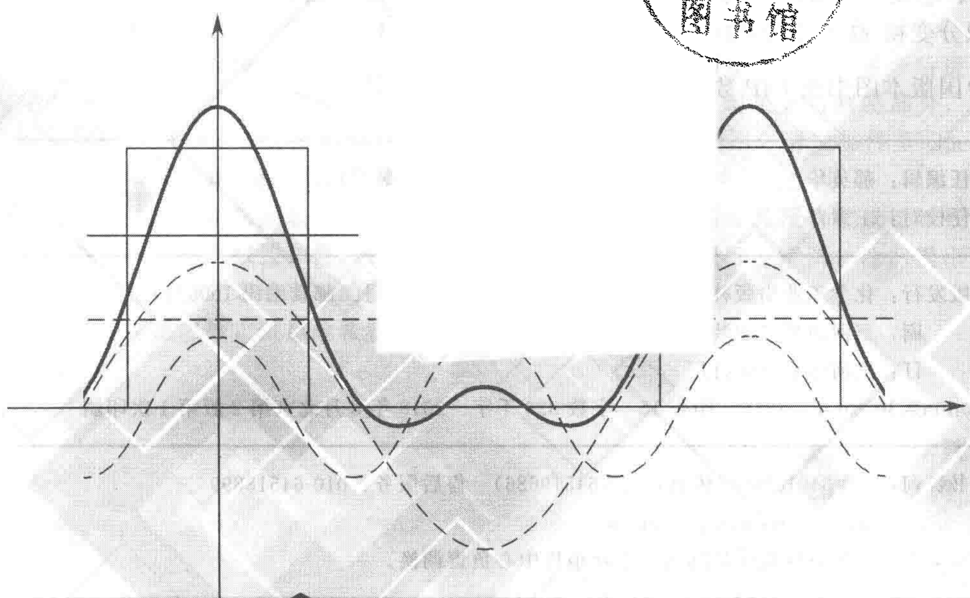
化学工业出版社

类基础课程“十三五”规划教材

复变函数与积分变换

第二版

刘国志　编著



化学工业出版社

·北京·

本书内容包括复变函数和积分变换两部分及与复变函数和积分变换有关的数学实验．复变函数部分内容有：复数与复变函数及其应用，解析函数及其应用，复变函数的积分及其应用，复级数及其应用，留数及其应用．积分变换部分内容有：傅里叶积分变换及其应用、拉普拉斯变换及其应用和Z变换及其应用．

本书每章都有专门的一节介绍该章知识在实际问题中的应用，向读者传授一套完整地、科学地解决实际问题的方法，使读者初步掌握用工程数学解决实际问题的能力；本书加入了用数学软件MATLAB做数学实验的内容，通过计算机模拟计算，加深读者对所学内容的理解，同时给出了用计算机处理实际问题的算例和程序．让读者初步掌握用MATLAB解决实际问题的方法，从而培养读者数学应用能力和科学计算能力．

本书例题丰富，论证严谨，易教易学．每章后有主要内容简要概括，可方便读者自学．

本书可作为高等院校及成人高等教育工科类相关专业学生的教材，也可供科技、工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/刘国志编著．—2版．—北京：化学工业出版社，2018.5

高等学校数理类基础课程“十三五”规划教材

ISBN 978-7-122-32000-1

Ⅰ．①复… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ．①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第077880号

责任编辑：郝英华　　装帧设计：张　辉

责任校对：王素芹

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：三河市延风印装有限公司

装　　订：三河市宇新装订厂

710mm×1000mm　1/16　印张15　字数326千字　2018年8月北京第2版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http：//www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：39.00元

前 言

本书第一版自 2012 年 3 月出版至今，已历时六年，经多年教学实践和检验，得到广大读者和任课教师的认可，在一定程度上满足了当时的教学需要．

为了适应 21 世纪我国高等教育改革与发展的需要，满足应用型本科院校培养面向生产、建设、管理、服务第一线的应用型人才对数学教育的要求；从全面素质教育的高度，将数学建模思想、数学软件 MATLAB 及工程实际问题融入工程数学教学中，编者在第一版基础上修订编写了本书．

本书在保持第一版风格的基础上，力求与时俱进，满足应用型人才培养的要求，新增了以下内容．

（1）在内容的安排上，坚持以学生基本素质与工程技术应用能力的培养为主导，强调学用结合、学做结合和学创结合的人才培养模式．在每一章新增了本章内容在实际中的应用一节．向学生传授一套完整地、科学地解决实际问题的方法，使学生初步掌握用工程数学解决实际问题的能力．

（2）新增了 Z 变换一章．介绍了 Z 变换及其在离散控制系统中的应用．举例介绍了利用 Z 变换求解差分方程和离散控制系统中的传递函数问题．

（3）新增了数学实验一章．本章采用 MATLAB 这一数学计算软件进行数学实验，介绍了如何使用 MATLAB 实现复变函数中的各种运算，如何利用 MATLAB 作复变函数的图形及利用 MATLAB 进行积分变换．举例介绍了利用 MATLAB 对动态电路仿真分析，让学生初步掌握用 MATLAB 解决实际问题的方法，从而培养学生数学应用能力和科学计算能力，使学生能够更好地适应将来的工作和科研环境．

书中的一部分内容能直接应用于解决实际问题，另一部分内容为读者今后进一步学习有关课程或实际应用方面提供一定的基础．原书第一版附录Ⅰ自测题部分，本次改版删除，如果有院校教学需要，自测题及其答案可免费使用，请发邮件至 cipedu@163.com 索取.

本书第二版由刘国志教授修订编著，承苗晨教授、宋岱才教授、佟景臣教授、丁洪生教授、刘凤智教授和鲁鑫、李印、王玉红老师对书稿进行了审阅，他们提出了很多宝贵意见，在此表示衷心的感谢．

书中不足之处，诚恳地希望读者批评指正．

编著者

营口理工学院

2018 年 4 月

第一版前言

本书是为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的需要，满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求，按照教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，针对工科数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质，又考虑到不同专业和不同层次的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况，在历年主讲该课使用的教材及自编讲义基础上改编而成的．全书较系统地介绍了复变函数与积分变换的基本理论和基本方法.

考虑到复变函数与积分变换是工科数学的一门重要的基础课，又是高等数学的后续课程；同时考虑到内容的连贯性及便于学生自学，在编写本书时，注意了下列几点.

（1）对于一元微积分中平行的概念，如极限、连续、微分等，既指出其相似之处，更强调其不同之点，以免初学者疏忽.

（2）对复变函数论中的基本定理和重要定理，如柯西积分定理和留数定理等，从叙述、证明到推广，均注意了科学性和严密性．这不仅反映了复变函数理论本身的系统性和严谨性，同时也可借以锻炼读者思考问题和逻辑推理能力.

（3）对于解析函数及复级数这个教学与自学上的难点，考虑到内容的衔接性，为使读者较易接受，本书把实二元函数的偏导数、全微分和对坐标的曲线积分及实数项级数和傅里叶级数分别插入到第1章、第3章、第4章和第6章内．这样做可使读者举一反三较为系统地学习.

（4）考虑到不同层次不同程度的学生在学习上的多种需要，配备了大量的例题和习题，增加了训练基本概念与基本理论的填空题和选择题，习题大都附有答案或提示，每章后有对主要内容的简要概括，以供读者选用，也便于读者自学.

附录中提供了三套自测题，可供读者检验自己对知识掌握的程度.

本书由辽宁石油化工大学刘国志教授编著．宋岱才教授主审，丁洪生教授审查，侯景臣教授和苗晨、赵晓颖对初稿进行了审阅，他们提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心感谢．特别是宋岱才教授不厌其烦，为编者复审了全部稿件，使原稿得到了很大改进，编者对他的这种敬业精神表示敬佩.

但限于编者水平，不妥之处仍然难免，敬请读者批评指正.

编著者
辽宁石油化工大学理学院
2011年12月

目 录

第 1 章　复数与复变函数

16 世纪意大利米兰学者卡当是第一个把负数的平方根写到公式中的数学家，并把 10 分成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 两部分，使它们的乘积等于 40. 后来法国数学家笛卡尔给出“虚数”这一名称，使虚数流传起来．但这也引起了数学界的一片困惑，很多大数学家都不承认虚数，包括德国数学家莱布尼茨和瑞士数学大师欧拉．然而，真理一定可以经得住时间的考验．经过大批数学家长时间的研究和积累，关于虚数的一些开创性成果不断出现．18 世纪末，复数渐渐被大多数人接受，并被赋予了几何意义，建立了复数间的运算．至此，复数理论才比较完整和系统地建立起来了．经过许多数学家长期不懈的努力，虚数揭去了神秘的面纱，显现出它的本来面目，原来虚数不“虚”．虚数成为数系大家庭中一员，从而实数集才扩充到了复数集．随着科学和技术的进步，复数的理论已越来越显示出它的重要性，它不但对数学本身的发展有着极其重要的意义，而且为证明机翼上升力的基本定理起到了重要的作用，并且在解决堤坝渗水的问题中显示出它的威力，也为建立巨大水电站提供了重要的理论依据．20 世纪以来，复变函数论已被广泛应用到理论物理、弹性理论、系统分析、信号分析、流体力学、量子力学与天体力学等方面，在种种抽象空间理论中，复变函数论还常常为之提供新思想、新模型．

本章在介绍复数的基础上，重点介绍复数的表示法及其运算和复数域上的函数——复变函数及其极限和连续性，最后介绍复数的应用．

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数的概念

在中学代数中已经知道，一元二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解. 为求解此类方程，引入了新的数 i，规定 $i^2=-1$，且称 i 为虚数单位. 从而方程 $x^2+1=0$ 的根记为 $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$，由此引入复数的定义.

定义 1.1.1　设 x,y 为任意实数，则称 $z=x+iy$ 为复数，其中 x 称为 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}(z)=x$，y 称为 z 的虚部，记为 $\mathrm{Im}(z)=y$.

当 $x=0,y\neq0$ 时，则 $z=iy$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，则 $z=x$ 为实数，因此复数是实数概念的推广.

若记 $\overline{z}=x-iy$，则称它为复数 $z=x+iy$ 的共轭复数. 例如，复数 $z=5+2i$ 的共轭复数为 $z=5-2i$，且有 $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})=5,\mathrm{Im}(z)=-\mathrm{Im}(\overline{z})=2$.

两个复数相等即当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 如设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则 $z_1=z_2\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$. 当一个复数为 0 时，当且仅当它们的实部和虚部同时为 0.

注意 两个不全为实数的复数不能比较大小.

1.1.2 复数的表示法

由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 所唯一确定，它与 xOy 平面上坐标为 (x,y) 的点是一一对应的，也与从原点指向点 (x,y) 的平面向量是一一对应的，因此在该平面上可用上述点和向量来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$（图 1.1.1），所以常把“点 z”或“向量 $\boldsymbol{z}$”作为“复数 z”的同义词. 此时，称表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的 xOy 平面为复平面或 z 平面，其中 x 轴上的点表示的是实数，称 x 轴为实轴；y 轴上的点表示的是纯虚数，称 y 轴为虚轴. 当 $y\neq0$ 时，点 z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

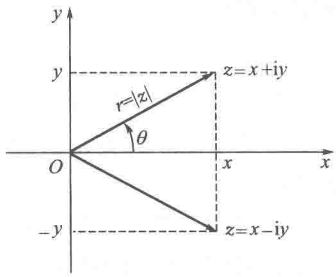


图 1.1.1

定义 1.1.2 在复平面中，称向量 $\boldsymbol{z}$ 的长度为复数 z 的模或绝对值，记为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.1.1}$$

当 $z\neq0$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{z}$ 与 x 轴正向的交角 θ 称为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}(z)=\theta$，于是有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \tag{1.1.2}$$

注意 $z=0$ 的辐角不确定，即 $\mathrm{Arg}(0)$ 无意义. 当 $z\neq0$ 时，其辐角 $\mathrm{Arg}(z)$ 有无穷多个，它们彼此相差 2π 的整数倍，可是满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leqslant\pi$ 的辐角值却只有一个，称该值为其辐角的主值，记为 $\arg(z)$，于是有

$$-\pi<\arg(z)\leqslant\pi, \tag{1.1.3}$$

$$\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{1.1.4}$$

且当 $z=x+\mathrm{i}y\neq0$ 时，有

$$\arg(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases} \tag{1.1.5}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面的位置是关于实轴对称的（图 1.1.1），因而 $|z|=|\bar{z}|$，如果 z 不在原点和负实轴上，还有 $\arg(z)=-\arg(\bar{z})$.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 通常称为复数的代数表达式. 由式(1.1.2) 和欧拉公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可分别写出其三角式和指数式，即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.6}$$

因此，复数的表示法基本有三种

① $z=x+\mathrm{i}y$（代数形式）；

② $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$（三角形式）；

③ $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（指数形式）.

这三种表示法可以互相转换，以适应讨论不同问题的需要.

【例 1.1.1】 将 $z=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 化为三角式和指数式.

解　$r=|z|=2$ 且 $\arg(z)=\arctan\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}-\pi=-\dfrac{5\pi}{6}$.

由式(1.1.6) 得 z 的三角式为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

而 z 的指数式为

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

1.1.3　复数的四则运算

设两个复数为 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，它们的加、减、乘、除运算定义如下：

$$z_1\pm z_2=x_1\pm x_2+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1);$$
$$z_1/z_2=(z_1\overline{z_2})/|z_2|^2\quad(z_2\neq 0).$$

不难证明，复数的加、减、乘运算和实数的情形一样，也满足交换率、结合律和分配率：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1z_2=z_2z_1;$$
$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,\quad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3;$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

共轭复数有以下主要性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $\overline{\overline{z}}=z$；

(3) $z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

由于复数可以看作平面向量，所以当 $z_1\neq 0$ 且 $z_2\neq 0$ 时，其和、差运算可以在复平面上按照平行四边形法则或三角形法则来表示（图 1.1.2）.

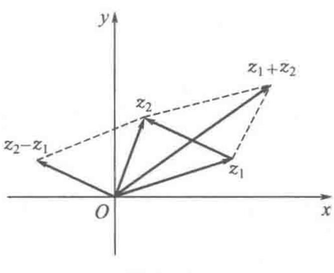


图 1.1.2

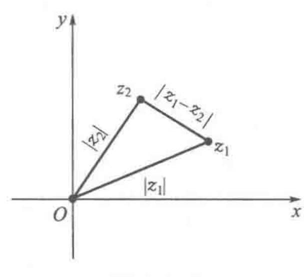


图 1.1.3

$|z_1-z_2|$就是点z_1与z_2之间的距离（图 1.1.3），因此有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad |z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1.1.7}$$

对于非零复数$z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)\quad(k=1,2)$，利用三角函数的和、差公式，容易验证$z_1z_2$和$z_1/z_2$的三角式分别为

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)];$$
$$z_1/z_2=(r_1/r_2)[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

由此可以看出，

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ |z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|; \tag{1.1.8}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2),\mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2). \tag{1.1.9}$$

注意 式(1.1.9)中等式两边是多值的，它们成立是指两边辐角值的集合相等，其中右端辐角的和(差)运算是指$\mathrm{Arg}(z_1)$的每个值可以加上(减去)$\mathrm{Arg}(z_2)$的任意一个值，另外，由于两个主值辐角的和或差可能超出主值的范围，因此对辐角的主值而言，等式不一定成立.

另外，对于$z_1=z_2=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$和任意自然数$n$有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.1.10}$$

其中，z^n表示n个相同复数z的乘积，称为z的n次幂.

如果定义$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，那么当n为负整数时上式也是成立的.

特别地，当z的模$r=1$，即$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$时，可得到棣莫弗(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.1.11}$$

1.1.4 复数的 n 次方根

定义 1.1.3 设有非零的已知复数z，若存在复数w使$z=w^n$，则称w为复数z的n次方根，记为$w=\sqrt[n]{z}=z^{1/n}$.

为了求出根w，令$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$.

根据式(1.1.10)有

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

于是
$$\rho^n=r,n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

即
$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},$$

其中$r^{\frac{1}{n}}$是算术根，故所求方根为

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right). \tag{1.1.12}$$

当$k=0,1,2,\cdots,n-1$时，可得到n个不同的根，而当k取其他整数值时，以上的根会重复出现. 例如$k=n$时，$w_n=w_0$.

从几何上易看出，$\sqrt[n]{z}$的n个不同的根就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正n边形的n个顶点，任意两个相邻根的辐角都相差$\dfrac{2\pi}{n}$.

【例 1.1.2】 求$\sqrt[4]{2+2\mathrm{i}}$.

解　因为 $r=|2+2\mathrm{i}|=\sqrt{8}$，$\theta=\arg(2+2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\sqrt[4]{2+2\mathrm{i}}=\sqrt[8]{8}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right],$$

即

$k=0$ 时，$w_0=\sqrt[8]{8}\left[\cos\dfrac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{16}\right]$；

$k=1$ 时，$w_1=\sqrt[8]{8}\left[\cos\dfrac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\dfrac{9\pi}{16}\right]$；

$k=2$ 时，$w_0=\sqrt[8]{8}\left[\cos\dfrac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\dfrac{17\pi}{16}\right]$；

$k=3$ 时，$w_0=\sqrt[8]{8}\left[\cos\dfrac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\dfrac{25\pi}{16}\right]$.

这四个根是内接于圆心在原点，半径为$\sqrt[8]{8}$的圆的内接正方形的四个顶点（图 1.1.4）.

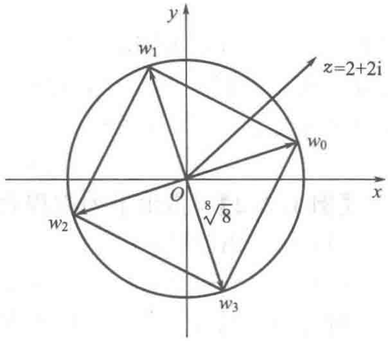


图 1.1.4

1.2　复平面上的曲线和区域

1.2.1　复平面上的曲线方程

平面曲线有直角坐标方程和参数方程两种形式. 复平面上的曲线也可写成相应的两种复数形式.

（1）直角坐标方程

设 $z=x+\mathrm{i}y$，xOy 面上曲线 C 的直角坐标方程为

$$F(x,y)=0. \tag{1.2.1}$$

由 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 或 $x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z)$得到复平面上曲线 C 的方程为

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)=0 \text{ 或 } F[\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)]=0. \tag{1.2.2}$$

（2）参数方程

令 $z=x+\mathrm{i}y$，$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则由两个复数相等的定义知，曲线 C 的参数方程：

$$x=x(t),y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\text{等价于复数形式}$$
$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad\text{或}\quad z=z(t). \tag{1.2.3}$$

例如圆周的参数方程 $x=x_0+R\cos t,y=y_0+R\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，其等价的复数形式为

$$z=z_0+R(\cos t+\mathrm{i}\sin t)\text{ 或 }z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

其中 $t\in[0,2\pi],z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$.

【例 1.2.1】 将直线方程 $3x+2y=1$ 化为复数形式.

解 将 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, y=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$代入方程，得

$$3(z+\overline{z})-\mathrm{i}[2(z-\overline{z})]=2.$$

此即为所给直线方程的复数形式.

同理可得，直线 $x=1$ 的复数形式为 $\mathrm{Re}(z)=1$ 或 $z+\overline{z}=2$. 又如圆周 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$可表示为

$$|z-z_0|=R. \tag{1.2.4}$$

其中 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$为圆心，$|z-z_0|$为动点 z 到定点 z_0的距离．由此可以看出，用复数 z 表示曲线上的动点，可以直接写出其轨迹方程. 如动点 z 到定点 z_1和 z_2的距离之和为 $2a$ 的轨迹为椭圆（$|z_1-z_2|<2a$），其方程为

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a. \tag{1.2.5}$$

【例 1.2.2】 指出下列方程表示什么曲线.

(1) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$； (2) $\mathrm{Re}(2+\overline{z})=4$；

(3) $z=(1+\mathrm{i})t+z_0(-\infty<t<+\infty)$；(4) $z=(1+\mathrm{i})t+z_0(t>0)$.

解 (1) 将 $z=x+\mathrm{i}y$ 代入方程$|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$得 $x^2+(y-2)^2=(x+2)^2+y^2$，整理化简为 $y=-x$，表示 z 平面上第二、四象限的角平分线. 事实上，方程显然表示到点 $2\mathrm{i}$ 和 -2 等距离的动点轨迹，即为连接 $2\mathrm{i}$ 和 -2 两点线段的垂直平分线［图 1.2.1(a)］.

(2) 将 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$ 代入方程 $\mathrm{Re}(2+\overline{z})=4$ 得 $x=2$，表示 z 平面上垂直于实轴的一条直线［图 1.2.1 (b)］.

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，代入方程 $z=(1+\mathrm{i})t+z_0$得 $x=x_0+t, y=y_0+t$ 它表示 z 平面上过点 z_0，其方向平行于向量 $1+\mathrm{i}$ 的直线.

(4) 同理可得，方程 (4) 只是方程 (3) 中直线的半直线. 由于点 z 满足 $\arg(z-z_0)=\arg[(1+\mathrm{i})t]=\dfrac{\pi}{4}$ $(t>0)$，因此它是从点 z_0出发倾角为 $\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$的射线［不包含点 z_0，见图 1.2.1(c)］. 显然其方程可简写为 $\arg(z-z_0)=\dfrac{\pi}{4}$.

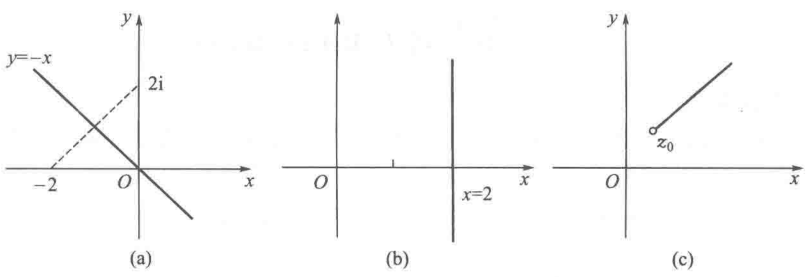
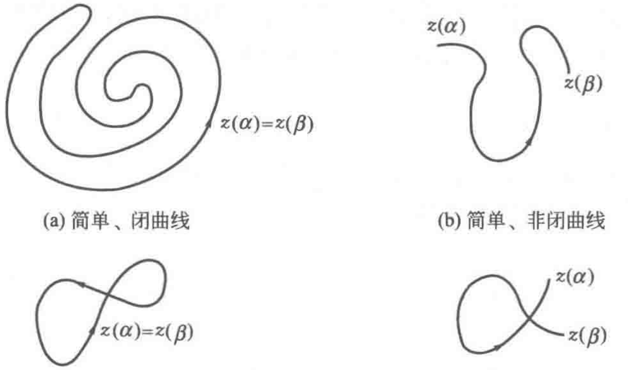


图 1.2.1

1.2.2 简单曲线与光滑曲线

设 $x(t)$，$y(t)$为区间$[\alpha,\beta]$上的两个实变量连续函数，则由复数方程 (1.2.3) 在复平面上决定的点集 C 称为复平面上的一条连续曲线.

定义 1.2.1　若连续曲线 $C:z=z(t)$ 对 $[\alpha,\beta]$ 上任意两个不同的点 t_1 及 t_2（且不同时为 $[\alpha,\beta]$ 的端点），总有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，则称该曲线为简单曲线或若当曲线；若简单曲线的起点与终点重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称它为简单闭曲线（图 1.2.2）.



(a) 简单、闭曲线　　(b) 简单、非闭曲线

(c) 非简单、闭曲线　　(d) 非简单、非闭曲线

图 1.2.2

定义 1.2.2　若 $x'(t),y'(t)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且不同时为零［即 $z'(t)=x'(t)+y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $z'(t)\neq 0$］，则称曲线 $C:z=z(t)=x(t)+y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 为光滑曲线；由有限条光滑曲线依次连接所组成的曲线称为分段光滑曲线.

如直线、圆周等都是光滑曲线，而连接直线段所构成的折线是逐段光滑曲线.

1.2.3　区域

为了给出区域的概念，首先引入平面点集的几个基本概念.

(1) 邻域

设 P_0 为定点，δ 为某个正常数，则称平面上以 P_0 为中心，δ 为半径的圆内部的点的集合 $\{P\mid |P-P_0|<\delta\}$ 为点 P_0 的一个 δ 邻域，记作 $N_\delta(P_0)$；而称满足不等式 $0<|P-P_0|<\delta$ 的点集为点 P_0 的一个去心邻域，记作 $\mathring{N}_\delta(P_0)$.

(2) 内点

设 G 为平面上的点集，若 $P_0\in G$ 且存在 P_0 的一个邻域 $N_\delta(P_0)\subset G$，则称 P_0 为 G 的内点.

(3) 边界点

如果点 P 的任何一个邻域内既含有属于 G 的点，又含有不属于 G 的点，则称点 P 为 G 的边界点. G 的所有边界点所组成的集合称为 G 的边界.

(4) 聚点

如果对任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{N}_\delta(P)$ 内总有 G 中的点，则称点 P 是 G 的聚点.

(5) 开集

若点集 G 内的每一个点都是它的内点，则称 G 为开集.

(6) 连通集

如果点集 G 内的任何两点，都可用完全属于 G 的折线连接起来，则称 G 为连通集.

定义 1.2.3 若平面点集 D 是连通的开集，称点集 D 为区域.

区域 D 连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域，简称为闭域，记作 $\overline{D}$. 可见闭区域不是区域，区域不包含它的任何边界点，区域的边界可能由几条曲线和一些孤立的点所组成.

(7) 有界域和无界域

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的某个确定的圆内部，则称 D 是有界域，否则称 D 是无界域.

例如，集合$\{(x,y)|1<x^2+y^2<3\}$是有界域；集合$\{(x,y)|x+y>0\}$是无界域，集合$\{(x,y)|x+y\geqslant 0\}$是无界闭区域．可见，闭区域也不一定是有界的.

(8) 单连通域和多连通域

简单闭曲线有一个明显特征，它把整个平面分成没有公共点的两个区域，一个是有界域称为它的内部，另一个是无界域称为它的外部，它们都以该曲线为边界，而不包含该曲线上的点. 下面介绍单连通域和多连通域的概念.

定义 1.2.4 设 D 是平面上的一个区域，如果 D 中的任意一条简单闭曲线的内部总是完全属于 D，则称 D 为单连通区域，否则称 D 为多连通区域.

单连通域 D 具有这样的特征：属于 D 的任何一条简单闭曲线，在 D 内可以经过连续的变形而收缩成一点，多连通域则不具有这一特征.

如整个复平面、半平面 $\mathrm{Im}(z)>a$ 或 $\mathrm{Re}(z)>b$ 等都是单连通域，除去原点和负实轴的复平面区域$-\pi<\arg(z)<\pi$ 也是单连通域（图 1.2.3).

任一去心邻域、环形域及图 1.2.4 所示的区域都是多连通域.

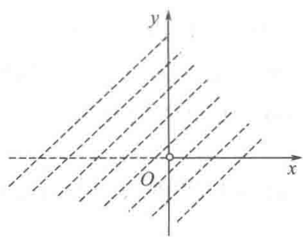


图 1.2.3

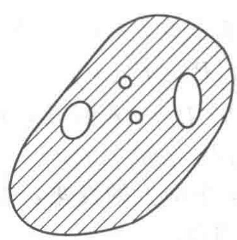


图 1.2.4

1.3* 二元函数的基本概念、偏导数和全微分

1.3.1 二元函数的基本概念

(1) 二元函数的概念

在很多自然现象及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下.

【例 1.3.1】 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h.$$

这里，当 r,h 在集合$\{(r,h)|r>0,h>0\}$内取定一对值(r,h)时，V 的对应值就随之确定.

【例 1.3.2】 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 是常数. 这里，当 V,T 在集合$\{(V,T)|V>0,T>T_0\}$内取定一对值(V,T)时，p 的对应值就随之确定.

上面两个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有共同的性质，抽出这些共性就可以给出二元函数的定义.

定义 1.3.1 设 D 是平面上的一个点集. 如果对每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x、y 的二元函数（或点 P 的函数），通常记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),\quad P\in D,$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，x、y 称为自变量，z 称为因变量.

上述定义中，与自变量 x、y 的一对值（即二元有序实数组）(x,y)相对应的因变量 z 的值，也称为 f 在点(x,y)处的函数值，函数值的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

与一元函数的情形相仿，记号 f 与 $f(x,y)$的意义是有区别的，但习惯上常用记号“$f(x,y),(x,y)\in D$”或“$z=f(x,y),(x,y)\in D$”来表示 D 上的二元函数 f. 表示二元函数的记号 f 也是可以任意选取的，例如也可以记为 $z=\varphi(x,y)$，$z=z(x,y)$等.

设 $z=f(x,y)$的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当(x,y)遍取 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$的图形（图 1.3.1）. 通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

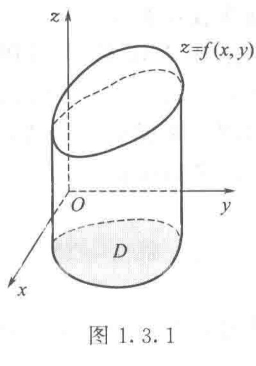


图 1.3.1

（2）二元函数的极限

下面讨论二元函数 $z=f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时的极限.

这里 $P\to P_0$表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0的距离趋于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

与一元函数的极限概念类似，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的过程中对应的函

数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，就说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限．下面用"$\varepsilon-\delta$"语言描述这个极限的概念.

定义 1.3.2 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点．如果存在常数 A，对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得满足 $0<|PP_0|<\delta$ 的任意的点 $P(x,y)\in D$，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A[(x,y)\to(x_0,y_0)],$$

也记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

为了区别一元函数的极限，把二元函数的极限叫做二重极限．

【例 1.3.3】 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证 这里函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=R^2/\{(0,0)\}$，点 $(0,0)$ 为 D 的聚点．因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

成立，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

注意 所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使 $f(x,y)$ 都无限接近于某一个定值，还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值，那么就可以断定函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，当点 $P(x,y)$ 沿着 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0.$$

又当点 $P(x,y)$ 沿着 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然点 $P(x,y)$ 以两种特殊方式（沿着 x 轴或沿着 y 轴）趋于原点时函数的极限存在并且相等，但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在．这是因为点 $P(x,y)$ 沿着直线