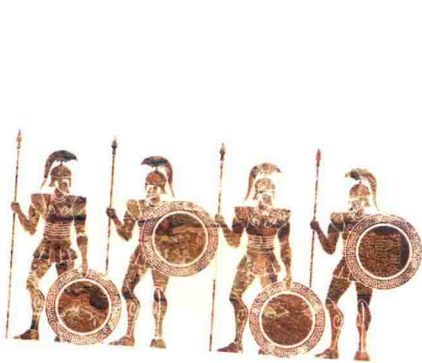
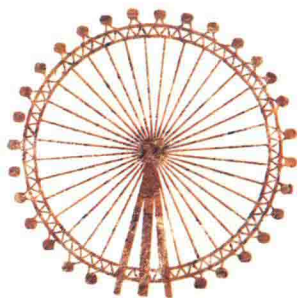




# 数学的故事

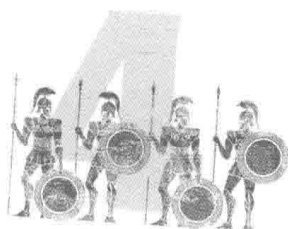
蔡天新 著



数学的故事自古暨今，横贯东西，遍及人类社会的每一个角落

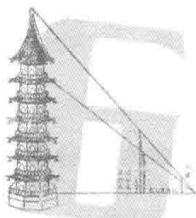
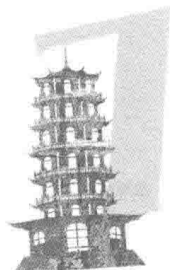
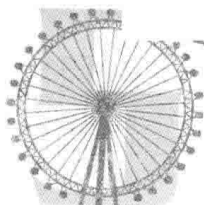


中信出版集团



# 数学的故事

蔡天新 著



### 图书在版编目 ( CIP ) 数据

数学的故事 / 蔡天新著. -- 北京: 中信出版社,  
2018.9 ( 2019.2重印 )  
ISBN 978-7-5086-9076-6

I. ①数… II. ①蔡… III. ①数学—普及读物 IV.  
① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 ( 2018 ) 第 124221 号

### 数学的故事

著 者: 蔡天新

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

( 北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座 邮编 100029 )

承 印 者: 北京楠萍印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 14 字 数: 130 千字

版 次: 2018 年 9 月第 1 版

印 次: 2019 年 2 月第 2 次印刷

广告经营许可证: 京朝工商广字第 8087 号

书 号: ISBN 978-7-5086-9076-6

定 价: 49.00 元

版权所有·侵权必究

如有印刷、装订问题, 本公司负责调换。

服务热线: 400-600-8099

投稿邮箱: author@citicpub.com

## 序言

在人类所有的发明中，数学和诗歌无疑是最古老的。可以说自从有了人类的历史，就有了这两样东西。如果说牧羊人计算绵羊的只数产生了数学，那么诗歌则起源于祈求丰收的祷告，由此看来，两者均源于生存的需要。比较而言，数学可能诞生于稍早的游牧文明，而诗歌则出现在农耕文明之初。无论数学还是诗歌，它们的故事和触角遍及人类社会的每一个角落，以及历史和生命的每一个瞬时。

2016年初夏，诗人北岛来杭州，电话约我见面。晚餐时，北岛说自己小时候数学很糟糕，但认为数学非常重要。当着其他朋友的面，他邀请我写一本《给孩子的数学故事》的书。我知道，几年前北岛选编了《给孩子的诗》<sup>①</sup>，出版后，一时洛阳纸贵，孕妇和幼孩母亲都纷纷购买。虽然如此，我并未立刻答应，因为若干年前，曾有多家出版社向我约过同名书稿。

原因有三。首先，我觉得中国的孩子够辛苦了，不想再给他们增添课外负担。其次，我从没有给少年儿童写过书，不知什么样的故事能吸

---

<sup>①</sup> 《给孩子的诗》由中信出版社于2014年7月出版。——编者注

引他们。再次，拙作《数学传奇——那些难以企及的人物》写作始于1990年，历时1/4个世纪，而作为“给孩子”系列书的主编，北岛希望我年内能完成书稿，是否来得及？撰写可不同于选编，每篇文章每个字词都得自己操笔。

那以后，北岛来过几次电话，分别是来自北京和南方，后来他又加我微信交流。北岛很真诚，“我调研过了，你是全中国最适合写这本书的人”。这句话最后打动了我。我与北岛认识已经20多年，第一次见面是在1995年夏天的巴黎。4年以后还是在同一座城市，我和巴黎的朋友为他庆祝50岁生日。2004年夏天，北岛第一次回湖州南浔老家省亲，我和家人也陪同前往。

虽说之前我曾10多次在北岛主编的《今天》杂志上发表诗歌、散文或译作，我们也都是《读书》杂志和三联书店的作者，他应该读过我的书籍或文章，包括数学文化方面的，没想到他还那么认真地去调研。可以说，是北岛的真诚和认真打动了我，于是我答应下来，在夏日远足归来以后，便开始动笔了。幸运的是，那个暑假特别长，因为G20（二十国集团）峰会在杭州召开。万事开头难，有了第一篇以后，剩下的都好办了。就像写作其他书籍一样，我享受其中。

其间还有别的故事发生。几乎在北岛来杭州的同一个星期，一位叫余建春的河南打工青年给我寄来一封手写的信函。小余老家是信阳新县，毕业于郑州一所牧业专科学校，业余喜欢钻研数论问题。在没有学过高等数学，也不知道同余符号等基础知识的情况下，小余得出了几个有意思的数论结果，包括给出无穷多组相邻的自然数，它们的立方和均为立方数。遗憾的是，这个结果外国人已经先他一步得出来了。

余建春的另一个发现是，给出著名的卡迈克尔数的一种新的判断方法，他用二次式代替经典的一次式，且效率不低，这是包括我本人在内

的数论工作者没考虑过的。卡迈克尔数是一类伪素数，它虽不是素数，但在某种意义上有着与素数相同的性质。我给小余回了信，对这项结果表示肯定。他随即回复我，他已到杭州打工，希望来浙大拜访我。刚好第三天我有研究生讨论班，便邀他来班上讲，给了他 30 分钟的时间。我觉得小余的难能可贵之处在于，不是冲着某某大猜想，而是专注于小问题。

我在朋友圈不经意提及此事，被敏感的晚报记者小 Z 看见，她联系我希望能采访余建春。出乎我的意料，她的报道和消息持续发酵，包括新华社、央视、《人民日报》、《中国日报》、《参考消息》，美国的 CNN（美国有线电视新闻网）、《华盛顿邮报》，英国的 BBC（英国广播公司）、《泰晤士报》，甚至法国巴黎地铁小报都进行了正面报道。父母早亡的小余命运因此改变，先后得到湖州、上海和香港的三位贵人相助，有机会迈出国门，并喜结良缘。与此同时，我发现有些报道明显过头，因此婉拒了包括伦敦《每日电讯报》等数十家媒体的采访要求。

这件事给我的启示是，数学虽然比较抽象，有时是无用的，却是大众（无论中外）关心的一门学科。毕竟，不管你是否愿意，绝大多数人都要学上十几年数学。可以说，学好数学是一桩幸福美好的事儿，学不好数学则是一桩痛苦莫名甚或悲惨的事儿。众所周知，一个人能否学好一门课程或学科的关键在于他或她有无兴趣，以及兴趣的多寡。这样一来，这本书的意义就不言自明了：它也许可以帮助更多人了解和喜欢数学。

至于后来发生的各种分歧，则完全出乎我的意料。这本书的出版也延宕了一年，不再属于北岛主编的“给孩子”系列书，但仍然由中信出版社出版。虽然如此，我还是要感谢北岛，是他的邀稿和催促，才有了这本书。在此期间，拙作《数学简史》（最初来自一位物理学家的建议和

敦促)由中信出版社出版,入选2017年度“中华优秀科普图书榜”,获得中信出版集团“年度经典再版图书奖”,我本人也荣膺“年度作者”称号。《数学传奇》则于2018年年初荣获“国家科学技术进步奖”(上一次数学类图书获此奖项是在2010年,即由华罗庚、段学复、吴文俊、姜伯驹等前辈大家合作的《数学小丛书》)。

也正是在这一年多时间里,这本书的绝大部分篇目陆续得以发表,其中《人民文学》刊发了三则故事,《南方周末》整版刊发了一则故事,其他文章散见于“知识分子”、“赛先生”和“科学人”等微信公众号,以及《科学画报》、《中国数学会通讯》、《中国工业与应用数学会通讯》和《数学文化》等杂志,在此一并向包括中信出版社在内的诸位编辑致意。与此同时,我真诚地希望数龄(学习数学的年份)不同的读者会有不同的收获,期待你们的批评指正!

蔡天新,杭州彩云居

2017年春节—2018年春节

|     |       |
|-----|-------|
| 序 言 | … III |
|-----|-------|

## 甲辑 数学的故事 … 001

|                |      |
|----------------|------|
| 从大禹治水到丢勒画《忧郁》  | …003 |
| 马可·波罗和阿拉伯数字的旅行 | …014 |
| 公鸡、母鸡、雏鸡与兔子    | …025 |
| 黄金分割与五角星的故事    | …035 |
| 自行车的发明与黎曼几何学   | …045 |
| 玄妙的统计：从诸葛亮借箭说起 | …056 |
| 恩尼格玛，从戚继光到图灵   | …066 |

## 乙辑 数学家的故事 … 077

|            |      |
|------------|------|
| 第一个留名的泰勒斯  | …079 |
| 畴人之家出身的祖冲之 | …086 |
| 会造桥和打仗的秦九韶 | …096 |

|               |      |
|---------------|------|
| 拿破仑与他的数学家师友   | …107 |
| 皇帝、女皇与数学大咖    | …119 |
| 婚礼，从婆什迦罗到拉曼纽扬 | …127 |
| 冯·诺依曼的午餐和家教   | …139 |
| 战俘营、棉花店与讲座教授  | …150 |

## 丙辑 有趣的数学问题 … 161

|            |      |
|------------|------|
| 阴阳完美数的故事   | …163 |
| 埃及分数与狄多女王  | …176 |
| 回文数与角谷猜想   | …185 |
| 布丰的实验与蒙特卡罗 | …194 |
| 堆球问题与开普勒猜想 | …203 |

## 后 记 … 213



# 甲 辑

数学的故事





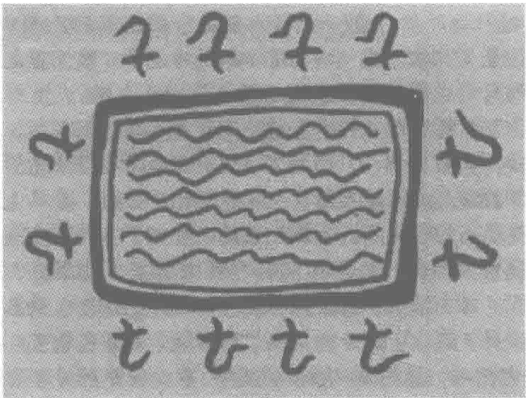
## 从大禹治水到丢勒画《忧郁》

数起源于远古时代黄河出现的“河图”和洛水出现的“洛书”。

——〔明〕程大位

# 大洪水的传说

“大禹治水”是古代汉民族的神话故事，起源于著名的上古大洪水传说。大洪水是世界各地许多民族的共同传说，在四大文明古国（古埃及、古巴比伦、古代中国、古印度）及希腊、玛雅等民族的神话故事里，都有大洪水甚至洪水灭世的传说，只是原因和过程不尽相同。



埃及《死亡书》中有关大陆沉没的图形

依照中国古代传说，大洪水的原因是水神共工和火神祝融相争，水神一怒之下，撞折了支撑天的大柱子不周山，使得天崩地陷、洪水滔天，这个故事也是神话“女娲补天”的前传。希伯来文和希腊文《圣经》则是这样描写的：“上帝见人在地上罪恶极大，于是宣布将使用洪水，毁灭天下地上有血肉气息的活物，无一不死！”

与此同时，上帝也命挪亚建造了一个巨型方舟，将世上每一种生

物都至少留一对。这艘船长 130 米、宽 22 米、高 13 米，分上、中、下三层。当洪水来袭，天降暴雨，水位不断上涨，把地上的一切生灵都毁灭了，唯有挪亚方舟里的生命幸免于难。洪水退去以后，挪亚一家得以生还，成为中东地区各个民族的祖先。



挪亚方舟。美国民间绘画

有人对世界各地 200 多种大洪水传说做了研究，发现九成以上都提到全球性的洪水泛滥，七成以上都提到了船只庇护，五成以上都提到人们最终在高山上得以幸存。“无风不起浪”，那么历史上究竟有没有发生过大洪水呢？科学家们并没有否定大洪水发生的可能性，只是谁也无法确定它于何时何地发生。

目前，地质学领域有两种较为流行的理论。一是黑海洪灾。大约 7 000 年前，黑海还是淡水湖，四周农田围绕，后来，冰川融化造成中东地区洪水泛滥，黑海也变成了咸水湖。二是彗星撞击地球。大约 5 000 年前，一颗大直径的彗星撞击了非洲马达加斯加岛海岸，卷起

100 多米高的海啸，一路向北，引发了大洪水。

不过，也有一种截然相反的意见，认为 12 000 年前第四纪冰期结束时，气候转暖、冰河融化，导致海平面上升，淹没了许多海岸和陆地。故而世界性的大洪水确实发生过，但并未达到淹没一切的程度。当时海边的人们损失巨大，被迫向内陆迁徙，并带去了可怕的洪水故事，于是便有了大洪水的传说。那些淹没在海底的文明遗迹和海水浸没过的痕迹成为此说法的有力论据。

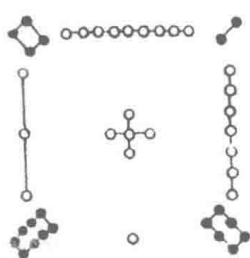
## 大禹治水和洛书

在中国神话里，大禹是黄帝的玄孙。大洪水导致黄河泛滥，禹和父亲鲧先后受命于尧、舜二帝，负责治水。鲧采用“堵”的办法，结果失败了。禹新婚不久便离家远行，他汲取父亲失败的教训，对洪水进行疏导。相传大禹为了治水，“三过家门而不入”，哪怕其中一次听到新生儿子的啼哭声。

经过 13 年的努力，大禹终于完成治水伟业，从此百姓安居乐业。舜禅位于禹，后来禹的儿子启建立了中国第一个王朝——夏。在大禹治水期间，他的妻子女娇因为思念丈夫，曾作过一首情诗《候人兮猗》，这里“兮”字是语气助词，相当于“啊”或“呀”，后来频频出现在《诗经》和《楚辞》中，女娇也成为中国历史上第一位留名的女诗人。在安徽怀远的涂山有一块望夫石，相传为女娇所化。

西汉前期民间流传着一则故事。大禹治水时，洛阳东北孟津县的黄河中跃出一匹神马，马背上驮着一幅图，人称“河图”；又从洛阳西南洛宁县的洛河中浮出一只神龟，龟背上有一张象征吉祥的图案，人称“洛书”。

洛书上有三行三列的纵横图，分别写着 1~9 这 9 个数字，每行、列及两条对角线上的三个数相加的结果相同，均为 15。



洛书里的幻方

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

洛书里的纵横图

之所以各行列元素之和为 15，原因在于 1~9 这 9 个数字加起来是 45，再除以 3 是 15。有专家分析，这可能也是我国古代将一年划分为 24 个节气，每个节气 15 天的依据。

玩纵横图这种游戏时，我们可以用笔在纸上书写，也可以用扑克牌来协助拼图。今天的“图书”一词，或许也与“河图”和“洛书”有关。纵横图也被称为九宫图或魔方，它既是科学的结晶，又是吉祥的象征。就连我们使用的智能手机里的汉语拼音键盘，也采用了九宫格的图案。

公元前 1 世纪，汉宣帝时期的博士戴德的政治礼仪著作《大戴礼·明堂篇》里就有“二、九、四、七、五、三、六、一、八”的九宫数记载。之前，无论《尚书》、《论语》，还是《管子》，都提到了河图和洛书。奇书《周易》被认为起源于伏羲八卦，后者又来自河图和洛书。

可是，自宋朝以来，关于河图和洛书是否真的存在这个问题又有了争议。例如，“唐宋古文八大家”之一的欧阳修认为，河图绝非在《周易》之前；到了元代，还有学者认为，河图和洛书来自《周易》；

而有的现代历史学家甚至持彻底否定说，不承认洛书的存在。

直到 1977 年，在安徽阜阳出土的一座西汉古墓里，发现了一只太乙九宫占盘。盘中数字五居中，一对九、二对八、三对七、四对六，与洛书完全相符，这才结束了持续 900 年的河图、洛书真伪之争。自那以后，洛书也被全世界公认为数学分支之一——组合数学的起源。

如同明代数学家程大位在《算法统宗》一书中所写的，“数起源于远古时代黄河出现的河图和洛水出现的洛书，伏羲依靠河图画出八卦，大禹按照洛书划分九州，圣人们根据它们演绎出各种治国安邦的良策”。他还指出，大禹受洛书中数的相互制约和均衡统一的启发，建立起国家的法律体系，使得天下一统，归于大治。

## 东方的魔方玩家

数学史上，绝大多数问题都是从一个或几个简单的例子开始的。从九宫数出发，人们定义了幻方，英文称之为 magic square。这是一种将不同数字安排在正方形格子中，使每行、每列和两条对角线上的数字之和都相等的方法。正方形的行（列）数被称为幻方的阶，容易推得，二阶幻方不存在，幻方至少需要三阶。

任何一个幻方经过旋转或反射仍是幻方，共有 8 种等价形式，可归为同一类。不难验证，三阶幻方或纵横图只有一类。出乎我们意料的是，有人计算出四阶和五阶幻方分别有 880 类和 275 305 224 类，六阶幻方约有  $1.8 \times 10^{19}$  类，这是一个天文数字。

因为每个  $n$  阶幻方的元素之和为从 1 加到  $n^2$ ，故而其和为  $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ 。用  $n$  除之，即得各行、列以及对角线的数之和为  $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 。