高等财经院校“十三五”精品系列教材

互 学基础

总 光

概率论与数理统计

（第二版）

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

主　编　刘贵基　张　慧

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

“十三五”精品系列教材

互联网+经管学科数学基础

总主编　陈晓兰　安起光

概率论与数理统计
（第二版）

主　编　刘贵基　张　慧

副主编　王晓杰　韩建新　郭洪峰

中国财经出版传媒集团

经济科学出版社

Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/刘贵基，张慧主编．—2版．
—北京：经济科学出版社，2018.1
高等财经院校“十三五”精品系列教材
ISBN 978－7－5141－9005－2

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①刘…②张…　Ⅲ．①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第014721号

责任编辑：于海汛
责任校对：杨　海
责任印制：李　鹏

概率论与数理统计
（第二版）
主　编　刘贵基　张　慧
副主编　王晓杰　韩建新　郭洪峰
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京季蜂印刷有限公司印装
710×1000　16开　21印张　380000字
2018年1月第1版　2018年1月第1次印刷
印数：0001—6000册
ISBN 978－7－5141－9005－2　定价：44.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010－88191510）

总　序

大学是研究和传授科学的殿堂，是教育新人成长的世界，是个体之间富有生命的交往，是学术勃发的世界。* 大学的本质在于把一群优秀的年轻人聚集一起，让他们的创新得以实现、才智得以施展、心灵得以涤荡，产生使他们终身受益的智慧。

大学要以人才培养和科学研究为己任，大学教育的意义在于它能够给人们一种精神资源，这一资源可以帮助学子们应对各种挑战，并发展和完善学子们的人格与才智，使他们经过大学的熏陶，学会思考、学会反省、学会做人。一所大学要培养出具有健全人格、自我发展能力、国际视野和竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，不可能有高质量的人才培养，不可能产生一流或特色鲜明的大学。大学教材应该是对学生学习的引领、探索的导向、心智的启迪。一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。

目前，中国的大学教育已从“精英型教育”走向“平民化教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提升？教材建设的功能愈显重要。

为了全面提高教育教学质量，培养社会需要的、具有人文精神和科学素养的本科人才，山东财经大学启动了“十二五”精品教材建设工程。本工程以重点学科（专业）为基础，以精品课程教材建设为目标，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十二五”精品系列教材。

---

* 雅斯贝尔斯著，邹进译：《什么是教育》，生活 · 读书 · 新知三联书店 1991 年版，第 150 页。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。本系列教材从选题、立项，到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关口，突出财经特色，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务，两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材汇集各领域最新教学与科研成果，对其进行提炼、吸收，体现了教学、科研相结合，有助于培养具有创新精神的大学生。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，本系列教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示当今社会发展的新理论、新方法、新成果。

本系列教材是山东财经大学教学质量与教学改革建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授、专家多年教学的经验和心血，是大家共同合作的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

山东财经大学教材建设委员会
2012 年 6 月

前 言

概率论与数理统计是高等学校经济管理类各本科专业的学科基础课，其理论和方法的应用遍及所有科学技术领域、工农业生产、医药卫生以及国民经济的各个部门。正如科学巨匠拉普拉斯所说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数实质上只是概率问题。”通过本课程的学习，使学生初步掌握处理随机现象的基本思想和方法，培养学生运用概率论的知识分析和解决实际问题的能力，培养学生以“统计思想”去思考和用“统计方法”去处理学习和工作中遇到的随机数据，从而能做出正确的统计推断；同时，为学生在以后专业课的学习中提供必要的数学基础。

本教材是根据教育部颁布的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲、教学改革的需要以及教学实际情况编写而成的，在教材体系、内容和例题的选择等方面汲取了国内外优秀教材的优点，也汇集了作者多年的教学经验。

本教材具有以下特点：

1. 教材结构体系严谨，过渡自然。从解决问题的角度出发组织书本结构体系，以提出问题、讨论问题和解决问题的方式来展开教材，教学内容环环相扣、循序渐进、由浅入深，注重了基本概念、基本理论和基本方法的需求和产生过程的阐释，努力使读者收获的不只是知识，还有解决科学问题的过程和方法。

2. 教材内容的深度和广度适宜。选取内容既注意了适应目前的教学实际和本课程的基本要求，又兼顾报考硕士研究生的读者需求，例题、习题的配置注意层次，以满足不同读者的要求。

3. 教材行文简洁流畅，叙述通俗易懂，解析详细，既

适合讲授，又便于读者自学。概念和思想方法注意是从一些简单例子引出，基本理论尽量由概括归纳得到，同时对部分定理，仅给出结论而仍略去推证过程，这样做既保证了知识的完整性，又不失严密的逻辑性。

4. 教材例题、习题丰富。配合内容的展开，书中既介绍引用了概率统计发展史中的经典范例，又引入与实际生活息息相关的实例，以便增强学生的学习兴趣，有利于概率统计思维的训练；习题按节配置，章后配置复习题，遴选的习题注重应用和解决问题能力训练，有很多习题饶有趣味，来自现实社会和经济管理领域的方方面面，这些习题本身就给读者提供了解决实际问题的方法，有助于提高读者对实际问题的分析推断能力。

5. 教材适量融入了数学史与数学文化的教育。介绍了有关概念和理论的发展历史及有关名家的学术成就，以激发读者去思考、去发现、去创新。

6. 教材纸质内容与数字化资源一体化设计，紧密配合。数字资源包括针对课程的难点和重点的微视频，延伸拓展视野的名家生平简介等，读者在有互联网的前提下的任何时间和任何地点都可以通过扫描二维码在电脑或者智能手机上来观看微视频，目的是在提升教学效果的同时，为读者提供思维和探索的空间，增强读者对教材的体验感和参与感。

本教材按概率论、数理统计的顺序分 9 章叙述。第 1 章至第 5 章为概率论；第 6 章至第 9 章为数理统计。本书适合作为高等院校经济管理类各专业该课程的教材或参考书，讲授全书共需 68 课时，还可根据专业需要和不同的教学要求删减部分内容，供 51 课时讲授使用。

本套互联网 + 经管学科数学基础，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，是省级精品课程优化升级建设的成果之一，由山东财经大学陈晓兰、安起光任总主编。本教材由刘贵基、张慧任主编，参加编写的人员还有王晓杰、韩建新、郭洪峰、周玉珠、宋浩、黄秋灵、郭磊、谭香、姜计荣、林英等。在编写过程中，参考和借鉴了国内外有关资料，得到了同行专家的帮助和经济科学出版社的大力支持，在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平，书中难免有错误及不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2017 年 10 月

目 录

第一章 随机事件及其概率

在自然界和社会生活中有许多现象是具有必然性的，例如“每天早晨，太阳从东方升起”，“向空中掷一块石头，石头会落地”这些都是必然会发生的．“没有水分，种子会发芽”，“没有电源，电灯会亮”等，则是必然不会发生的现象．在一定条件下必然发生或必然不发生的现象叫**确定性现象**或**必然现象**．对于必然现象的研究，大都使用代数、微积分、微分方程等工具．

在自然界和社会生活中还大量存在着这样的现象，它们在一定条件下可能发生，也可能不发生，这种现象叫**随机现象**，或称为**偶然现象**．例如，在抽样检查工业产品时，随意抽取一个产品，“抽到次品”就是一个随机现象，它可能发生，也可能不发生．又如，某学生凭猜测答一道四选一的选择题，“猜对”是一随机现象，因为可能猜对，也可能猜不对．

对于随机现象，一方面呈现不确定性；另一方面人们经过长期的反复实践并深入研究之后发现，它们又具有某种规律性．例如，掷一枚硬币出现正面或出现反面是不确定的，但当投掷次数很多时，就会发现出现正面和出现反面的次数几乎相等．历史上有位数学家曾掷硬币 12000 次和 24000 次，结果是出现正面的次数分别为 6019 次和 12012 次；个别孕妇生男孩或女孩是不确定的，但根据各个国家各个时期人口的统计资料，新生婴儿中男孩和女孩的比例总是约为 1.08∶1；对一目标进行射击，弹着点是不确定的，但当射击次数非常多时就可发现，弹着点的分布呈现一定的规律性：弹着点关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹着点越密，越远离目标的弹着点越稀．这种在大量重复观察或实验中呈现出的固有规律性，称为随机现象的**统计规律性**．

由于随机现象是大量的、随处存在的，而且对人类的生产和生活影响巨大，特别是地震、龙卷风、海啸这些灾害性天气给人类带来的往往是毁灭性打击．买彩票、股票和期货虽不如灾害性天气影响那么

概率论的起源与发展

大，却也可能会使一个人一夜暴富，也许会造成轻生、犯罪和人格扭曲．所以，人们几百年来对随机现象给予了特别的关注，要研究它的规律性，既要利用这种规律性为人类造福，也要防止它对人类的伤害．概率论①与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，一方面对随机现象发生的可能性大小做出定量的描述；另一方面根据观察得到数据，对研究对象做出种种合理的估计和判断．概率论与数理统计的应用几乎遍及所有科学领域、工农业生产及国民经济各部门．

本章将主要介绍随机事件、随机事件的概率、概率的基本性质、条件概率及计算概率常用到的几个重要公式．

§1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

1. 随机试验

对随机现象的研究总是要进行大量的观察、测量、调查或做各种科学实验，为了叙述方便，我们把它们统称为试验，具有下述三个特征的试验，称为**随机试验**（random experiment）．

（i）试验可在相同条件下重复进行；

（ii）试验的所有可能结果不止一个，但在试验之前可以明确所有可能的结果；

（iii）每次试验之前不能确切预言该次试验出现哪个结果．

例如，观察掷一枚骰子出现的点数，检查从 100 件产品中任取 10 件产品其中次品个数，观察向靶射击时弹着点的位置，记录某电话交换台在一小时内接到的呼叫次数等，都是随机试验．随机试验简称为**试验**，用字母 E 表示．以后，本课程所说的试验都是指随机试验．

① 概率论的起源与赌博问题有关．16 世纪，意大利的学者吉罗拉莫·卡尔达诺（Girolamo Cardano，1501－1576）开始研究掷骰子等赌博中的一些简单问题．17 世纪中叶，有人对博弈中的一些问题发生争论，其中的一个问题是“赌金分配问题”，法国数学家帕斯卡（Pascal）和费马（Fermat）基于排列组合方法，研究了这些较复杂的赌博问题．荷兰数学家惠更斯（Huygens，1629－1695）也参加了他们的讨论，企图自己解决这一问题，并把讨论结果写成了《论机会游戏的计算》（1657 年）一书，这就是最早的概率论著作．

2. 随机事件

为了研究随机试验的某个结果的出现规律，首先要弄清试验的所有可能出现的结果，我们把随机试验的每一种结果称为**事件**.

在试验中可能发生也可能不发生的结果，称为**随机事件**. 随机事件通常用字母 A、B、C 等表示. 例如，在观察掷一枚硬币正反面出现情况的试验中，用 A 表示正面朝上，B 表示反面朝上，它们分别记为 $A=\{$正面朝上$\}$，$B=\{$反面朝上$\}$，则 A、B 都是随机事件. 又如，在观察掷一枚骰子出现点数的试验中，“点数为 1”、“点数小于 4”、“点数为偶数” 都是随机事件.

在每次试验中一定发生的结果，称为**必然事件**，必然事件通常用 Ω 表示. 在每次试验中一定不发生的结果，称为**不可能事件**，不可能事件通常用 Φ 表示. 例如，观察掷一枚骰子出现点数的试验中，“点数小于 7” 是必然事件，“点数不小于 7” 是不可能事件.

需要指出的是，必然事件、不可能事件都是确定性的，但为了讨论问题的方便，我们也将它们作为随机事件的两个极端情况来处理.

在概率论中，我们把相对于试验目的不可再分的试验结果，称为**基本事件**；否则，称为**复合事件**. 例如，在观察掷一枚骰子出现点数的试验中，“点数为 1”、“点数为 2”、……、“点数为 6” 都是基本事件，而 “点数为奇数”、“点数为偶数”、“点数小于 5” 都是复合事件. 显然，基本事件是随机事件，在一次试验中，能发生且只能发生基本事件中的一个；复合事件是由基本事件组成的，复合事件发生是指当且仅当组成它的基本事件中的一个发生.

1.1.2 样本空间与事件的集合表示

1. 样本空间

试验的基本事件扮演着十分重要的角色，我们把试验 E 的所有基本事件构成的集合称为 E 的**样本空间** (sample space)，用 Ω 表示. 样本空间中的元素，称为**样本点**，记作 ω. 以后，我们对基本事件和样本点不加区别，这并不会引起混淆.

例 1 试验 E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数，用 ω_i 表示 “出现点数为 i” ($i=1, 2, \cdots, 6$)，则 E_1 的样本空间为

$$\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

例 2 试验 E_2：将一枚骰子掷两次，观察出现的点数. (i, j) 表示 “第一次掷出点数为 i，第二次掷出点数为 j”，则 E_2 的样本空间为

$$\Omega_2=\{(i, j) \mid i, j=1, 2, \cdots, 6\}.$$

例 3 试验 E_3：记录某电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数．用 k 表示"单位时间内接到 k 次呼叫"，则 E_3 的样本空间为

$$\Omega_3=\{k \mid k=0,1,2,\cdots\}.$$

例 4 试验 E_4：记录某地区一昼夜的最低温度 x 和最高温度 y，则 E_4 的样本空间为：

$$\Omega_4=\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant y \leqslant b\},$$

其中 a，b 分别为该地区的最低、最高气温．

例 5 试验 E_5：向一目标射击，记录弹着点偏离目标中心的距离（米）．设 r 表示距离，则 E_5 的样本空间为

$$\Omega_5=\{r \mid r \geqslant 0\}.$$

若向一目标射击，观察命中目标与否．用 ω_1 表示"命中目标"，ω_2 表示"未命中目标"，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}.$$

样本空间是概率论中一个基本概念，样本空间的结构随着试验的要求不同而有所不同，正确地确定不同试验的样本空间是极为重要的．

2. 事件的集合表示

对于事件 A，我们首先感兴趣的是它发生还是不发生．如果当且仅当样本点 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_k 有一个出现时，事件 A 就发生，则称 A 是由样本点 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_k 构成的事件，并称 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_k 是 A 的**有利样本点**（或 **A 包含的样本点**），记作 $\omega_i \in A$，$i=1,2,\cdots,k$．很自然地，我们可以用事件 A 的有利样本点的全体来表示事件 A，即

$$A=\{\omega \mid \omega \text{ 为 } A \text{ 的有利样本点}\},$$

这样，事件便是样本空间的子集了．

现在，从集合论的观点对事件做如下说明：事件是样本点的集合，即样本空间的某个子集．所谓事件 A 发生，是指当且仅当 A 所包含的某个样本点在试验中出现．基本事件是只包含一个样本点的单元素集合；必然事件是全体样本点组成的集合，即试验的样本空间 Ω；不可能事件是不包含任何样本点的集合，即空集 Φ．

例 6 在例 2 中，令 A 表示"两次掷骰子点数之和等于 5 点"，B 表示"两次掷骰子点数之和小于 20"，C 表示"两次掷骰子点数之差等于 6"．若用集合来表示事件，则

$$\begin{aligned} A &=\{(i,j) \mid i+j=5,\ i,j=1,2,\cdots,6\} \\ &=\{(2,3),(3,2),(4,1),(1,4)\}, \\ B &=\Omega_2,\ C=\Phi. \end{aligned}$$

例 7 在例 5 中，令 A 表示"弹着点偏离目标中心不超过 10 米"，则 A 是 Ω_5 的如下子集：

$$A=\{r \mid 0 \leqslant r \leqslant 10\}.$$

同样，集合 $B=\{r \mid 5 \leqslant r \leqslant 10\}$ 表示事件："弹着点偏离目标中心的距离在 5～10 米之间".

1.1.3 事件间的关系与运算

在同一个试验中的几个事件之间往往是相互联系的，研究事件间的关系不仅可以帮助人们更深入地认识事件，而且还可以简化一些复杂事件. 下面定义事件间的主要关系及运算.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，或称**事件 A 包含于事件 B**，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 显然，这时构成 A 的样本点均为 B 中的样本点.

由定义易得，对于任何事件 A，有 $\Phi \subset A \subset \Omega$.

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

2. 事件的并（和）

"事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件，称为事件 A 与 B 的**并（和）**，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$. 更确切地说，事件 A 与 B 的并是这样一个事件，它的发生意味着 A 发生或 B 发生. 但习惯上用上述简便说法，对事件的其他运算情况也是类似的. 显然，事件 $A \cup B$ 是由事件 A 和 B 中所有样本点构成的.

例如，在观察掷一枚骰子出现点数的试验中，用 A 表示"奇数点"，B 表示"点数小于4"，则 $A \cup B=\{1, 2, 3, 5\}$.

显然，对任何事件 A，B，有

$$A+B \supset A, \quad A+A=A, \quad A+\Omega=\Omega.$$

类似地，"事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生"这一事件，称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的并（和），记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 同样，无限可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的并（和）记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示这可列事件至少有一个发生所构成的事件.

3. 事件的交（积）

"事件 A 与 B 同时发生"这一事件，称为事件 A 与 B 的**交（积）**，记作 $A \cap B$ 或 AB. 显然，事件 AB 是由事件 A 与 B 中公共样本点构成的.