高等教育数学课程改革创新系列教材

线性代数

◎ 主编　韩兆君　刘　婧　徐玉国
◎ 副主编　孔德斌　李　奎

中国工信出版集团　電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

呈改革创新系列教材

线性代数

主　编　韩兆君　刘　婧　徐玉国
副主编　孔德斌　李　奎

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书适用于普通本科院校“线性代数”课程，简明介绍了线性代数最基本的理论与方法，内容包含行列式，矩阵，矩阵的初等变换与线性方程组，*n* 维向量与线性方程组，特征值与特征向量、矩阵的对角化和二次型共 6 章。

本书编写的立足点是基础与应用并重，注重数学的思想和方法，适合高素质应用型人才的培养目标。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 韩兆君，刘婧，徐玉国主编. —北京：电子工业出版社，2018.1
ISBN 978-7-121-33063-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①韩… ②刘… ③徐… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 285113 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：朱怀永
文字编辑：李 静
印 刷：三河市双峰印刷装订有限公司
装 订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：787×1 092 1/16 印张：11.5 字数：239.2 千字
版 次：2018 年 1 月第 1 版
印 次：2018 年 1 月第 1 次印刷
定 价：33.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：zhy@phei.com.cn。

前　　言

线性代数是讨论有限维空间的线性理论的一门科学，为处理线性问题提供了有力的工具。在当今科学技术飞速发展，特别是计算机科学和信息技术的应用日新月异、科学管理理念日益加强的时代，作为描述和研究实际问题的有力工具，线性代数的理论和方法已渗透到各个科技领域中。随着现代社会的发展和知识结构的迅速更新，线性代数的方法和思想日益为人们所重视。

我们编写本书的立足点是基础与应用并重，以提高数学素养为目标，因此在编写过程中，与教学实践密切结合，在实践中编写，编写后再实践，力求做到结构严谨、难易适度、语言简洁，适合培养目标，贴近教学实际，便于教与学。

本书简明地介绍了线性代数最基本的理论与方法，内容包含行列式，矩阵，矩阵的初等变换与线性方程组，n 维向量与线性方程组，特征值与特征向量、矩阵的对角化和二次型共 6 章。

本书是烟台南山学院数理部教师多年的教学经验总结，其中，韩兆君老师主要负责本书的编纂和审定，负责编写第 1 章至第 3 章，刘婧老师负责编写第 4 章至第 6 章，教研室其余老师协助。在本书的编写过程中，我们参考和借鉴了许多不同版本的线性代数教材，以及相关论著，得到了部分专家的悉心指导，在此一并表示感谢。由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2017.11

目　录

第 1 章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念. 随着线性代数理论的发展，行列式已广泛应用于数学、工程技术、经济学等众多领域. 本章在二阶和三阶行列式的基础上，介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法，进一步推导利用行列式求解 n 元一次线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶、三阶行列式的概念

行列式的研究源于线性方程组的求解. 本节在二元线性方程组的求解基础上，引入二阶行列式，进一步介绍三阶行列式.

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 和 b_1，b_2 均为常数，x_1，x_2 为未知数. 利用消元法求解方程组(1.1.1)，分别消去未知数 x_1 和 x_2，得同解方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

可知，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则二元线性方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.1.2}$$

为了便于记忆，我们引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

称为**二阶行列式**. 其中，数 a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ 称为行列式(1.1.3)的**元素**，元素 a_{ij} 的下标 i，j 分别称为该元素的**行标**和**列标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式中第 i 行第 j 列. 我们把以 a_{ij} 为元素的行列式简记为 $\det(a_{ij})$.

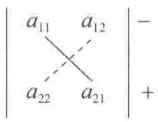

图 1.1.1

在二阶行列式中，称左上角到右下角的连线为主对角线，左下角到右上角的连线为副对角线. 由(1.1.3)可知，二阶行列式的值可以表示为主对角线上的元素乘积减去副对角线上的元素乘积，我们把该表示法称为**对角线法则**. 如图 1.1.1 所示。

利用二阶行列式的定义，式(1.1.2)中分子也可写成二阶行列式的形式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么式(1.1.2)可写成

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中，分母 $\boldsymbol{D}$ 是由方程组(1.1.1)的系数按原位置排列而成的行列式(称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**)，x_1 的分子 $\boldsymbol{D}_1$ 是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第1列元素用常数项 b_1, b_2 替换所得，x_2 的分子 $\boldsymbol{D}_2$ 是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第2列元素用常数项 b_1, b_2 替换所得.

例 1.1.1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+\ x_2=-9 \\ -2x_1+3x_2=1 \end{cases}$.

【解】 方程组的系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=6-(-2)=8\neq 0$$

因此方程组有唯一解. 又

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-27-1=-28$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2-18=-16$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{-28}{8}=-\frac{7}{2}$$

$$x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{-16}{8}=-2$$

1.1.2 三阶行列式

由九个元素 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 排成三行三列组成的**三阶行列式**，仍记为 $\boldsymbol{D}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其值定义为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

可见，三阶行列式的值表示为 6 项的代数和，其中的每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积并加上正负号；同时，在 D 中任取不同行不同列的三个数的乘积并相应地加上正负号后都是 D 中的某一项. 在第 1.3 节中我们将会看到，对于一般的 n 阶行列式，也有类似的特点.

利用**"对角线法则"**可以帮助我们记忆三阶行列式中的每一项前面的正、负号. 其中，实线相连的三项乘积加正号，虚线相连的三项乘积加负号，如图 1.1.2 所示。

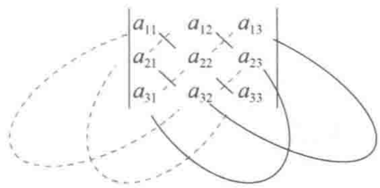

图 1.1.2

例 1.1.2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

【解】　利用对角线法则可得

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-4)\times 3+0\times 0\times(-1)+2\times 1\times 8 \\ &\quad -2\times(-4)\times(-1)-0\times 1\times 3-2\times 0\times 8 \\ &= -24+0+16-8-0-0 \\ &= -16 \end{aligned}$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

通过类似方程组 (1.1.1) 所做的消元法讨论，有以下结论：

若方程组 (1.1.4) 的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组(1.1.4)有唯一解

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\ x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\ x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}$$

其中，$\boldsymbol{D}_j\,(j=1,2,3)$ 是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 列元素用方程组(1.1.4)的右端常数项 b_1,b_2,b_3 替换所得，即

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

例 1.1.3 有三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1\\ x_1-5x_2+3x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}$$

该方程组是否有唯一解？若有，求出其唯一解.

【解】 方程组的系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

因此方程组有唯一解. 又因为行列式

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=11,\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=9,\quad \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=6$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}=-\frac{3}{4}$$

由以上讨论可知，利用二阶和三阶行列式表示二元和三元线性方程组的解，形式更简单，使用更方便.

在实际应用中，遇到的线性方程组所含有的未知量个数通常多于三个，因此，有必要考虑将上面二元和三元线性方程组的解法推广到一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的求解. 为此，需要在二阶和三阶行列式的基础上，引入 n 阶行列式的概念.

习题 1.1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a^2 & -1 \\ 3a+1 & a+3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 求解方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$.

3. 证明：当 $b\neq 0$ 时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{21}b & a_{22} & a_{23}b^{-1} \\ a_{31}b^2 & a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. 计算函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & -1 \\ -x & x & x \\ 3 & 2 & -x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

5. 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1 \\ 2x_1-2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-4x_2-2x_3=1 \end{cases}$$

1.2　*n* 阶排列及对换

为定义 n 阶行列式，首先介绍 n 阶排列及其逆序数的概念.

1.2.1　*n* 阶排列及其逆序数

定义 1.2.1　把 n 个不同的元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 按照一定的顺序排成一列，称为一个 n 阶排列(简称为**排列**).

由初中数学中排列组合的相关知识可知，n个不同的元素的排列种类数有$n!$个.

例如，由$1,2,3$这三个数可以排出$3!=6$种不同的3阶排列，分别是

$$1\ 2\ 3\ ,1\ 3\ 2\ ,2\ 1\ 3\ ,2\ 3\ 1\ ,3\ 1\ 2\ ,3\ 2\ 1$$

其中排列1，2，3，是按照从小数到大数递增的顺序排列起来的，我们称它为**自然排列**.其他的排列均出现某些大数排在小数之前的情形.

定义 1.2.2 在一个n阶排列中，任取两个数(称为一个**数对**)，若其前后位置与大小顺序相反，即大数在前、小数在后，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$的逆序数，记为$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

接下来讨论排列的逆序数的计算方法.

设$p_1,p_2,\cdots,p_n$为n个自然数的一个排列，对于元素$p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，如果排在p_i前面且比p_i大的元素有τ_i个，则称元素p_i的逆序数是τ_i. 所有元素的逆序数的总和

$$\begin{aligned}\tau(p_1\,p_2\cdots p_n)&=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n\\&=\sum_{i=1}^{n}\tau_i\end{aligned}$$

即为这个排列的逆序数.

显然排列$1\,2\cdots n$的逆序数为

$$\tau(1\,2\cdots n)=0$$

因此排列$1\,2\cdots n$是偶排列.

例 1.2.1 计算下列各排列的逆序数，并说明它们的奇偶性.

(1) 42531； (2) 24531； (3) $n\,(n-1)\cdots 2\,1$.

【解】 (1) 在排列42531中，4排在首位，逆序数为0；2的前面有一个比它大的数，逆序数为1；5的前面有0个比它大的数，逆序数为0；3的前面有两个比它大的数，逆序数为2；1的前面有四个比它大的数，逆序个数为4. 于是这个排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(42531)&=0+1+0+2+4\\&=7\end{aligned}$$

排列42531是奇排列.

(2) 同理可得

$$\begin{aligned}\tau(24531)&=0+0+0+2+4\\&=6\end{aligned}$$

排列24531是偶排列.

(3) 在排列$n\,(n-1)\cdots 2\,1$中的每一个数对都是逆序，所以

$$\begin{aligned}\tau[n\,(n-1)\cdots 2\,1]&=0+1+2+\cdots+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

因此，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，排列 $n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，排列 $n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列，其中 k 为任意自然数.

1.2.2　对换

在一个 n 阶排列中，仅交换其中某两个元素的位置，其余元素位置保持不变，这样一次交换称为一个**对换**. 相邻两个元素的对换称为**相邻对换**.

例 1.2.1 中的排列(2)是由排列(1)将元素 4 和 2 做一次对换得到的，且排列(1)是奇排列，排列(2)是偶排列，可见对排列做一次对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.2.1　做一次对换，改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变为偶排列；偶排列变为奇排列.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

对换 a 与 b，变为

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

显然，$i_1 i_2 \cdots i_s$；$j_1 j_2 \cdots j_t$ 这些数在对换前后位置保持不变，因此这些数之间，以及这些数与 a，b 之间是否构成逆序保持不变. 要判定两个排列的逆序数的改变，只要考虑数 a,b 的逆序数的改变即可. 不妨记

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t)=\tau$$

若 $a<b$，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变，即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t)=\tau+1$$

若 $a>b$，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1，即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t)=\tau-1$$

由此可见，无论哪种情况，排列 $i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$ 和 $i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$ 的逆序数总相差 1，所以这两个排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, k_1 k_2 \cdots k_r\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

把它做 r 次相邻对换，变成

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, b\, k_1 k_2 \cdots k_r\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

再做 $r+1$ 次相邻对换，变成

$$i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, k_1 k_2 \cdots k_r\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$$

总之，排列 $i_1 i_2 \cdots i_s\, a\, k_1 k_2 \cdots k_r\, b\, j_1 j_2 \cdots j_t$ 变成排列 $i_1 i_2 \cdots i_s\, b\, k_1 k_2 \cdots k_r\, a\, j_1 j_2 \cdots j_t$，经过 $2r+1$ 次相邻对换，所以这两个排列的奇偶性不同.

由定理 1.2.1 可得以下结论.

推论 1.2.1 所有的n阶排列中，奇排列与偶排列各占一半，均为$\frac{n!}{2}$.

证 n阶排列共有$n!$个. 不妨设有p个奇排列，q个偶排列，则有$p+q=n!$.

由于一次对换改变排列的奇偶性，我们将p个奇排列的任意两个数进行一次对换，所得到p个排列都是偶排列. 因此偶排列至少有p个，故$p\leqslant q$；同理可得$q\leqslant p$. 所以$p=q$. 因此$p=q=\frac{n!}{2}$. 即奇排列与偶排列各占一半，均为$\frac{n!}{2}$.

推论 1.2.2 任一n阶排列均可通过有限次对换变为自然排列，并且所做对换次数的奇偶性与排列的奇偶性相同. 即奇排列做奇数次对换变成自然排列，偶排列做偶数次对换变成自然排列.

证 由定理 1.2.1 知，做一次对换，排列的奇偶性改变一次，因此，对排列所做对换的次数就是排列奇偶性变化的次数，而自然排列是偶排列(逆序数是 0)，由此得知推论 1.2.2 成立.

习题 1.2

1. 计算下列各排列的逆序数，并说明它们的奇偶性.

(1) 54321；　(2) 14325；　(3) 1726354；

(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；　(5) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

2. 设n阶排列$p_1\,p_2\cdots p_n$的逆序数为τ，求排列$p_n\,p_{n-1}\cdots p_1$的逆序数.

3. 选择i与k $(1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant k\leqslant 8)$，使下列排列为偶排列.

(1) $1i256k47$；　(2) $21i54k78$.

1.3 *n* 阶行列式的概念

n阶行列式在二阶、三阶行列式的定义基础上递推得到. 这里，我们以三阶行列式为例，结合排列及逆序的概念，对三阶行列式的结构进行研究.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出：

(1) 等号右边的每一项恰好都是三个元素的乘积，且当这三个元素的行标按自然顺序1 2 3 排列时，列标分别是

$$123\,,\,231\,,\,312\,,\,321\,,\,213\,,\,132$$

123 三个数的排列共 6 种，对应等号右端共 6 项. 且每一项的三个元素在行列式中位于不同的行、不同的列，这样每一项除正负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.

(2) 列标排列为 123，231，312 的三项，对应项的符号为“+”，列标排列为偶排列；列标排列为 321，213，132 的三项，对应项的符号为“−”，列标排列为奇排列. 因此，每一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 所带的正负号可以表示为列标排列的逆序数 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

一般的，n 阶行列式定义如下.

定义 1.3.1　设由 n^2 个元素排成 n 行 n 列构成 $\boldsymbol{n}$ **阶行列式**，表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $12\cdots n$ 的一个排列. 每一项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 都按下列规则带有正负号：当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，带有正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，带有负号. 这样 n 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

通常用 $\boldsymbol{D}$ 表示 n 阶行列式，简记为 $\det(a_{ij})$，在不引起混淆的情况下，n 阶行列式也可记为 $\boldsymbol{D} = \left|a_{ij}\right|_n$. 特别地，一阶行列式只有 1 个元素，即 $|a_{11}| = a_{11}$，要与绝对值记号区别开.

例 1.3.1　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$