国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

■ 精品课程配套教材
■ 校企合作优秀教材
■ 21世纪应用型人才培养“十三五”规划教材

YUNCHOUXUE

运筹学

主审　习长新
主编　黄　健　刘国栋

湖南师范大学出版社

■ 精品课程配套教材
■ 校企合作优秀教材
■ 21世纪应用型人才培养“十三五”规划教材

YUNCHOUXUE

运筹学

主　审　习长新
主　编　黄　健　刘国栋
副主编　盛集明　濮雪莲　杨　俊
　　　　姜　荣　包耀东　林小芳
　　　　相广萍

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学／黄健，刘国栋主编. -- 长沙：湖南师范大学出版社，2018. 1
ISBN 978-7-5648-2230-9

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①黄… ②刘… Ⅲ. ①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 189168 号

运筹学
主编：黄健 刘国栋

◇全程策划：凌永淦
◇组稿编辑：杨君群
◇责任编辑：仇红方 柳 丰
◇责任校对：何远翠
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731-88872751 传真/0731-88872636
◇经 销：全国新华书店 北京志远思博文化有限公司
◇印 刷：三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司

◇开 本：787mm×1092mm 1/16
◇印 张：13. 25
◇字 数：296 千字
◇印 次：2018 年 1 月第 2 次印刷
◇书 号：ISBN 978-7-5648-2230-9
◇定 价：32. 00 元

精品课程配套教材
“双创”型人才培养优秀教材 编审委员会

前　言

运筹学自上世纪上半叶诞生以来，尤其是二战结束以后，在前西方主要发达国家，尤其是美国，得到了空前的发展，学科理论不断完善，应用范围不断扩大。目前，运筹学已经成为国内高校管理类专业最重要的核心课程，也是很多理工类专业的重要专业基础课程之一。本书的编者在多年教学实践的基础上，结合学科发展，参考国内主要的运筹学权威教材，通力合作完成。本书以满足学生运筹学入门级学习目的为主要宗旨，强调理论学习的同时，更突出理论和方法的运用，力争为决策者在安排资源，优化产出等管理活动过程中，提供一种切实可行的科学决策工具，提高决策效率和科学性。

本书由黄健、刘国栋担任主编。参加本书编写的工作人员、完成的章节内容如下：濮雪莲撰写第 1 章、第 2 章；杨俊撰写第 3 章、附录；姜荣撰写第 4 章；刘国栋、相广萍撰写第 5 章；包耀东撰写第 6 章；林小芳撰写第 8 章；黄健撰写第 7 章；盛集明撰写第 9 章。

本书特别邀请南通大学商学院卢兵书记、王卫平副院长，荆楚理工学院习长新担任本书主审，本书统一全书文字，并对本书若干章节内容进行了修正和补充，并提供了很多有意义的建设性的意见。

在此还得感谢南通大学、南通理工学院、临沂大学对我们工作的理解和支持；感谢老一辈学者为我们所奠定的学科基础，也感谢您们的各类专著和相关材料为我们提供的素材；感谢所有曾经修读过这门课程的学生，我们在与学生多年的教学相长中获得了有益的反馈，并从你们身上感受到敏锐和睿智。同时，也向所有直接或间接被我们引用的各类文献资料的作者，致以由衷的谢意和敬意。限于我们学识水平，教材有需进一步的修改和补充的地方，敬请前辈、同行和广大读者批评指正。

编者

2018 年 1 月

课堂笔记

第 1 章　运筹学概述

“运筹帷幄之中，决胜千里之外。”如何对事情作出通盘考虑，以便作出达到最好预期效果的决策，这是“运筹”二字的本意。运筹学作为一门应用科学，它所关注的内容即为如何对各种类型的问题统筹安排，得出最好或者尽可能满意的解决方案。

1.1　运筹学的发展历史

运筹学作为一门独立学科起源于第二次世界大战时期。当时英国为了抗击德国的水陆轰炸，迫切需要解决一些军事作战的优化问题，于是在全国范围内召集了 11 名优秀的科学家（包括数学家、物理学家、生物学家和测量学家），组成了世界上第一个运筹学研究小组（1940 年），随后美国也成立了 17 人组成的军事运筹研究小组（1942 年），他们应用系统论的观点和统筹规划的方法研究军事作战问题，在战争中发挥了重要的作用。据有关资料统计，整个二战期间反法西斯同盟国参与军事运筹的研究人员达到 700 人。这些不同领域的科学家的协同研究，成功地解决了许多重要的作战优化问题。例如，如何布置雷达以取得最佳监测效果，航船在受到攻击时如何快速转向，深水炸弹如何布设才能既隐蔽又能达到最佳杀伤力等。

二战结束以后，运筹学的研究与应用从军事大规模转向工农业生产，经济管理等民用领域。20 世纪 50 年代以后，随着研究的深入，逐渐形成了一套比较完备的理论和方法，使得运筹学作为一门独立学科逐渐形成并迅速发展，这期间电子计算机的出现和发展对运筹学的发展也产生了深远的影响。1953 年第一次国际运筹学会议在英国伦敦召开，这被认为是运筹学学科正式建立的一个重要标志。

我国古代有很多有关运筹学的思想方法的典故。譬如，田忌赛马、丁渭修宫和沈括运粮的故事就充分说明了我国不仅很早就有了朴素的运筹思想，而且已在生产实践中实际运用了运筹方法。20 世纪 50 年代中期，钱学森、许国志等科学家将运筹学引入中国，并在国内推广应用，于 1956 年成立了我国第一个运筹学小组。20 世纪 60 年代至 70 年代，数学家华罗庚领导一批运筹学工作者，在全国广

课堂笔记

大的工厂、农村推广统筹法和优选法，使得运筹学在中国得到一定程度的普及，同时也取得了一批可喜的成果。他们在理论研究和实践应用两个方面的杰出工作，是运筹学源于实践归于实践的生动注释，为广大科技工作者树立了典范。

1.2 运筹学的分支

运筹学按需要解决的问题的差别，归结为一些不同类型的数学模型。这些数学模型构成了运筹学的各个分支。本书将涉及如下分支：

(1) 线性规划。线性规划是一种解决在线性约束条件下追求最大或最小的线性目标函数的方法。

(2) 整数线性规划。整数线性规划是一种特殊的线性规划问题。他要求某些决策变量的解为整数。

(3) 动态规划。这是一种解决多阶段决策过程最优化的方法。他把困难的多阶段决策问题分解成一系列相互联系的较容易解决的单阶段决策问题。

(4) 图与网络优化。在这种模型中把研究对象用点表示，对象之间的关系用边（或弧）来表示，点边的集合构成了图。这种特殊的模型可以使我们解决很多诸如系统设计、项目进度安排管理方面的问题。

(5) 网络计划。该方法研究在含有某些先后顺序工序的工程中如何排序以及如何制定和控制工作计划和进度表，使得完成全部工程所需的总时间最少或最经济等问题。

(6) 决策论。是根据信息和评价准则，用数量方法寻找或选取最优决策方案的科学。

1.3 运筹学的工作步骤

运筹学在解决大量实际问题的过程中形成了自己的工作步骤。

(1) 提出和形成问题。即要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料。

(2) 建立模型。即把问题中可控变量、参数和目标与约束之间的关系用一定的模型表示出来。

(3) 求解。用各种手段将模型求解。解可以是最优解、次优解、

课堂笔记

满意解。

(4) 解的检验。首先检查求解步骤和程序有无错误，然后检查解是否反映现实问题。

(5) 解的控制。通过控制解的变化过程决定对解是否要做一定的改变。

(6) 解的实施。是指将解用到实际中必须考虑到实施的问题，如向实际部门讲清解的用法，在实施中可能产生的问题和修改。

1.4 运筹学的应用

二次世界大战后运筹学的应用转向民用，这里只能对某些重要领域给予简述。

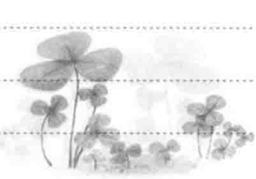
(1) 生产计划。使用运筹学方法从总体上确定适应需求的生产、存储和劳动力的配合等计划，以谋求最大利润或最小的成本，主要用线性规划和模拟方法来解决此类问题。如巴基斯坦某一重型制造厂用线性规划安排生产计划，节省 10%的生产费用。还可用于生产作业计划、日程表的编排等。此外，还有在合理下料、配料问题、物料管理等方面的应用。

(2) 运输问题。用运筹学中有关运输问题的方法，可以确定最小成本运输线路、物质调拨、运输工具调度和建厂地址选择等。例如，印度巴罗达市对公共汽车行车路线和时刻表进行研究改进后，该市公共汽车载运系数提高了11%，减少了10%使用车辆，既节省了成本又改善了交通拥挤的状况。又如，美国柯达工作在选厂址方面，应用运筹学方法取得了很好的效果。

(3) 人事管理。可以用运筹学方法进行人员的获得和需求估计；确定适合需要的人员编制；用指派问题对人员合理分配；用层次分析法确定人才评价体系等。

(4) 市场营销。可把运筹学方法用于广告预算和媒介的选择、竞争性的定价、新产品的开发、销售计划的制订等方面。例如，美国杜邦公司从 20 世纪 50 年代起就非常重视运筹学在市场营销上的应用。

(5) 财务和会计。这里涉及预测、贷款、成本分析、定价、证券管理、现金管理等，使用较多的运筹学方法为统计分析、数学规划、决策分析等。



(6) 计算机和信息系统。可将运筹学用于计算机的内存分配，研究不同排队规则对磁盘工作性能的影响。有人利用整数规划寻找

课堂笔记

满足一组需求文件的寻找次序，利用图论、数学规划等方法研究计算机信息系统的自动设计。

另外，运筹学还成功地应用于设备维修、更新和可靠性分析，项目的选择与评价，工程优化设计，各种城市紧急服务系统的设计与管理上。

我国从1957年开始把运筹学应用于交通运输、工业、农业等行业，并取得了很大的成功。例如，为了解决粮食的合理调运问题，粮食部门提出了“图上作业法”。为了解决邮递员合理投递问题，管梅谷提出了“中国邮路问题”的解法。在工业生产中推广了合理下料、机床负荷分配等方法。在纺织业中用排队论方法解决了细纱车间劳动组织以及最优折布长度等问题。在农业中也研究了作业布局、劳动分配和打麦场设置等问题。在钢铁行业，投入产出法首先得到了应用。统筹法的应用在建筑业、大型设备维修计划等方面也取得了长足的进展。优选法也在我国得到了大力推广。排队论、图论在研究矿山、港口、电信以及线路设计方面都有应用。

1.5 运筹学的学科特点

运筹学作为一门新兴学科，还没有形成统一确切的定义，但各种关于运筹学的描述都反映出以下特点：

(1) 运筹学是一门以数学为主要工具，寻求各种问题最优方案的学科，解决问题的基础是最优化理论和技术，并强调使问题系统达到整体最优。

(2) 由于研究对象的多样性和复杂型，运筹学解决问题的方法具有综合性和多学科交叉的特点。运筹学的成果从一开始就是跨学科的各领域专家协作研究形成的。

(3) 运筹学解决问题的方法具有显著的系统分析特征，其各种方法应用几乎都需要建立数学模型和利用计算机进行求解（尤其是大规模优化问题），运筹学的发展与电子计算机的问世与发展是分不开的，可以不夸张地说，没有计算机的发展就没有现代运筹学的发展。

(4) 运筹学具有丰富广泛的应用性和强烈的实践性，应用范围遍及社会生活的各个领域，比如制造业、运输业、建筑业、通信业、金融业、卫生保健、军事领域和公共服务业等，其目的在于更好地解决实际问题，通过定量分析为决策者提供依据。

课堂笔记

1.6　运筹学的学习方法与资源

运筹学解决实际问题的核心是，在深入而充分地理解问题背景的前提下，正确地建立和使用数学模型。数学模型是将现实问题或系统中有关的参数（因素）及其相互关系经过简化和抽象，用数学语言描述的一个或一组数学表达式。运筹学中使用的数学模型一般是由决策变量、目标函数和约束条件构成的。

运筹学的课程学习内容从横向来看，是各种类型的典型问题与案例引出的最优化模型，以及求解理论与方法。从纵向来看，需要学习的是每一类问题的模型特征，建模过程与求解过程、结论分析与应用过程。

针对运筹学的研究对象和学科特点，运筹学的学习有以下建议：

（1）案例式学习：从一个典型问题的解决全过程中，抓住如何分析问题，识别问题的特征，如何用数学语言刻画运筹学模型，该模型如何求解，理论基础是什么，具体求解技术是如何实现的，该模型可以在何种范围和条件下应用等问题。

（2）重视基本概念和基本原理：运筹学涉及比较多的概念和专业术语，概念理解模糊将会导致学习困难，理解概念和原理的一个有效途径是深入地观察和研究例题。

（3）重视练习和实践机会。观察和模仿例题所示范的过程，独立完成足够量的课后习题，特别建议的是通过小组合作解决生活中、身边的实际优化问题。

（4）重视计算机软件对学习运筹学的作用。这些软件包括微软的电子表格 Microsoft Excel，运筹学软件包 Lindo 和 Lingo，这些软件都可以帮助学习者更有效率地完成计算，降低使用者的计算工作量，也使得学习者有更多的时间剖析实际问题、建立更加合理的数学模型、以及模型运算结果的分析与修正，这对全面深刻认识运筹学具有非常重要的意义。

课堂笔记

第 2 章 线性规划

线性规划理论是运筹学研究最早、理论最成熟、方法通用性最高、应用最广泛的一个分支。线性规划理论的发展被认为是 20 世纪中叶最重要的科学进步之一。前苏联科学家康托洛维奇（L. V. Kantorovich，1912—1986）和美国数学家丹兹格（G. B. Dantzig，1914—2005）对线性规划理论做出了开创性的工作。1939 年，康托洛维奇在其著作《生产组织与计划中的数学方法》中首次整理并提出了线性规划问题及其解法；1947 年丹兹格提出了求解一般线性规划问题的算法——单纯形法（Simplex Method），为发展线性规划的理论、方法和应用奠定了基础。

本章将从一些实例出发，介绍线性规划的概念与模型、基本形式、图解法与单纯形法（代数迭代法、单纯形表法）。

2.1 线性规划问题及其数学模型

线性规划研究的问题大体包括两类，一类是在资源有限的条件下如何分配资源以获得最大的效益；另一类是在给定的任务下如何使成本达到最小。此处所指的资源是一个广义的概念，它可以是劳动力、原材料、机器设备、资金、空间等有形的事物，也可以是时间、技术等无形的事物。

下面我们通过两个案例来反映线性规划的数学模型。

[例 2-1] 资源的合理利用问题。

某工厂在每个月生产甲、乙两种产品，生产过程需要消耗 A、B、C 三种资源。生产每件产品对各种资源的消耗量、工厂拥有各种资源的数量以及每件产品所能获得的利润如表 2-1 所示，请问如何安排生产计划以使每个月的生产获利最大（此处假设各种参数在每个月都保持稳定，生产的产品能被全部售出）。

表 2-1

资　源	单位产品资源消耗量		资源拥有量
	甲	乙	
A	1	2	8
B	4	0	16
C	0	4	12
单位产品利润	2	3	

课堂笔记

首先考虑问题的目标是使每个月获得最大利润，而利润总额取决于两种产品的数量和单位利润。单位利润是常数，所以影响目标的关键变量是产品数量。

建立模型：设变量 x_1 和 x_2 分别表示在每个月内甲、乙两种产品的产量，变量 z 表示每个月的总利润。则 z 与 x_1，x_2 之间存在线性关系：

$$z = 2x_1 + 3x_2 \tag{2.1}$$

这个关系式刻画出目标量（总利润）与两种产品的产量的关系，通常把这样的关系式称为**目标函数**，其中的自变量 x_1，x_2 称为决策变量。考虑到要求的目标量要获得最大值，习惯将关系式表达为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \tag{2.2}$$

另外每个月可使用的三种资源的数量是有限的，资源 A 的拥有量是 8 个单位，生产一件甲、乙产品需要资源 A 分别为 1 和 2 个单位，那么生产 x_1 件甲产品、x_2 件乙产品消耗资源 A 的总数为 $x_1 + 2x_2$，因此资源 A 的约束可用下述不等式加以表示：

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \tag{2.3}$$

同理，资源 B 和资源 C 的约束可用下述两个不等式加以表示：

$$4x_1 \leqslant 16 \tag{2.4}$$

$$4x_2 \leqslant 12 \tag{2.5}$$

表达式（2.3）～（2.5）反映了三种资源对两种产品生产量（决策变量）的限制，通常称为约束条件（subject to，简记为 S.T. 或者 s.t.）。由于这些条件在题目中明确给出，称为显式约束条件。另外由于变量 x_1，x_2 取值不能为负，所以还存在约束条件：

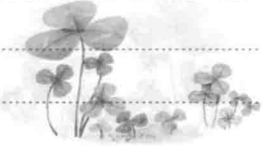
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \tag{2.6}$$

称此类问题中隐含的限制条件称为隐式约束条件。综合以上表述，该问题的数学模型可表示为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

[例 2-2] 饲料搭配问题。

某公司饲养实验用的某种动物以供出售。已知动物的生长对饲料中的三种营养成分——蛋白质、矿物质、维生素特别敏感，每只动物每天至少需要蛋白质 70g、矿物质 3g、维生素 10mg，该公司能买到 5 种不同的饲料，每种饲料 1kg 的成本及所含营养成分如表 2-2。该公司试图把 5 种不同的饲料搭配使用，以满足动物生长的营养需要，并使投入的总成



课堂笔记

本最低。请为该公司提供最佳的饲料搭配方案。

表 2-2

饲料	单位质量的成本（元/kg）	蛋白质（g）	矿物质（g）	维生素（mg）
1	0.2	0.30	0.10	0.05
2	0.7	2.00	0.05	0.10
3	0.4	1.00	0.02	0.02
4	0.3	0.60	0.20	0.20
5	0.5	1.80	0.05	0.08

此问题的目标是使得每只动物每天的饲料总成本最低，5 种饲料的数量及成本是影响该目标的关键因素。引入决策变量 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 分别表示每天喂给每只动物的 5 种饲料的质量（单位 kg）。z 表示每只动物每天饲料的成本，此处假设每只动物的喂养方案一致。

则目标函数可以表示为：$z = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.5x_5$

动物获取的蛋白质、矿物质、维生素三种营养素的最低要求可以表示为：

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0.6x_4 + 1.8x_5 \geqslant 70 \\ 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.02x_3 + 0.20x_4 + 0.05x_5 \geqslant 3 \\ 0.05x_1 + 0.10x_2 + 0.02x_3 + 0.20x_4 + 0.08x_5 \geqslant 10 \end{cases} \tag{2.8}$$

考虑到求目标函数最小值，以及决策变量非负的隐式约束条件，该问题的数学模型为：

$$\min z = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.5x_5$$

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0.6x_4 + 1.8x_5 \geqslant 70 \\ 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.02x_3 + 0.20x_4 + 0.05x_5 \geqslant 3 \\ 0.05x_1 + 0.10x_2 + 0.02x_3 + 0.20x_4 + 0.08x_5 \geqslant 10 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4,5 \end{cases} \tag{2.9}$$

上述两个模型前者目标是效益最大化，后者是成本最小化，它们的共同特征是：

（1）每一个问题都用一组决策变量（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）表示某一方案，这组决策变量的值就代表一个具体方案。一般这些变量取值是非负且连续的。

（2）要有建模的有关数据，如资源拥有量、消耗资源定额、创造新价值量等，并构成互补矛盾的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示。

课堂笔记

(3) 都有一个要求达到的目标，它可用决策变量及其有关的价值系数构成的线性函数（称为目标函数）来表示。按问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

满足以上三个条件的数学模型成为线性规划的数学模型。其一般形式为：

$$\max z\text{（或者 }\min z\text{）} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m \\ x_i \geqslant 0 (\text{或 } x_j \leqslant 0, x_k \in \mathbf{R}), i,j,k \in \{1,2,\cdots,n\} \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2　图解法与线性规划的解的基本性质

上一节列举了两个把实际问题表述为线性规划数学模型的例子，从本节起将讨论线性规划模型的解法。对于只含两个决策变量的线性规划模型，可以用图解法求解。图解法是借助平面直角坐标系来求解线性规划的方法，具有简单直观的特点，并且可以帮助理解线性规划解的概念和求解的基本原理。

下面以例 2-1 的模型求解为例说明图解法的过程。

[例 2-3] 用图解法求解模型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

第一步：分别以决策变量 x_1，x_2 为横轴和纵轴建立直角坐标系；

第二步：在直角坐标系内作出满足所有约束条件的区域。

由于 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$，要求坐标点 (x_1, x_2) 在直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 的左下方（该直线也包含在内，以下做相同解释）；条件 $4x_1 \leqslant 16$ 要求坐标点 (x_1, x_2) 在直线 $x_1 = 4$ 的左侧；条件 $4x_2 \leqslant 12$ 要求坐标点 (x_1, x_2) 在直线 $x_2 = 3$ 的下方；条件 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ 要求坐标点 (x_1, x_2) 在第一象限，从而满足所有约束条件的点 (x_1, x_2) 在上述区域的交集内，称之为该模型的**可行解域**（简称**可行域**），可行域内的每一个点称为可行点，对应坐标称为该模型的**可行解**。该问题的可行域是以多边形 $OABCD$ 为边界的平面区域，围成该区域的直线称为**边界直线**，如下图所示：

课堂笔记

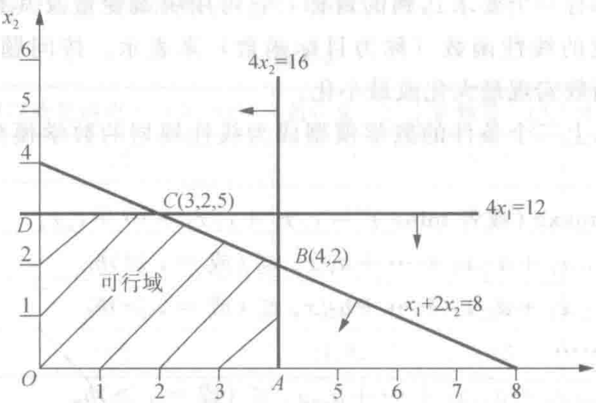


图 2-1

第三步：作出目标函数的等值线，寻找使目标函数值取得最优的坐标点。

对目标函数 $z=2x_1+3x_2$ 变形得 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z}{3}$，若取 z 为某个常数 z_0（此处可以取为 0），则 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z_0}{3}$ 代表一条直线（斜截式方程），该直线上每一点 (x_1,x_2) 处目标函数值都等于 z_0，称之为目标函数等值线，并且 $\frac{z_0}{3}$ 代表该直线在 x_2 轴上的截距。让目标函数等值线经过可行域中的点作平行移动，可以观察到，目标函数 z 取得最大值当且仅当目标函数等值线平行移动时（必须经过可行域中的某一点，否则等值线上没有可行点）截距 $\frac{z}{3}$ 达到最大。当目标函数等值线经过可行域的顶点 $B(4,2)$ 时截距达到最大，目标值取得最大值 14。顶点 $B(4,2)$ 对应坐标即为决策变量的最优解，最优解代入目标函数得到的值称为最优值。如图所示：

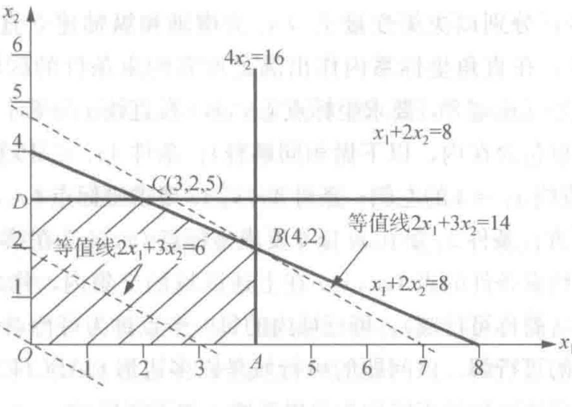


图 2-2

课堂笔记

于是该问题的最优解为 $(x_1^*, x_2^*) = (4,2)$，最优值为 $z^* = 14$。

图解法求解线性规划需要注意的几点说明：

(1) 如果约束条件是等式，则可行域在该等式表示的直线上，不再是一个多边形；

(2) 目标函数等值线一定要经过可行域中的点，否则该目标值是无法取到的；

(3) 目标函数等值线的移动方向是使得目标值增大（对于求最大值问题）或减小（对于求最小值问题）的方向，如果最优解存在的话，等值线经过的临界点是可行域的一个顶点（两条边界直线的交点），或者一段直线边界，需要通过解方程得到；

(4) 图解法作图一定要准确，特别是目标函数等值线的斜率与边界直线斜率的相对大小。

如果在上例中改变目标函数为 $\max z = 2x_1 + 4x_2$，约束条件不变，即模型为

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

则目标函数等值线 $z = 2x_1 + 4x_2$ 与可行域的边界直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 平行。可以观察到，当等值线经过边界线段 BC 上任何一点时，目标函数都取得最优值 $z^* = 16$。其最优解为边界线段 BC 上任何一点的坐标（包含顶点 B，C）。其最优解集可以表示为：

$(x_1, x_2) \in \{\lambda(3, 2.5) + (1-\lambda)\cdot(4,2) \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$。

如果将模型改为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 8 \\ 4x_1 \geqslant 16 \\ 4x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

可行域是一个无界区域，目标值可以无限增大，从而导致最优解无界，称为无界解。

如果将模型改为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \geqslant 16 \\ 4x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

课堂笔记

可行域为空集，没有可行解，从而也不存在最优解。

从以上的讨论中可以得到以下线性规划的解的几种情况：

(1) 存在唯一的最优解，最优解在可行域的某一个顶点上；

(2) 存在多个最优解，最优解在可行域的某一段边界上取得；

(3) 有无穷多可行解，但是最优解无界；

(4) 无可行解，也没有最优解。

图解法的求解过程反映出线性规划问题的许多性质，主要有以下几点：

1. 一个线性规划问题如果有可行解，其可行解域通常是一个凸多边形或者凸集（凸多边形位于任意一条边界的同侧；连接多边形中任意两点的线段都包含在多边形中），可行域可能有界，也可能无界；可行解域的顶点个数是有限的。

2. 一个线性规划问题如果存在最优解，则其最优解必定在可行域的边界上取得。如果这个最优解是唯一的，那么它必定在某个顶点上取得；如果最优解不唯一，那么它在连接某两个顶点的边界线段上取得（这一性质称为线性规划基本定理）。

3. 若可行域无界，其最优解不一定是无界解，这与线性规划问题求最大值还是最小值有关。

对于仅含两个决策变量的线性规划化问题，图解法可以简明直观地得出它的结果。含有三个决策变量的线性规划问题，理论上也可以通过图解法求解，不过手工作图比较困难，实际很少使用。对于多于两个变量的线性规划问题，需要更为一般可行的方法。丹兹格（Dantzig）于 1947 年提出的单纯形法奠定了线性规划一般求解方法的基础。

2.3 线性规划的标准化

采用线性规划的一般形式进行求解，形式上要求解不等式组 (2.10)。通过引入一些新的变量，不等式组可以等价转化为方程组，这样可以采用线性方程组的求解理论来完成线性规划问题的求解，特别是可以使用矩阵为工具来表达方程组约束以及问题的解。为此，我们引入线性规划标准形的概念。

线性规划标准形式：

$$\max z\text{（或者 }\min z\text{）} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2.14}$$