“十三五”国家重点图书

Springer 精选翻译图书

压缩感知的数学导论

A Mathematical Introduction to Compressive Sensing

[美] Simon Foucart
[德] Holger Rauhut 著

杨强 张鑫 邓维波 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

"十三五"国家重点图书
Springer 精选翻译图书

压缩感知的数学导论

A Mathematical Introduction to Compressive Sensing

[美] Simon Foucart
[德] Holger Rauhut 著
杨强 张鑫 邓维波 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

在真实的物理世界中，信号在其自身表达或某种变换域上往往是稀疏的。压缩感知技术契合信号自然的稀疏属性，以重建、恢复为最终目的，突破了现有系统的正定条件约束，为信号处理研究者打开了一扇通往更自由的大门。由此，压缩感知成为进入 21 世纪以来最重要的科学突破之一。本书从数学角度和基本理论入手，深入浅出地描绘出压缩感知的相关理论图谱，以数学本身的严谨和精确特性，使读者建立更基础、更清晰的压缩感知数学基础，促进读者为物理世界的信号处理找到独特的信号处理方法。

本书中各类原理和算法可以帮助通信、电子、雷达、信息、图像处理、导航、计算机、生物医学、地球物理等专业领域的研究者、工程师解决科学问题。本书可以作为计算机科学、信息与通信工程等专业的高年级本科生、研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

压缩感知的数学导论/(美)西蒙·福卡特(Simon Foucart),(德)霍尔格·豪乌特(Holger Rauhut)著；杨强，张鑫，邓维波译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 6
ISBN 978－7－5603－7393－5

Ⅰ. ①压… Ⅱ. ①西… ②霍… ③杨… ④张… ⑤邓…
Ⅲ. ①数字信号处理－研究 Ⅳ. ①TN911. 72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 110512 号

电子与通信工程
图书工作室

策划编辑　许雅莹　杨　桦　张秀华
责任编辑　李长波
封面设计　高永利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　660mm×980mm　1/16　印张 30. 25　字数 559 千字
版　　次　2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－7393－5
定　　价　55. 00 元

译 者 序

在信号与信息处理领域，作为20世纪最基础理论之一的香农采样定理不仅在理论上发现了信号能够被完全恢复的基本前提，更使得研究者从电压电流所构成的模拟信号世界迅速转向了由“0”“1”组成的数字世界，从而使全球范围内电子、雷达、信息、图像处理、生物医学、地球物理等领域的应用得到了突飞猛进的发展。2006年，Donoho等人提出了关于信号的压缩感知表述及处理方法，该概念借助自然信号本身的稀疏性或某个变换域的稀疏性，突破了香农采样定理的局限性，允许仅使用少数采样样本就能恢复被采样信号。压缩感知的新理论一经提出，迅速成为通信、电子、信息、图像处理、导航、计算机、生物医学、地球物理等领域理论突破和技术发展的主要工具，是21世纪最重要的理论突破之一。

本书作者在精练压缩感知理论技术基础上，从数学视角循序渐进、由浅入深地讨论了压缩感知的基本问题、约束条件以及各类算法等核心概念和原理，为研究生、工程人员、技术专家等提供了精细、准确的数学解释和论证。对于有兴趣研究压缩感知技术的人来说，本书是一本数学指导书，可以帮助他们建立清晰的压缩感知基础理论框架，了解压缩感知技术发展规律，找到解决专业领域问题的新工具。

本书在翻译过程中，得到了哈尔滨工业大学通信工程专业、电子工程专业给予的环境支持，特别感谢博士生姚迪、叶磊、刘爱华、陈秋实、张畅的帮助，也特别感谢博士生赵梦晓、张佳智等人精心细致的校稿工作。借王国维先生的治学三大境界中第一境：“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路”之语共勉，希望本书能够帮助读者在压缩感知理论和技术方面执着追求，登高望远，瞰察路径，早日进入大成境界。

此外，译者在翻译过程中尽可能尊重原文原义，尚存在不尽之处，也请读者见谅。

杨强，张鑫，邓维波

于哈尔滨

2018年5月

前 言

近些年来，在被称为压缩感知、可压缩的感知或者压缩采样领域开展了大量的研究。在写下本书前言时，谷歌学术搜索到的有关上述三个关键词的文章数量高达约 4 400 篇。压缩感知，源起于同时进行数据采集和压缩处理，与数学、电子工程、计算机科学以及物理学密切相关。由于真实物理世界中的信号大多是稀疏的，即使是只有少数信号采样样本，也可以通过发现其稀疏性，以压缩感知的方法求解由线性方程表达的欠定系统。稀疏信号的重建方法不仅在理论上是合理可行的，在实际应用中也确实存在，并且有效。同时，在采样过程中引入随机性可以用最少的样本数目完成重建。自 2004 年以来，一些算法实现，包括相关的潜在的应用，都引起了科学界的兴趣。压缩感知的部分原理显然比压缩感知的出现更久远，但其基础理论还是建立在一些数学分支上的。这些数学分支包括线性代数、近似理论、凸分析、优化理论、概率论（特别是随机矩阵）、巴拿赫空间几何、谐波分析和图论。本书是详细而丰富的同时简明的压缩感知数学导论的介绍，仅仅需要基本分析方法、线性代数和概率论的知识即可学习，无须再事先学习其他背景理论。

数学知识总是应用初始尝试者的理论补充。相比令人筋疲力尽的论文，我们精心选择了那些足以保证本书体系的内容。不过，如此详细的叙述在某种意义上是希望每一个结果都能被严格证实，方便数学和相关工程专业的研究生、计算机科学家和物理学家研读。本书也提供了相比文献更简短易懂的证明。在范德堡大学、德雷塞尔大学、波恩大学以及苏黎世联邦理工学院，本书也历经了为压缩感知课程的学生便于理解而不断增补的过程，这使得理论介绍变得更清晰。在第 1 章的末尾，本书也为即将开设的压缩感知课程提出了一些建议。

本书的组织框架遵循了由浅入深的思路，章节结构如下：第 1 章简要介绍了压缩感知的核心概念，描述了一些应用及其内在驱动，并给出了全书概览。第 2～6 章讲述了压缩感知的确定性理论，其中解释了稀疏性概念，介绍了基本算法，并分析了不同特性下的算法性能。关于随机矩阵的突破性进展，第 7 章、第 8 章展示了所需要的概率论工具。第 9～12 章处理了关于随机矩阵的稀疏恢复问题及相关主题。第 13 章深入分析了无损扩展器。第 14 章介绍了

确定性矩阵下的随机稀疏信号恢复。最后，第 15 章研究了部分最小化 ℓ_1 范数算法。

每章末尾都有注释，包含了一些相关文献、历史评论、引申或开放性问题等，十分有用。每章的习题都是精心选择编辑的，读者可通过习题解答获得一些有意义的结论。例如，低秩矩阵恢复问题相关理论中的快拍数问题贯穿于整本书的习题中。

本书给出了各种稀疏恢复算法及其理论分析。面对特定实践问题，研究人员可能对选择哪种算法感到困惑。一般来说，所有算法都应是相对有效的，但是在特定环境和条件下确定哪一种执行得更好或更快，是一个数值实现问题。为了避免读者对某种算法产生倾向性，并且对所有可能性进行试验也是不现实的，本书不给出算法实现的比较，但在第 3 章中可以找到一些粗略的提示。

描绘快速发展变化的压缩感知技术的图谱是一个非常有挑战性的任务。在撰写本书时，该领域的新发展不断出现，因此作者进行了大量修改和增补。相信本书的内容能够为压缩感知的数学理论建立坚实的基础，无须重建就可在此基础上发展新算法。当然，对于一个快速发展的领域来说，在预测其未来几年发展动向方面，本书里的相关预测可能会进一步更新。

很多研究都对压缩感知的发展产生了有意义的影响。本书试图完善地引用他们的文献。如果遗漏了一些重要的研究，在此也对那些作者致歉。本书受益于下列研究者的合作和讨论(以姓氏字母为序)：Nir Ailon, Akram Aldroubi, Ulaş Ayaz, Sören Bartels, Helmut Boelcskei, Petros Boufounos, Emmanuel Candès, Volkan Cevher, Albert Cohen, Ingrid Daubechies, Ron DeVore, Sjoerd Dirksen, Yonina Eldar, Jalal Fadili, Maryam Fazel, Hans Feichtinger, Massimo Fornasier, Rémi Gribonval, Karlheinz Gröchenig, Jarvis Haupt, Pawel Hitczenko, Franz Hlawatsch, Max Hügel, Mark Iwen, Maryia Kabanava, Felix Krahmer, Stefan Kunis, Gitta Kutyniok, Ming-Jun Lai, Ignace Loris, Shahar Mendelson, Alain Pajor, Götz Pfander, Alexander Powell, Justin Romberg, Karin Schnass, Christoph Schwab, Željka Stojanac, Jared Tanner, Georg Tauböck, Vladimir Temlyakov, Joel Tropp, Tino Ullrich, Pierre Vandergheynst, Roman Vershynin, Jan Vybiral, Rachel Ward, Hugo Woerdeman, Przemysław Wojtaszczyk, and Stefan Worm. We greatly acknowledge the help of several colleagues for proofreading and commenting parts of the manuscript. They are (in alphabetical order) David Aschenbrücker, Ulaş Ayaz, Bubacarr Bah, Sören Bartels, Jean-

Luc Bouchot, Volkan Cevher, Christine DeMol, Sjoerd Dirksen, Massimo Fornasier, Rémi Gribonval, Karlheinz Gröchenig, Anders Hansen, Aicke Hinrichs, Pawel Hitczenko, Max Hü gel, Mark Iwen, Maryia Kabanava, Emily King, Felix Krahmer, Guillaume Lecué, Ignace Loris, Arian Maleki, Michael Minner, Deanna Needell, Yaniv Plan, Alexander Powell, Omar Rivasplata, Rayan Saab, Željka Stojanac, Thomas Strohmer, Joel Tropp, Tino Ullrich, Jan Vybiral, Rachel Ward, 和 Hugo Woerdeman。特别感谢 Richard Baraniuk、Michael Lustig、Jared Tanner 和 Shreyas Vasanawala 给本书提供了相关图像。也感谢作者所在学校的支持以及以下学校在本书准备阶段提供的工作环境支持:范德堡大学、皮埃尔与玛丽一居里大学、西蒙·福卡特所在的德雷塞尔大学、霍尔格·豪乌特所在的波恩大学的霍斯多夫数学中心和数值仿真研究所。本书的部分内容是霍尔格·豪乌特在皮埃尔与玛丽一居里大学、苏黎世联邦理工学院、明尼苏达大学数学及应用研究所进行研究访问时撰写的。西蒙·福卡特感谢其在波恩大学的霍斯多夫数学中心访问时所受到的款待。作者们感谢维也纳大学数值谐波分析研究组允许使用其在线 BibTex 数据库来整理参考文献。西蒙·福卡特也感谢国家科学基金(项目编号 DMS−1120622)的支持。霍尔格·豪乌特感谢 WWTF(维纳科学技术研究基金)项目 SPORT(编号 MA07−004)的支持,感谢欧洲研究中心启动项目(StG258926)的支持。

最后,希望读者能享受学习的过程,在压缩感知学习过程中付出的努力将是值得的。

费城,宾夕法尼亚州,美国　　西蒙·福卡特

波恩,德国　　霍尔格·豪乌特

目　录

第1章　引　言

本章主要介绍压缩感知的基本问题，并概括本书的内容。数学理论源自于实际生活，因此十分有必要简单介绍一下压缩感知的潜在应用。

1.1　压缩感知的概念

在许多实际的科学技术问题中，经常会遇到的一个问题是如何从测量信息中推断出定量的有意义的内容。例如，在信号与图像处理过程中，从测量数据中重构信号。如果信息获取过程具有线性特征，那么重构问题可以简化为求解一个线性方程。用数学语言来说，观测数据 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^m$ 与所关心的信号 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^N$ 相关联，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{1.1}$$

矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times N}$ 是对线性测量过程的模型化。通过求解上面的线性方程，信号向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^N$ 得以恢复。经验知识告诉我们，测量次数 m 即测量数据的点数，必须大于或等于信号长度 N(矢量 $\boldsymbol{x}$ 的个数)，这是当前大多数技术设备的基础原理，例如模数转换、医学图像、雷达、通信等。实际上，如果 $m < N$，经典的线性代数表明此时的线性系统(1.1)是欠定的，可以有无穷多解(当然至少有一个解)。换句话说，如果没有附加信息，那么在 $m < N$ 条件下，是不可能从 $\boldsymbol{y}$ 中恢复 $\boldsymbol{x}$ 的。这一事实也与香农(Shannon)采样定理有关，香农采样定理表明，为了确保能够重构某个连续时间信号，对该信号的采样率应当是其最高频率的两倍。

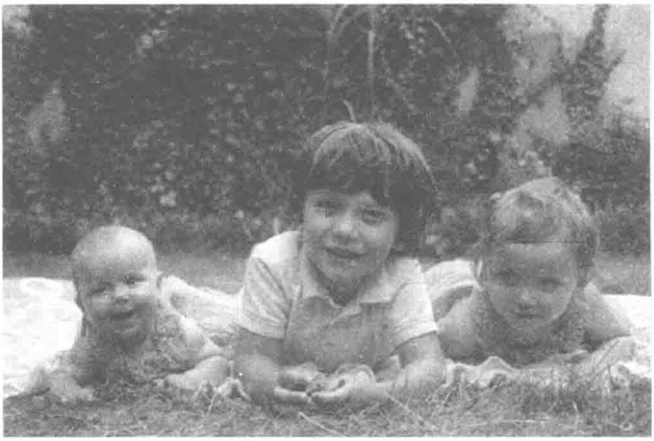
由此推想，在特定假设下，使用小于信号长度 N 的测量数 m，也有可能恢复信号，这是令人惊讶的。更令人惊讶的是，的确存在一些有效的重构算法，而使这些算法成为可能的一个基础假设就是利用了信号的稀疏性。

与这种现象相关联的研究被命名为压缩感知、压缩采样或者稀疏恢复。本书致力于这个领域的基础数学部分的研究。

1. 稀疏性

如果一个信号的大多数分量是0，则称这个信号是稀疏的。从经典的观测角度，许多真实世界中的信号是可以被压缩的，即它们可以用稀疏信号很好地表达出来(经常是在选择合适的基函数并进行某个变换后)。这也解释了那

些压缩技术(JPEG、MPEG 或 MP3)能够正常工作的原因。例如,JPEG 技术依赖于在离散余弦基或小波基上图像的稀疏性,通过只保留最大的离散余弦系数或小波系数就可以获得压缩效果,其余系数则简单地设置为 0 即可。图 1.1 就是一个例子,表明自然图像在小波域是稀疏的。



(a) 原始图像

(b) 使用1%最大绝对小波系数即99%的系数设置为0后重建的图像

图 1.1 3 个小孩图像重构前后对比

重新考虑信号的采集和测量数据就会发现,如果已知信号是稀疏的或是可以压缩的,使用测量数至少等于信号长度原则的经典方法是在浪费资源。首先,大量的工作致力于测量信号的所有输入,然后大多数系数在压缩时又被丢弃。但实际上,如果想获取信号的压缩版本,就可以直接使用明显少于信号长度的测量数据,只要发现信号的稀疏性或可压缩性就可以。换言之,以压缩的方式去感知可压缩信号,这就是压缩感知的首要目标。

必须强调，这里主要的难题是向量 $\boldsymbol{x}$ 的非零元素的位置不是已知的。如果该位置已知，则只需简化矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为那些位置所在列构成的矩阵，线性方程描述的系统则变为超定的，可以对非零元素求解。当待重构向量中非零位置未知时，将引入非线性。这是由于 s 稀疏向量(指稀疏度为 s 的向量，其中最多有 s 个非零系数)形成了非线性集合。实际上，$2s$ 个稀疏向量相加一般会得到一个 $2s$ 稀疏向量。所以，任何一个成功的向量重构算法都必然是非线性的。

直观看来，一个可压缩信号的复杂性或"内在"的信息容量远远小于它的信号长度(否则压缩处理是不可能的)。有人会认为所需的数据量(观测次数)应当与这种"内在"信息容量成正比，而不是与信号长度成正比；然而，此时却不能立刻给出如何重构信号。

再仔细观察这个标准的压缩感知问题。从欠定测量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^m$，$m<N$ 重构稀疏向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^N$，本质上将有两个问题：

① 如何设计线性观测过程？或者说，什么样的矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times N}$ 是合适的？

② 怎样从 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中重构 $\boldsymbol{x}$，或者说，什么是有效的重构算法？

这两个问题并不完全独立，尤其当重构算法需要考虑 $\boldsymbol{A}$ 时，但仍然可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分析与算法的分析分开。

到目前为止，第一个问题并不是没有价值。实际上，压缩感知处理并不适合任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times N}$。例如，如果 $\boldsymbol{A}$ 是单位矩阵，那么 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 仅仅是取得 $\boldsymbol{x}$ 的某些元素，且几乎没有零元素。特别是，如果 $\boldsymbol{y}$ 没有取得 $\boldsymbol{x}$ 的非零元素，那么就不能获得信息，从这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中无法重构信号。所以，压缩感知不但与算法有关，而且如何设计观测矩阵是同等重要、敏感的问题。可以强调的是在非自适应的测量过程中，已知数 y_j(即 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行)不依赖于历史观测点 $j_1,\cdots,j_{j-1}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应该被理想化地同时适应所有信号。结果是，大多数自适应测量并没有提供更好的理论性能(在某种角度上看至少是精确的(在第10章中))。

2. 算法

在实际应用中，合理快速重构算法的可用性是关键。这个特征给压缩感知带来了更多的争论。第一个进入视野的算法可能是最小化 ℓ_0 算法。使用符号 $\|\boldsymbol{x}\|_0$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 中的非零元素，重构 $\boldsymbol{x}$ 的问题就转变为求解联合最优化问题：

$$\text{最小化}\ \|\boldsymbol{z}\|_0,\quad \text{依赖于}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$$

即找寻与测量数据 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 相一致的最稀疏向量。然而，最小化 ℓ_0 算法一般是一个非确定多项式难度问题(NP-hard)。研究证实快速有效的重构算法的确存在。一种常用的、被大家熟知的方法是用基追踪法或最小化 ℓ_1 法去寻找问

题的最小点：

$$\text{最小化}\ \|z\|_1,\quad \text{依赖于}\ \boldsymbol{A}z=\boldsymbol{y} \tag{1.2}$$

既然 ℓ_1 范数是一个凸函数，这样的最优化问题可以使用凸优化类算法解决。基追踪法被认为是最优化 ℓ_0 的凸松弛法。另外，重构算法包括正交匹配追踪等贪婪类算法、迭代硬阈值等基于阈值的算法。研究发现，在合适的假设条件下这些算法的确能够恢复稀疏向量。

从图 1.2 和图 1.3 可以观察到，它们对一个在频域稀疏度为 5 的 64 点长的信号，显现了压缩感知的能力。仅仅通过时域的 16 点数据就可以通过基追踪法(最小化 ℓ_1)完全恢复。作为对比，同时给出经典的基于最小化 ℓ_2 的线性方法结果，该方法无法从原始稀疏谱中恢复信号。

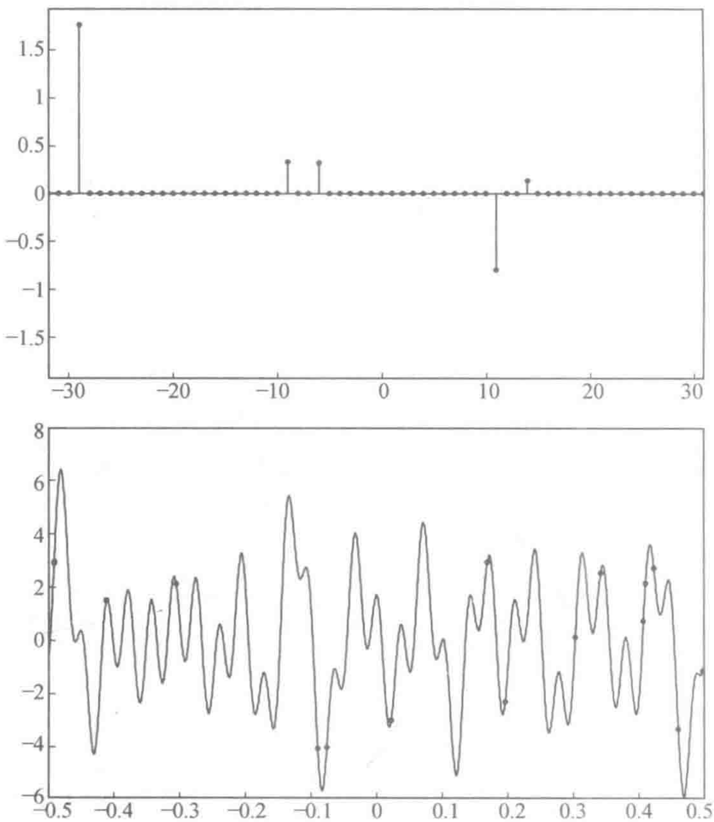


图 1.2　上图：64 个傅里叶系数的稀疏度为 5 的向量；下图：16 个样本的时域信号实部

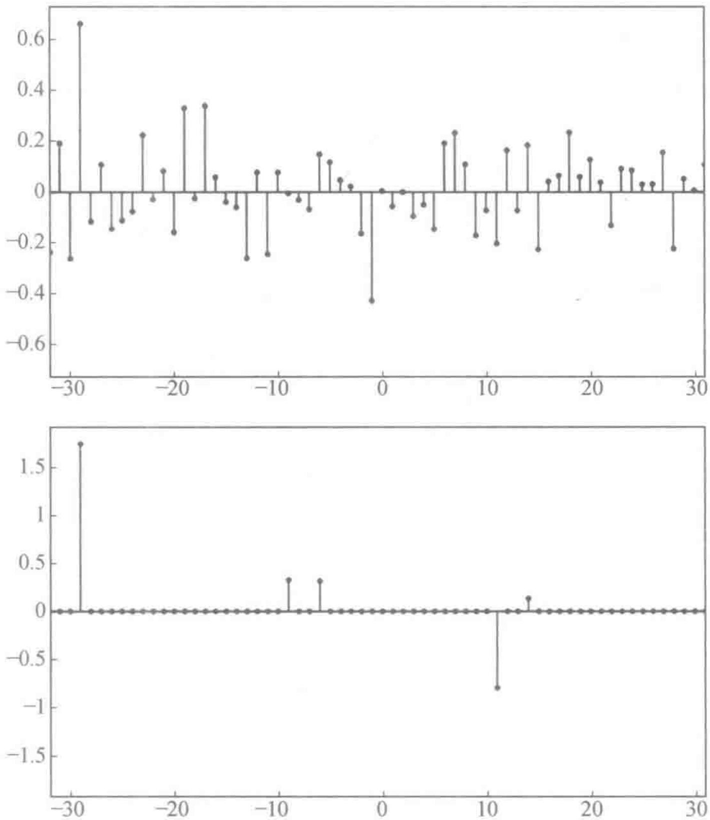


图 1.3　上图:通过最小化 ℓ_2 算法的粗略重构结果;下图:通过最小化 ℓ_1 算法的精细重构结果

3. 随机矩阵

产生适当的测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的方法是科学研究者努力的目标。到现在为止,在压缩感知设置中构造一个明确的可能是最优的矩阵,它是一个众所周知的问题。一些稀疏逼近和编码理论(例如等角紧支框架)的构造方法可以部分确保重构,但是它们都缺乏可以实现的最优边界。一种突破是借助于随机矩阵,而这可以看作压缩感知的诞生。最简单的例子是高斯矩阵,它的元素由独立的服从标准正态分布的随机变量组成;伯努利(Bernoulli)矩阵由等概率取值为 1 和 −1 的随机变量组成。压缩感知的关键结论表明,对一个 $m\times N$ 矩阵或伯努利矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行高概率随机抽取,所有的 s 稀疏向量可以通过一系列算法从 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中恢复,其中所有的算法满足

$$m\geqslant Cs\ln(N/s) \tag{1.3}$$

其中，C 是一般常数，$C>0$，与 s、m、N 独立。

实际上，上述边界条件是最优的。

根据式(1.3)，为了恢复 s 稀疏向量，所需的数据数量 m 随信号 s 线性变化，而信号长度 N 仅仅有非线性变化。特别是，如果信号的稀疏度 s 相比 N 而言很小，那么测量所需的数量 m 也可以很小，则线性方程所描述的欠定系统可以合理地获得精确解。这一发现影响了许多潜在的应用。

图 1.4 对比了基追踪和硬阈值追踪两种算法的性能。这两种算法都完成了从测量向量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^m$ 中恢复稀疏向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^N$ 的任务，仿真使用了高斯随机矩阵 $\boldsymbol{A}$，并且随机选择了 s 稀疏向量 $\boldsymbol{x}$。在固定稀疏度 s 条件下，图 1.4 给出了随着测量数目 m 变化，能够恢复向量 $\boldsymbol{x}$ 的百分比。特别是，该图表明了与

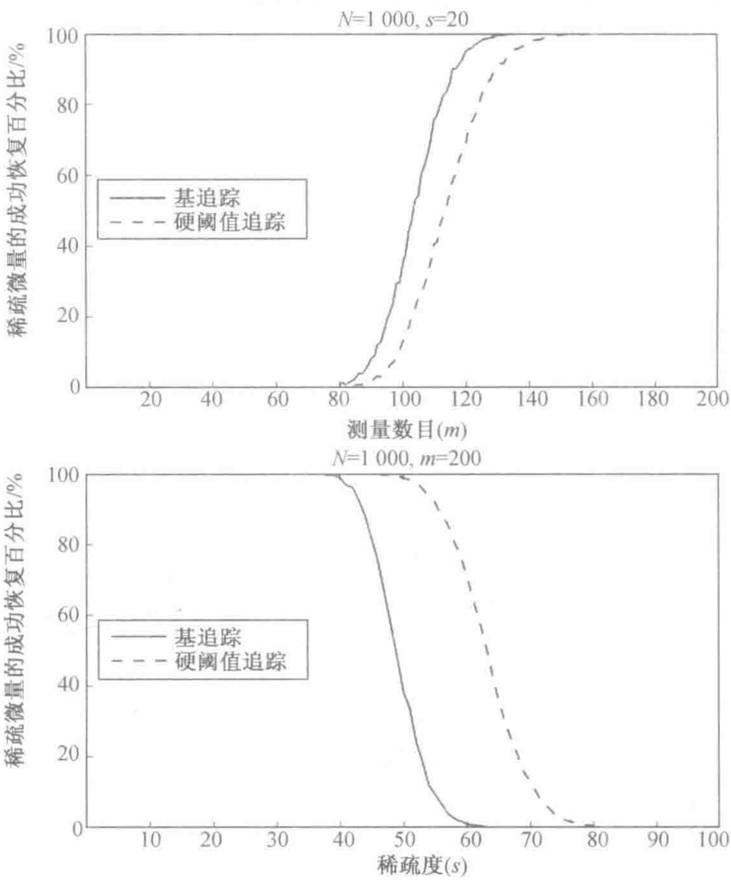


图 1.4　上图：雷德麦彻(Rademacher)分布稀疏向量的成功恢复百分比；下图：高斯分布稀疏向量的成功恢复百分比