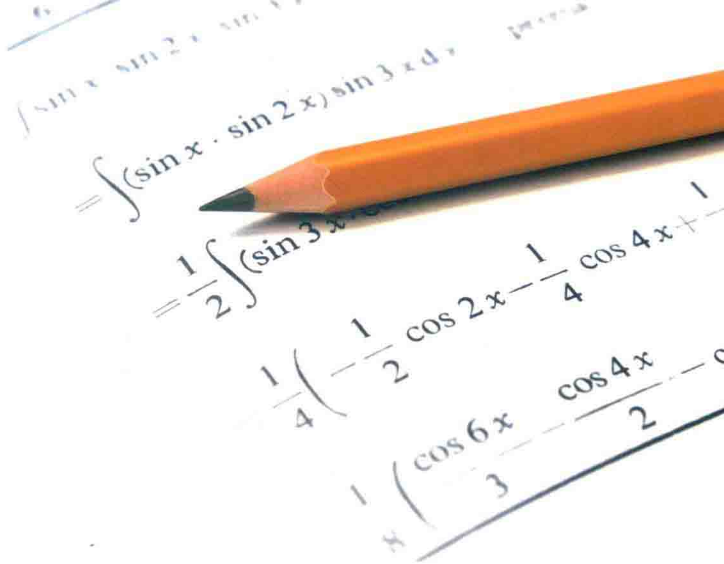
普通高等教育“十三五”规划教材



ADVANCED MATHEMATICS

高等数学

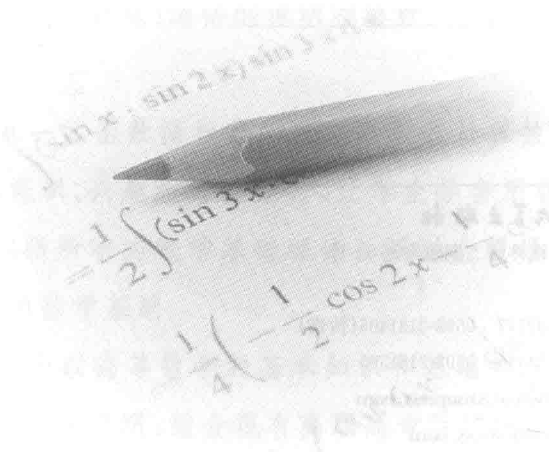
张玉祥 ◎编著

厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

ADVANCED MATHEMATICS

高等数学

张玉祥 ◎编著



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张玉祥编著.—厦门:厦门大学出版社,2018.7

ISBN 978-7-5615-6983-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 117245 号

出 版 人　郑文礼
责任编辑　眭　蔚
封面设计　蒋卓群
技术编辑　许克华

出版发行　厦门大学出版社
社　　址　厦门市软件园二期望海路 39 号
邮政编码　361008
总 编 办　0592-2182177　0592-2181406(传真)
营销中心　0592-2184458　0592-2181365
网　　址　http://www.xmupress.com
邮　　箱　xmup@xmupress.com
印　　刷　三明市华光印务有限公司

开本　787 mm×1 092 mm　1/16
印张　9.75
字数　200 千字
版次　2018 年 7 月第 1 版
印次　2018 年 7 月第 1 次印刷
定价　30.00 元

厦门大学出版社
微信二维码

厦门大学出版社
微博二维码

前 言

高等数学是高职高专院校学生必修的一门公共课.本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》而编写的.本书基于高职高专教育的特殊性、层次教学的要求和课程的特点,在不违背科学性的前提下,贯彻“以应用为指导思想,以必需、够用为度”的原则,淡化数学的严密性,提供直观、通俗的说明和解释.

本书的特点:

1. 基础性.以一元函数微积分的基本知识和计算技能为主线,培养学生应用数学的意识、兴趣和计算能力,让学生学会用数学的思维分析和解决实际问题,将所学的数学基础理论知识融会贯通,为今后的学习和工作打下坚实的数学基础.

2. 适用性.本书以高等数学的基本知识和基础知识为主,内容简单但广阔,不注重于理论证明,适合现有高职高专院校的数学教学.书中例题多,习题多,极其适合专科升本科的教学.

由于编者水平有限,书中难免存在错误与不足之处,恳请读者批评指正.

编 者

2018 年 7 月

目　录

预备知识

第一部分　基本公式

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

2. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$；

3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

第二部分　指数公式和对数公式

2.1　指数公式

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$；

3. $a^{mn} = (a^m)^n$；

4. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$；

5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$；

6. $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

如：$e^0=1$，$e^{3x}=(e^3)^x=(e^x)^3$，$2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2^3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{2-\frac{2}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$，

$2^{3x}\times3^{-2x}=(2^3)^x\times(3^{-2})^x=(2^3\times3^{-2})^x=\left(\frac{8}{9}\right)^x$.

2.2　对数公式

1. $\log_c 1=0$；

2. $\log_c c=1$；

3. $\log_c a+\log_c b=\log_c ab$；

4. $\log_c a-\log_c b=\log_c \frac{a}{b}$；

5. $\log_c a^m=m\log_c a$；

6. $\log_c c^a=a$；

7. $c^{\log_c a}=a$；

8. $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$.

如：$\ln6-\ln3=\ln\frac{6}{3}=\ln2$，$\ln10=\ln(2\times5)=\ln2+\ln5$，$\ln8=\ln2^3=3\ln2$，

$\ln\frac{1}{8}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^3=\ln2^{-3}=-3\ln2$，$\ln e^3=3$，$e^{\ln3}=3$，$\log_2 3=\frac{\ln3}{\ln2}$.

第三部分　三角函数和反三角函数

3.1　弧度制

1. 弧度制

弧度制是另一种度量角的单位制，它的单位是 rad，读作弧度.

定义　长度等于半径长的弧所对的圆心角称为 1 弧度的角，记为 1 rad.

如图 0.1，$\angle AOB=1$ rad，$\angle AOC=2$ rad，$360°=2\pi$ rad.

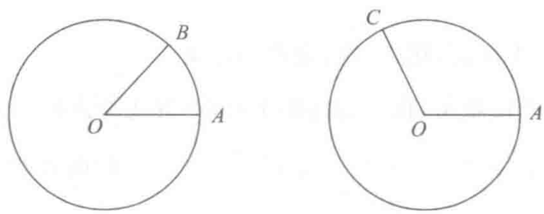


图 0.1

注：(1) 正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数是 0.

(2) 角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$(l 为弧长，r 为半径).

(3) 用角度制和弧度制来度量零角，单位不同，但数量相同(都是 0)；用角度制和弧度制来度量任一非零角，单位不同，数量也不同.

2. 角度制与弧度制的换算

由 $360°=2\pi$ rad，得 $180°=\pi$ rad，所以

$1°=\dfrac{\pi}{180}$ rad ≈ 0.01745 rad，1 rad $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30°=57°18'$.

例 1 把 $67°30'$ 化成弧度.

解 $67°30'=\left(67\dfrac{1}{2}\right)^{\circ}$，所以 $67°30'=\dfrac{\pi}{180}$ rad $\times 67\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}\pi$ rad.

例 2 把 $\dfrac{3}{5}\pi$ rad 化成度.

解 $\dfrac{3}{5}\pi$ rad $=\dfrac{3}{5}\times 180°=108°$.

注：(1)今后在具体运算时，“弧度”二字和单位符号“rad”可以省略.如 3 表示 3 rad，$\sin\pi$ 表示 π rad 角的正弦；

(2)$1°=60'$，$1'=60''$.

3.2 任意角的三角函数

1. 正弦、余弦、正切、余切、正割、余割的定义

(1) 设 α 是一个任意角，在 α 的终边上任取(异于原点的)一点 $P(x,y)$，则 P 与原点的距离 $r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0$(如图 0.2).

(2) 比值 $\frac{y}{r}$ 叫作 α 的正弦，记作 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

比值 $\frac{x}{r}$ 叫作 α 的余弦，记作 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

比值 $\frac{y}{x}$ 叫作 α 的正切，记作 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$；

比值 $\frac{x}{y}$ 叫作 α 的余切，记作 $\cot\alpha=\frac{x}{y}$；

比值 $\frac{r}{x}$ 叫作 α 的正割，记作 $\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{1}{\cos\alpha}$；

比值 $\frac{r}{y}$ 叫作 α 的余割，记作 $\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{1}{\sin\alpha}$.

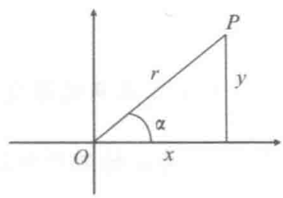


图 0.2

以上六种函数统称为三角函数.

2. 三角函数的定义域、值域

函数	定义域	值域
$y=\sin\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$y=\cos\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$y=\tan\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$

3. 特殊角的三角函数

角度 / 函数	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$y=\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

续表

角度 函数	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$y=\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$y=\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3.3 同角三角函数的关系

1. 公式

(1) 倒数关系：$\begin{cases}\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1\\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;\\ \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\end{cases}$

(2) 商数关系：$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$；

(3) 平方关系：$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha.\\ 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha\end{cases}$

2. 二倍角的正弦、余弦

(1) $\sin2x=2\sin x\cos x$.

(2) $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$.

可推导出：$1-\cos2x=2\sin^2x$，$1+\cos2x=2\cos^2x$，$\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$，

$\cos^2x=\dfrac{1+\cos2x}{2}$.

3.4 反三角函数

定义 1 正弦函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数称为反正弦函数，记作 $x=\arcsin y$，习惯记作 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

若 $x=a\in[-1,1]$，有 $y=\arcsin a$，这里的"arcsin"表示一个角.这个角的正弦值是 a，即 $\sin(\arcsin a)=a$ $(a\in[-1,1])$.如：因为 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以 $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. 又如：因为 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

定义 2 余弦函数 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 的反函数叫反余弦函数，记作 $x=\arccos y$，习惯记作 $y=\arccos x$ $x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$.如：因为 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.又如：因为 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，所以 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

例 1 求下列各式的值：

(1) $\arcsin 0$；(2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$；(3) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$；(4) $\arccos 0$；(5) $\arccos 1$.

解 (1) 因为 $\sin 0=0$，所以 $\arcsin 0=0$；

(2) 因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，所以 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$；

(3) 因为 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$；

(4) 因为 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，所以 $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$；

(5) 因为 $\cos 0=1$，所以 $\arccos 1=0$.

定义 3 正切函数 $y=\tan x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫反正切函数，记作 $x=\arctan y$，习惯记作 $y=\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

定义 4 余切函数 $y=\cot x(x\in(0,\pi))$ 的反函数叫反余切函数，记作 $x=\operatorname{arccot}y$，习惯记作 $y=\operatorname{arccot}x,x\in\mathbf{R},y\in(0,\pi)$.

例 2 求下列各式的值：

(1) $\arctan\sqrt{3}$；(2) $\arctan 1$；(3) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

解 (1) 因为 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，所以 $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$；

(2) 因为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$；

(3) 因为 $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

习题

1. 已知角 α 的终边过点 $(1,\sqrt{3})$，求 α 的六个三角函数值.

2. 计算：$\sin 315°-\sin(-480°)+\cos(-330°)$.

3. 求下列反三角函数的值：

(1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；　　(2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；　　(4) $\arctan(-1)$；

(5) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$.

第一章　函数、极限与连续

函数是微积分的基础知识;极限是微积分的重要工具,如导数和定积分都是通过极限定义.本章将在中学数学的基础上进一步对函数进行探究,理解函数的性质和连续函数等,同时探讨极限的概念及计算方法.

1.1　函数

1.1.1　基本初等函数

把常数函数 $y=c$(c 为常数),幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数),指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数),对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数),6 个三角函数和 4 个反三角函数统称为基本初等函数.

注:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数随着常数 c、α 和 a 的取值不同,可以得到无穷多的基本初等函数.

1.1.2　复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是复合函数,u 称为中间变量.

通常,用字母 u,v,w,s,t 等表示复合函数的中间变量.

注:(1) 函数 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 的值域要有非空交集.

(2) 复合函数分解出来的函数是基本初等函数或基本初等函数与基本初等函数四则运算所得到的函数.

例 1　将下列各题中的 y 表示为 x 的函数.

(1) $y=e^u, u=\cos x$；(2) $y=\ln u, u=-2x^2-3$.

解　(1) $y=e^{\cos x}$.

(2) 函数 $y=\ln u$ 定义域为 $u>0$，函数 $u=-2x^2-3$ 值域为 $u\leqslant -3$.无交集，所以，不能复合成一个函数.

例 2　分解下列复合函数.

(1) $y=e^{-2x}$；(2) $y=5\ln^3\sqrt{2x}-3x$；(3) $y=\sin^3[\cos 2(x-1)]+2\sqrt{x-1}$.

解　(1) $y=e^u, u=-2x$；

(2) $y=5u^3-3x, u=\ln v, v=\sqrt{w}, w=2x$；

(3) $y=u^3+2\sqrt{v}, u=\sin w, v=x-1, w=\cos t, t=2(x-1)$.

1.1.3　初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或经过有限次复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

注：分段函数不是初等函数.

但有的分段函数也可以用一个解析式表示，例如 $y=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x\leqslant 0 \end{cases}$ 可表示为 $y=|x|$，或表示为 $y=\sqrt{x^2}$，因此，它是初等函数.又例如，$y=e^{-2x}-\sin 3x$，$y=x\cdot\ln^2 x$，$y=2\tan x-\arctan\dfrac{1}{x}$ 等都是初等函数.

不难发现，我们过去所见过的函数除了分段函数，一般都是初等函数.

1.1.4　函数的定义域

函数自变量 x 的取值范围称为函数的定义域.

函数定义域的确定方法：

(1) 分式函数的分母不为 0；

(2) 开偶次根式里的式子要大于或等于 0；

(3) 对数函数的真数要大于 0；

(4) 反正弦和反余弦函数：$-1\leqslant x\leqslant 1$.

例 3　求下列函数的定义域.

(1) 求 $y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解　由题意得 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \ln x\neq 0\\ x>0\end{cases}$，$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\\ x>0\end{cases}$，所以 $x\in(0,1)\cup(1,2]$.

(2) 求函数 $f(x)=\dfrac{\arccos(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}}$ 的定义域.

解　由题意得 $\begin{cases}-1\leqslant x-1\leqslant 1\\ x-1\neq 0\end{cases}$，$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\end{cases}$，所以 $x\in[0,1)\cup(1,2]$.

1.1.5　函数求值

例 4　已知 $f(x)=\begin{cases}-1, x<-2,\\ 0, -2\leqslant x<2,\\ 1, x\geqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(f(2))$.

解　由题意得 $f(2)=1, f(f(2))=f(1)=0$.

习题 1.1

一、求定义域

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln(2-x)$ 的定义域为(　　).

A. $\{x\mid x<2\}$　　B. $\{x\mid x>1$ 且 $x\neq 2\}$

C. $\{x \mid 1 < x < 2\}$　　D. $\{x \mid x > 1\}$

2. 设 $f(x) = 2\ln(1+2x)$，则 $f(x)$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty, +\infty)$　　B. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$　　D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

3. 函数 $f(x) = \frac{1}{2-x} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域是(　　).

A. $[-2,2]$　　B. $(-2,2]$　　C. $[-2,2)$　　D. $(-2,2)$

二、求值

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$，求 $f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(-1)$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$，求 $f\{f[f(-2)]\}$.

三、下列函数由哪些函数复合而成

1. $y = \sin^3(2\ln x)$；　　2. $y = \sqrt{e^{5x} + 1}$；

3. $y = \ln[\cot(2x+5)]$；　　4. $y = \arccos(e^x + 1)^5$.