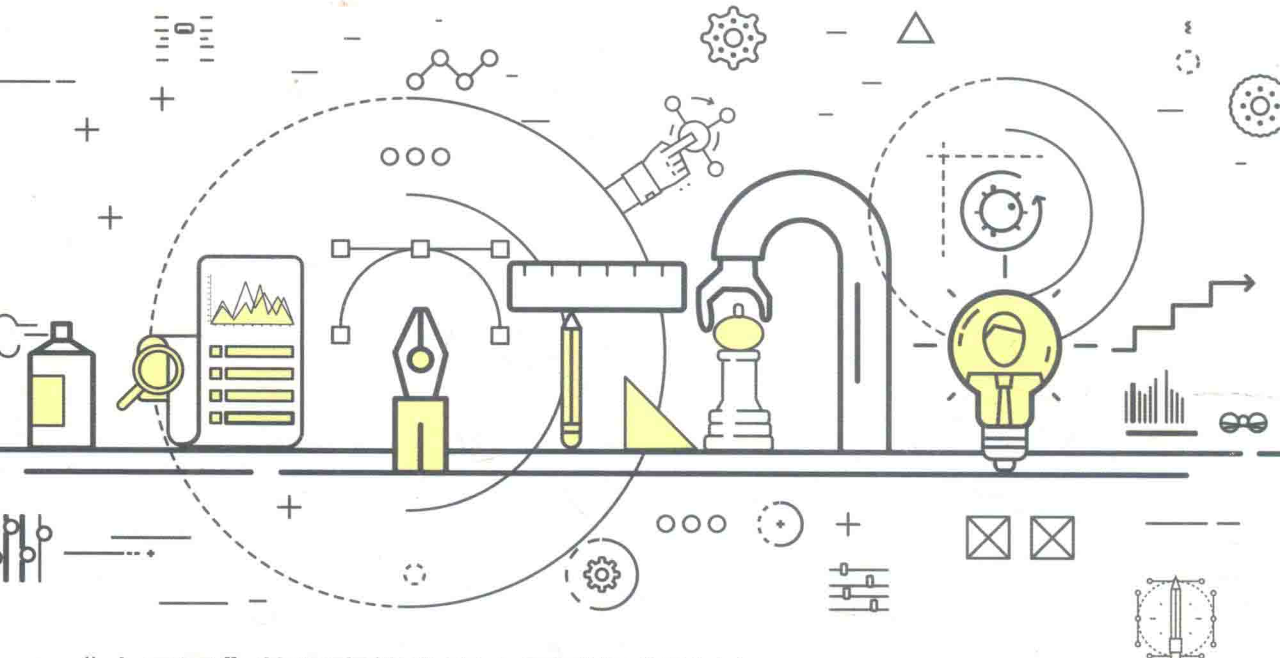


"十三五"普通高等教育应用型规划教材

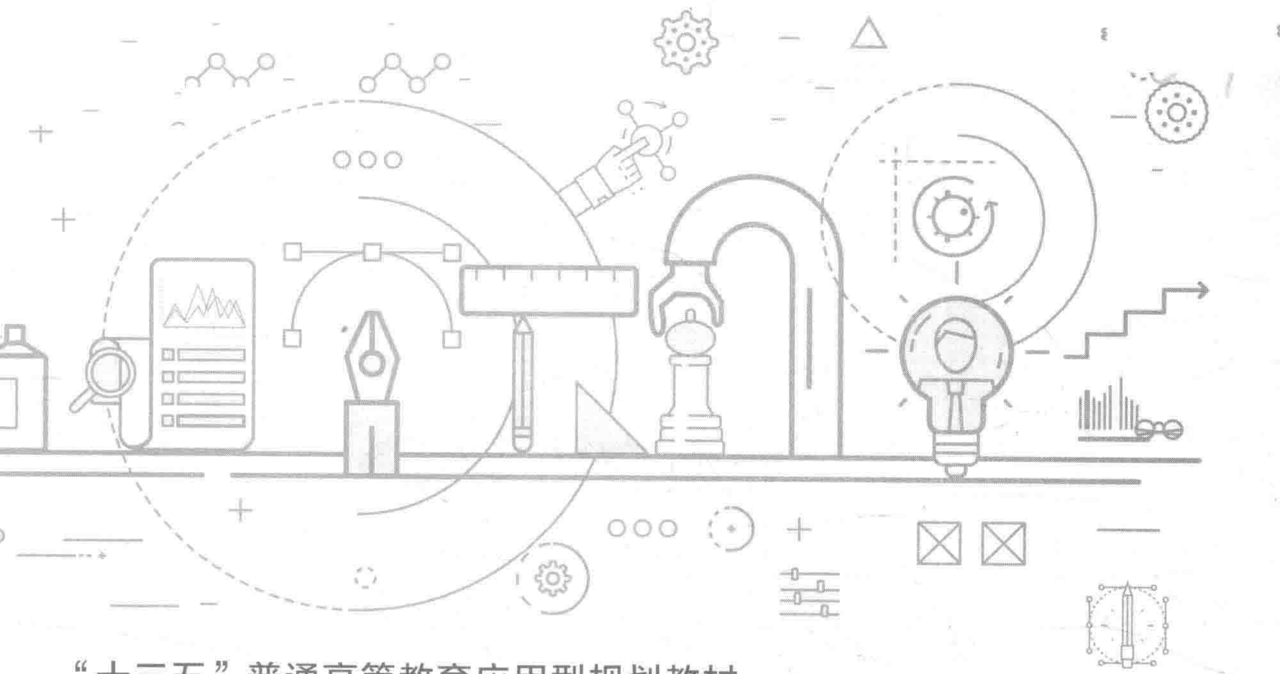
Linear Algebra

线性代数

刘 强　孙 阳　郭文英　陈江荣　编著

国人民大学出版社

扫码下资源



“十三五”普通高等教育应用型规划教材

Linear Algebra

线性代数

刘强　孙阳　郭文英　陈江荣　编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/刘强等编著. —北京：中国人民大学出版社，2018. 9
“十三五”普通高等教育应用型规划教材
ISBN 978-7-300-26066-2

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 186270 号

“十三五”普通高等教育应用型规划教材
线性代数
刘　强　孙　阳　郭文英　陈江荣　编著
Xianxing Daishu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www. crup. com. cn		
	http://www. ttrnet. com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	版　　次	2018 年 9 月第 1 版
印　　张	13. 25	印　　次	2018 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	306 000	定　　价	32. 00 元

内容摘要

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求、结合地方财经类专业需求特点进行编写的．按照“专业适用，内容够用，学生适用”的总体要求，量身定制课程内容，突出经济数学的“经济”特色．内容编排尽量做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用．

全书共分 6 章，前 5 章涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等内容．为开拓学生的学习视野、增强实践应用能力，本书在第六章介绍了 R 语言及其在线性代数中的应用．为了便于读者学习，每节后均附有习题，每章后均附有总复习题，书末附有答案．

本书既可以作为普通高等学校经管类本科生学习线性代数的教材，也可以作为教师的教学参考用书和全国硕士研究生统一入学考试的复习用书．

前　言

数学是一门工具，更是一种思维方式．学习数学有助于我们培养发现问题、分析问题、解决问题的能力．财经类专业与数学联系密切，大学数学在财经类专业人才培养中的作用日益凸显，在应用复合型人才的综合素养培养方面发挥着重要作用．当前，在地方财经类院校，大学数学已经成为本科教育的必修课程．财经类院校大学数学主要包括三大类课程，即微积分、线性代数和概率论与数理统计，当然还有一些其他衍生课程，例如数学史与数学文化、数学软件与应用、数学实验等．

2009 年以来，在北京市和学校相关部门的大力支持下，首都经济贸易大学数学公共基础课的教学改革一直在如火如荼地进行，数学公共基础课教学团队从全国地方财经类专业的数学需求出发，结合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求，对课程管理与队伍建设、数学理念、教学大纲与课程内容、考核方式、教学模式与教学手段、教学研究、学科竞赛等方面进行了全方位改革，涉及面广，内容深刻，力度很大，效果很好．在此基础上，我们对原有讲义进行了系统的整理、修订，编写了“十三五”普通高等教育应用型规划教材，该系列教材主要包括微积分、线性代数和概率论与数理统计三门课程的教材，以及相应的同步练习和深化训练辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的总主编．

编写组曾经在北京、山东、江苏等省市的部分高校进行调研，很多学生在学习的过程中，对于一些重要的数学思想、数学方法难以把握，许多高校数学公共课期末考试不及格的现象普遍存在，这一方面说明了当前大学数学教学改革的紧迫性，另一方面说明了教材编写的合理定位的重要性．从规划教材的定位来看，本系列教材主要适用于地方财经类院校的教学．在教材的编写过程中，在保持数学体系严谨的前提下，尽量简明通俗、形象化，强调数学思想的学习与培养，淡化理论与方法的证明，注重经济学案例的使用，强调经济问题的应用，体现出经济数学的“经济”特色．

本书为《线性代数》分册，内容体系在根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委

员会的总体要求的基础上，结合地方财经类专业特点进行系统设计，尽可能做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用. 全书共分为 6 章，其中前 3 章主要围绕线性方程组的求解展开，介绍了行列式、矩阵、线性方程组的概念、性质及其应用；第四章介绍了矩阵的特征值、特征向量、矩阵的对角化、实对称矩阵的相似对角化等问题；第五章讨论了二次型的概念及其标准化问题；值得一提的是，第六章介绍了 R 语言及其在线性代数中的应用，该部分为选学内容，有助于开拓学生的学习视野、提高学习兴趣、增强实践应用能力.

为了便于学生学习和教师布置课后作业，配套习题将按节设计，每章后均附有总复习题，书末附有习题答案. 同时为了便于读者学习，选学内容和有一定难度的内容将用“*”号标出.

在系列教材的编写过程中，得到了北京航空航天大学的韩立岩教授、清华大学的邓邦明教授、北京工商大学的曹显兵教授、北京工业大学的薛留根教授、对外经济贸易大学的刘立新教授、北方工业大学的刘喜波教授、山东财经大学的安起光教授、中央财经大学的贾尚晖教授、重庆工商大学的陈义安教授、北京信息科技大学的侯吉成教授、北京联合大学的邢春峰教授、昆明理工大学的吴刘仓教授、江苏师范大学的赵鹏教授、北京化工大学的李志强副教授，以及首都经济贸易大学的马立平教授、张宝学教授、任韬副教授等同事的大力支持，中国人民大学出版社的策划编辑李丽娜女士为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢.

编写组教师均长期工作在大学数学教学的第一线，积累了丰富的教学经验，深谙当前本科教学的教育规律，熟悉学生的学习习惯、认知水平和认知能力，在教学改革中取得了一些成绩，出版过包括同步训练、深化训练、考研辅导以及大学生数学竞赛等多个层次的教材和辅导用书. 然而此次规划教材的编写又是一次新的尝试，书中难免存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行们不吝指正，欢迎来函：cuebliuqiang@163.com.

作者

2018 年 6 月

目　　录

第一章　行列式

行列式符号最早是在 1683 年和 1693 年分别由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨提出的，并且他们将其应用在线性方程组的求解问题中. 行列式最早只是一种速记的表达方式，表示将一些数字按特定的规则计算得到的数. 在很长一段时间内，行列式只是作为求解线性方程组的一种工具. 1750 年，瑞士数学家克莱姆对行列式的定义和展开法则进行了比较完整、明确的阐述，并给出了求解线性方程组的克莱姆法则. 目前，行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面都有着重要的应用.

1.1　二阶与三阶行列式

行列式的概念源于线性方程组的求解问题，它是从线性方程组的解的公式中引出来的. 下面首先讨论解方程组的问题.

用消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1.1.1}$$

可以得到，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

式（1.1.2）给出了方程组（1.1.1）的解与变元的系数、常数项之间的关系. 为了更好地表述这种关系，引入二阶行列式的概念.

定义 1.1.1　用符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为**二阶行列式**，其中数 a_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2）称为行列式的**元素**. a_{ij} 下标中的 i 称为**行标**，j 称为**列标**. 在行列式中约定横排称为**行**，纵排称为**列**，并且行和列分别按从上到下、从左到右的顺序计数. 显然二阶行列式由两行两列元素构成.

如果按图 1－1 对行列式中的元素连线

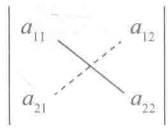


图 1－1

可以看到二阶行列式和它所表示的量之间的关系，即二阶行列式等于实线连接元素的乘积减虚线连接元素的乘积.

应用二阶行列式的定义，方程组（1.1.1）有唯一解的条件可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

解可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.3}$$

对比行列式的元素与方程组中系数及常数项可以看到，行列式符号的引入使得结论式（1.1.2)的记忆和使用更加便利.

上述讨论对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

可以类似进行. 下面引入三阶行列式的概念.

定义 1.1.2 用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**.

按图 1-2 对行列式中的元素连线，可见三阶行列式等于每条线上三个元素乘积的代数和，其中实线连接的项带正号，虚线连接的项带负号.

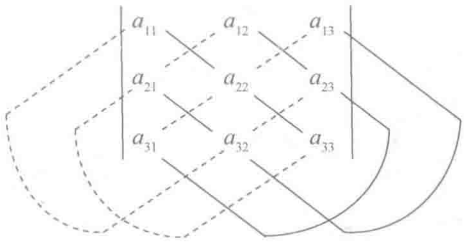


图 1-2

若令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组（1.1.4）的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.5}$$

例 1.1.1 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解 由三阶行列式的定义有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times1\times3-1\times(-4)\times5-2\times3\times2 \\ &= 30+2-24-6+20-12=10.\end{aligned}$$

例 1.1.2 已知 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，求常数 a，b 的值（其中 a，b 均为实数）.

解 由三阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2=0,$$

又因为 a，b 均为实数，因此 $a=b=0$.

例 1.1.3 解三元一次方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$.

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28\neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 而

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} -2t & 1-t^2 \\ 1-t^2 & 2t \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & b & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+y & y \\ x & y & x+y \end{vmatrix}$.

3. 证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

4. 求下列行列式中的 x 值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x \end{vmatrix}=-27$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix}\neq 0$.

1.2 n 阶行列式

1.1 节介绍了二阶、三阶行列式的概念，本节将行列式的概念推广到 n 阶的情形.

1.2.1 排列与逆序

由定义 1.1.2 可以看出，三阶行列式表示的是一些项的代数和，这些项是所有位于行列式中不同行、不同列的元素的乘积（共 $3!=6$ 项），且每一项都带有正号或负号，所带符号的原则或规律是什么？为此先介绍排列的知识.

定义 1.2.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**.

例如，3412 是一个 4 级排列，14523 是一个 5 级排列.

n 级排列共有 $n!$ 个，其中排列 $12\cdots n$ 称为**自然序排列**.

定义 1.2.2 比较排列中的两个数，如果排在前面的数比排在后面的数大，那么称这两个数构成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$. 显然，自然序排列的逆序数为 0.

例 1.2.1 求 $N(35241)$.

解 由题可知，3 与其后面的数 2，1 构成两个逆序；5 与其后面的数 2，4，1 构成三个逆序；2 与其后面的数 1 构成一个逆序；4 与其后面的数 1 构成一个逆序；1 的后面没有元素，逆序个数记为零. 这个分析过程可以更简捷地写成

排列	3	5	2	4	1
与后面元素比较	↓	↓	↓	↓	↓
构成的逆序数	2	3	1	1	0

故

$$N(35241)=2+3+1+1+0=7.$$

定义 1.2.3 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**；逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.2.2 已知 7 级排列 $214i5k6$ 是奇排列，试确定 i,k 的值.

解 由于 $214i5k6$ 为一个 7 级排列，则 i,k 的可能取值为 3，7 或 7，3. 当 $i=3$，$k=7$ 时

$$N(2143576)=1+0+1+0+0+1+0=3,$$

此时排列为奇排列. 当 $i=7$，$k=3$ 时，

$$N(2147536)=1+0+1+3+1+0+0=6,$$

此时排列为偶排列，故取 $i=3$，$k=7$.

1.2.2 n 阶行列式的概念

从三阶行列式的定义中可以看出，当项中元素的行标按自然序排列时，若列标为奇排

列，则前面带负号，若列标为偶排列，则前面带正号．因此，可将三阶行列式的定义写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

受此启发，给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.2.4 符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2.1}$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，式（1.2.1）称为行列式的**项**，其按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，该项带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，该项带负号．这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.2.2}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2.3}$$

为行列式的**一般项**．n 阶行列式也可简记为 $D=|a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$．

注 一阶行列式 $|a|=a$．

例 1.2.3 写出 $D=|a_{ij}|_4$ 中含有因子 $a_{11}a_{34}$ 的项及应带的符号．

解 由行列式的定义，项中的因子为来自行列式的不同行、不同列的元素，故含有 $a_{11}a_{34}$ 的项有 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 及 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，其中 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 列标的逆序数 $N(1243)=1$，故前面带负号，而 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 列标的逆序数 $N(1342)=2$，故前面带正号．

例 1.2.4 计算下三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$．

解 考察可能不为零的项．第 1 行只能选取 a_{11}；第 2 行中虽然可取不为零的元素 a_{21} 和 a_{22}，但是因为 a_{21} 与 a_{11} 在同一列，从而第 2 行只能选取 a_{22}；依次选取下去，直至第 n 行，得到可能不为零的项只有

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

因此，由行列式的定义有

$$D=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注 类似地，上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.2.5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 讨论的方法与例 1.2.4 类似，可以得到可能不为零的项只有

$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，

按行列式的定义有

$$D=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

注 类似地，

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.2.3 对换

定义 1.2.5 在一个排列中互换两个数的位置，其余的数保持不动，就得到另一个同级排列，这样的变换称为**对换**.

例如，在排列 3412 中对换 3，1 得到排列 1432.

关于对换和排列的奇偶性有如下性质：

定理 1.2.1 经一次对换后排列的奇偶性发生改变.

证 当对换的两个数 i，j 相邻时，设排列

$$\cdots ij \cdots$$

经对换变为

$$\cdots ji \cdots.$$

由逆序数的计算可知，两个排列中逆序的计数只在 i，j 上有所变化. 若原排列中 i，j 不构成逆序，则对换后 i 的逆序计数不变，j 的逆序计数会增加 1，从而逆序数会增加 1；若原排列中 i，j 构成逆序，则对换后 i 的逆序计数减少 1，j 的逆序计数不变，从而逆序数会减少 1. 不管怎样，排列的奇偶都改变了.

当对换的两个数 i，j 不相邻时，设排列

$$\cdots i l_1 l_2 \cdots l_s j \cdots \tag{1.3.1}$$

经对换变为

$$\cdots j l_1 l_2 \cdots l_s i \cdots. \tag{1.3.2}$$

该对换可由一系列相邻对换实现：先将式（1.3.1）中的 i 用 s 次相邻对换交换到 j 前，得到排列

$$\cdots l_1 l_2 \cdots l_s i j \cdots,$$

再将 j 用 $s+1$ 次相邻对换交换到 l_1 前，得到排列式（1.3.2). 这样总共进行了 $2s+1$（奇数）次相邻对换，而每进行一次相邻对换，奇偶性就要改变，故非相邻的对换也改变排列的奇偶性.

推论 1.2.1 任意一个 n 级排列可经一系列对换变为自然序排列，并且所作对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

证 设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为一个 n 级排列，若 $j_1=1$，则第一个数满足自然序排列的要求，否则必有某个 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $j_k=1$，将 j_1，j_k 对换，得到排列 $1 j_2^1 \cdots j_n^1$. 若 $j_2^1=2$，则这个新排列的第二个数也满足自然序的要求，否则必有某个 $s(3\leqslant s\leqslant n)$ 使得 $j_s^1=2$，将 j_2^1，j_s^1 对换，得到排列 $12 j_3^2 \cdots j_n^2$，依此类推，排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 总可经一系列对换变为排列 $12\cdots n$，即自然序排列.

再由定理 1.2.1 可知，对换的次数与排列的奇偶性改变的次数相同，而自然序排列为偶排列，故命题成立.

推论 1.2.2 全部 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证 全部 n 级排列共有 $n!$ 个，设其中的奇排列为 p 个，偶排列为 q 个，则 $p+q=n!$. 再对 p 个奇排列的前两个数进行对换，会得到 p 个不同的偶排列，从而 $p\leqslant q$，类似地有 $q\leqslant p$，故 $p=q$，因此 $p=q=\frac{n!}{2}$.

定理 1.2.2 n 阶行列式

$$|a_{ij}|_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

证 由乘法交换律，将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的元素交换成行标按自然序排列的形式，记为

$$a_{1\bar{j}_1}a_{2\bar{j}_2}\cdots a_{n\bar{j}_n}.$$

注意到每次交换两个元素，行标与列标的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都会发生一次对换，故 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 各发生一次奇偶性的改变，从而 $N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不变，因此有

$$\begin{aligned}&\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\=&\sum_{\bar{j}_1\bar{j}_2\cdots\bar{j}_n}(-1)^{N(12\cdots n)+N(\bar{j}_1\bar{j}_2\cdots\bar{j}_n)}a_{1\bar{j}_1}a_{2\bar{j}_2}\cdots a_{n\bar{j}_n}\\=&\sum_{\bar{j}_1\bar{j}_2\cdots\bar{j}_n}(-1)^{N(\bar{j}_1\bar{j}_2\cdots\bar{j}_n)}a_{1\bar{j}_1}a_{2\bar{j}_2}\cdots a_{n\bar{j}_n}=|a_{ij}|_n.\end{aligned}$$

推论 1.2.3 n 阶行列式

$$|a_{ij}|_n=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 1.2.6 在行列式 $|a_{ij}|_5$ 中，项 $a_{12}a_{35}a_{54}a_{23}a_{41}$ 应带什么符号？

解法 1 由于

$$a_{12}a_{35}a_{54}a_{23}a_{41}=a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54},$$

并且 $N(23514)=4$，按定义 1.2.4，这一项前带正号.

解法 2 由于

$$N(13524)+N(25431)=3+7=10,$$

按定理 1.2.2，这一项前带正号.

习题 1.2

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 4231； (2) 1324； (3) 123654； (4) $n(n-1)\cdots 21$；

(5) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$； (6) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

2. 设 9 级排列 $1274i56k9$ 是奇排列，试确定 i，k 的取值.

3. 求 5 阶行列式 $|a_{ij}|_5$ 中含有因子 $a_{13}a_{32}a_{51}$ 的项.

4. 求 6 阶行列式 $|a_{ij}|_6$ 中下列项应带的符号：

(1) $a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}a_{66}$； (2) $a_{52}a_{15}a_{34}a_{43}a_{21}a_{66}$.

5. 设在行列式 $|a_{ij}|_5$ 中项 $a_{2k}a_{12}a_{31}a_{4l}a_{53}$ 带负号，试确定 k，l 的取值.

6. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&2&2&0\\0&3&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix}0&y&0&x\\x&0&y&0\\0&x&0&y\\y&0&x&0\end{vmatrix}$；