经济数学

Economic Mathematics

主编◎何　鹏

合肥工業大學出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

本书获得江西科技师范大学教材出版基金资助

经济数学

何　鹏　主编

合肥工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/何鹏主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2018.4
ISBN 978-7-5650-3853-2

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①何…　Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材　Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 050704 号

经 济 数 学

何　鹏　主编　　　　责任编辑　李娇娇

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2018 年 4 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2018 年 4 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	艺术编辑部：0551-62903120	印　张	19.75
	市场营销部：0551-62903163	字　数	460 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	hfutpress@163.com	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-3853-2　　　　定价：42.00 元

内容简介

本书是在分析、总结、吸收高等职业院校经济管理类高等数学课程教学改革的经验基础上编写完成的。

本书内容分三个模块(即一元函数微积分学、线性代数、概率论与数理统计初步),共十一个项目。第一个模块为一元函数微积分学,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用等五个项目;第二个模块为线性代数,内容包括行列式、矩阵、线性方程组等三个项目;第三个模块为概率论与数理统计初步,内容包括随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步等三个项目。本书在项目下面又设置了若干教学任务,每个任务都安排了学习目标、工作任务、相关知识、相关实践等内容。本书根据经济管理专业教学的特点优选了教学内容,注重循序渐进的教学原则,精心配置了每个任务的例题、思考与练习题,因此不但便于教师教学,而且也有利于学生对有关知识点进行掌握和巩固。

本书适用于高等职业院校经济管理类专业、成人高等学校各专业经济数学的教学,也可供经济管理人员参考。

前　言

本书采用项目式教材体例进行编写。编者根据当前经济管理类专业数学课程的教学要求，在总结多年的教学经验的基础上编写了这本教材。在教材的编写过程中，结合了教学和教改中的成功经验的基础上，充分考虑了经济管理类专业课程的专业特点，充分体现了“以应用为目的、以必须够用为度”的教学基本原则。在课程结构设计上和教学内容安排上，力求符合经济管理类专业学生的知识需求和接受能力；力求体现数学在经济管理类专业中的应用；力求用通俗易懂的语言，深入浅出地阐述数学的基本原理，减少烦琐的数学推理；力求表现解决问题的基本步骤，体现条理化的解决问题的思路；力求在淡化理论的同时，突出数学应用技能的训练和培养，通过对基本问题的反复训练，促进学生对基本问的题解决方法的掌握。

本书内容分三个模块（即一元函数微积分学、线性代数、概率论与数理统计初步），共十一个项目。第一个模块为一元函数微积分学，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用等五个项目；第二个模块为线性代数，内容包括行列式、矩阵、线性方程组等三个项目；第三个模块为概率论与数理统计初步，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步等三个项目。本书在项目下面又设置了若干教学任务，每个任务都安排了学习目标、工作任务、相关知识、相关实践等内容。

本书由江西科技师范大学何鹏主编。在编写过程中参考了大量相关的教材及其他资料，本书也获得江西科技师范大学教材出版基金资助，在此向出版单位和资助单位表示衷心的感谢。虽然我们力求编写一本优秀教材，但限于水平和时间，不妥和疏漏之处在所难免，恳请读者不吝赐教。

编　者

2018 年 3 月

目　录

模块一　一元函数微积分学

模块二 线性代数

模块三 概率论与数理统计初步

模块一

一元函数微积分学

本模块主要讨论一元函数微积分，它以函数为研究对象；研究函数变化的基本方法是极限方法；导数概念是微积分的重要概念，它是学习一元函数微积分的基础。

项目1　函数、极限与连续

本项目主要有函数、极限的概念、极限的运算和函数的连续性四个任务.

任务1　函　数

【学习目标】

了解并掌握函数的概念、性质及几类重要函数.

【工作任务】

(1) 理解函数的概念,掌握函数概念的两要素,能正确确定函数的定义域,理解函数符号 $f(x)$ 的含义.

(2) 掌握函数的四种特性和几何意义,反函数的概念和几何意义,分段函数的概念和求值的方法.

(3) 熟悉六类基本初等函数的性质和图像,复合函数和初等函数的概念.

(4) 掌握常用经济函数的意义.

【相关知识】

初等数学中研究的对象基本上是不变的量,通常称为常量,而微积分则以变量为主要研究对象.函数关系就是变量之间的对应关系,是微积分中的基本概念.

一、函数的概念

1. 常数与变量

在日常生活、生产活动和工程技术中,经常遇到各种不同的量.例如:体重、气温、产量、收入成本等.这些量可以分为两类,一类量在考察的过程中不发生变化,只取一个固定的值,我们称它为常量.例如,圆周率 π 是个永远不变的量,某商品的价格在一段时间内保持不变,这些量都是常量.另一些量在所考察的过程中是变化的,可以取不同的数值,我们称它为变量.例如,一天中的气温,生产过程中的产量,都是在不断变化的,它们都是变量.常量通常用字母 a,b,c 等表示,而变量通常用字母 x,y,z,t 等表示.

2. 函数的概念

在某个变化过程中,往往出现多个变量,这些变量不是彼此孤立的,而是相互

影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化，如果这些影响是依据某一规律的，那么我们就说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为 4000 元，每生产一件产品，成本增加 50 元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系为 $y=50x+4000$，当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1 设 x、y 是两个变量，D 是一个非空的数集. 如果当变量 x 在 D 内任取一数值时，变量 y 按照某种对应法则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的**函数**，记作 $y=f(x), x \in D$，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**.

当自变量 x 在 D 内取定一数值 x_0，因变量 y 有一确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，当 x 取遍定义域 D 内的所有数值时，对应的全体函数值所组成的集合

$$Z=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**. 平面直角坐标系中的点集 $\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的**图像**.

有时为了叙述方便，习惯上也常用 $f(x)$ 来表示函数，函数的记号 f 也可用其他符号代替，如 g, φ, F 等，相应地，函数记作 $y=g(x), y=\varphi(x), y=F(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$，这时字母 y 既表示因变量，又表示函数.

函数的表示法通常有三种：公式法（或解析法）、图像法和表格法，它们分别用公式、函数的图像和表格来表示函数，三种表示法各有所长.

构成函数的两要素分别为函数的定义域 D 和对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 例如，$y=\dfrac{1}{1+x}$ 和 $y=\dfrac{x}{x(1+x)}$ 是两个不同的函数，因为它们的定义域不同.

研究任何函数都要首先考虑其定义域，函数的定义域是使其有意义的一切实数组成的集合. 有一点需要注意，在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义决定. 例如，销售某种商品，其单价为 2 元 / 件，则销售收入 R 与销售量 q 的函数关系为 $R=2q$，这可以看作 R 为因变量、q 为自变量的函数，注意这个函数的定义域为正整数集.

求函数定义域时，一般需要考虑以下几个方面：

(1) 分式分母不能为零；

(2) 开偶次方时，被开方部分非负；

(3) 指数函数和对数函数中，底数大于零且不等于 1，对数函数真数部分大于零；

(4) 含反三角函数的 $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，要满足 $|x| \leqslant 1$.

若函数同时含有以上几种情况，则取其交集.

把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 需要注意的是，分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，函数 y 只能有唯一的值与之对应. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subseteq D$. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对一切 $x \in X$ 均成立，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 从函数图像来看，函数 $y=f(x)$ 的图像全部在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间；如果不存在这样的 M，也就是说，对于任意正数 M，总存在 $x_0 \in X$，使得

$$|f(x_0)| > M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 从函数图像来看，就是找不到一对关于 x 轴对称的平行直线，使函数 $y=f(x)$ 的图像全部落入两平行线之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对一切 $x \in (-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x| \leqslant 1$ 成立. 函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界，因为对任意正数 M，总存在 $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $|\tan x_0| > M$.

需要注意的是，函数有界性与定义区间密切相关. 例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(1,2)$ 上有界，因为 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对一切 $x \in (1,2)$ 成立. 但它在区间$(0,1)$ 上无界，因为对任意正数 M，总可取到

$$x_0 \in (0,1) \text{ 且 } x_0 < \frac{1}{M}, \text{于是} \left|\frac{1}{x_0}\right| > M$$

2. 函数的单调性

设 $a<b$，称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$. 类似地有，$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为**半开区间**，其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的**端点**，$b-a$ 称为区间的**长度**.

上述四类区间都是有限区间. 从数轴上看，有限区间就是它的区间长度为有限值，与有限区间相对应的是所谓的**无限区间**，主要包括：

$$(-\infty,a]=\{x \mid -\infty<x \leqslant a\}, (-\infty,a)=\{x \mid -\infty<x<a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}, (a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

其中 a 为一实数，$-\infty$ 和 $+\infty$ 为两个记号，分别读作**负无穷**和**正无穷**.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的.

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的.

关于函数单调性的判别方法我们将在后面的章节专门介绍.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$，则 $-x \in D$)，如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数，$y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数，$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任意 $x \in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称其为**周期函数**. T 为函数的**周期**，通常我们说到周期函数的周期 T 指的是它的最小正周期，周期函数在其定义域内每个长度为 T 的区间上，函数的图像有相同的形状.

例如，函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $\tan x$ 和 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了两变量之间的对应关系. 当自变量 x 在函数的定义域 D 内取定一个值时，因变量 y 便在值域 Z 内有唯一确定的值与之对应. 有时这种对应会出现这样的情况：当自变量 x 在定义域 D 内取定任意两个不同的值，因变量 y 便在值域 Z 内有两个不同的确定的值与它们对应. 即任意 $x_1, x_2 \in D$，$x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 这时对值域内每一值，便在定义域内有唯一确定的值与之对应，从而可以构成一个新的函数，这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 严格定义之，如下：

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D，值域是数集 Z. 若对每一个 $y \in Z$，都有唯一的 $x \in D$ 满足关系 $f(x)=y$，那么就把此 x 值作为取定的 y 值的对应值，从而得到一个定义在 Z 上的新函数. 这个新函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 这个函数的定义域为 Z，值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来

的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

我们可以用示意图(图 1-1-1)形象地表示直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的关系.

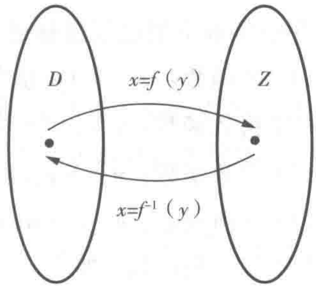

图 1-1-1　直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的关系

由反函数的定义可以看出,反函数的自变量 y 是直接函数的因变量,而反函数的因变量 x 是直接函数的自变量. 因为习惯上我们用 x 来表示自变量,用 y 来表示因变量,因此常常对调反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y,把它改写为 $y=f^{-1}(x)$. 这时,直接函数与反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称. 今后提到反函数,一般指经过改写后的反函数.

四、复合函数

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,$u\in U$,而 u 是 x 的函数 $u=g(x)$,$x\in D$,且 $u=g(x)$ 的值域 Z 含在 $y=f(u)$ 的定义域之内,即 $Z\subseteq U$,则 y 通过 u 成为 x 的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**. 记作 $y=f[g(x)]$,称 x 为**自变量**,u 为**中间变量**.

对于复合函数 $y=f[g(x)]$,习惯上称 f 为**外函数**,g 为**内函数**.

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的对应法则如图 1-1-2 所示.

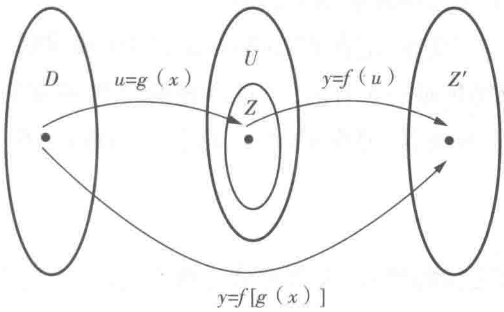

图 1-1-2　复合函数 $y=f[g(x)]$ 的对应法则

需要注意的是,函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的复合函数的条件是:函数 g 在 D 上的值域 Z 必须含在 f 的定义域 U 内,即 $Z\subseteq U$;否则,不能构成复合函数. 例如,设 $y=\arcsin u$,$u=\sqrt{1-x^2}$,则两个函数可以复合且复合函数为 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. 但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数,这是因为 $u=2+x^2$ 的值域不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

值得注意的是,如何将一个较复杂的复合函数分解为几个简单函数,是研究复合函数的重要内容.

五、初等函数

在中学数学里已经接触过下面几类函数：

(1) 幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 是实常数）；

(2) 指数函数：$y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$）；

(3) 对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0, a\neq 1$，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$）；

(4) 三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；

(5) 反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

以上五类函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数的性质、图像在中学已经学过，在后面的学习中还要经常涉及，希望同学们熟练掌握，灵活应用.

定义 4　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 显然，分段函数不是初等函数.

例如，$y=\arctan(1+x^{2})$，$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 都是初等函数. 而分段函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, x>1.\end{cases}$ 不是一个解析式子表达的，$y=1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots$ 不满足有限次运算，因此，都不是初等函数.

六、常用的经济函数

1. *总成本函数、总收入函数和总利润函数*

在生产经营活动中，成本（记作 C）、收入（记作 R）和利润（记作 L）这些经济变量都与产品的产量或销售量（x）有关. 经过合理的简化和抽象，它们都可以看作 x 的函数，分别称为总成本函数（记作 $C(x)$）、总收入函数（记作 $R(x)$）、总利润函数（记作 $L(x)$）.

(1) 总成本函数

在生产活动中所进行的投入，大致可分为两大类. 一类是在短时间内不发生变化或变化很小或不明显地随产品（商品）的产量（销售量）变化而变化，称为**固定成本**，如厂房、设备等. 另一类是随产量（销售量）变化而变化的部分，称为**可变成本**，如原材料、能源等，它随产量增加而增加. **总成本**为固定成本与可变成本之和. 它是产量（x）的单调增加函数. 最简单的总成本函数是线性函数：

$$C=a+bx$$

其中，a，b 是正的常数，$C(0)=a$ 为固定成本. 平均成本是指生产一定数量的产品，平均每单位产品的成本，记作 $\overline{C}$，即 $\overline{C}=\dfrac{C}{x}$.

(2) 总收入函数

总收入是指生产者出售一定数量的产品所得的全部收入，它是销售量（x）的

函数. 设销售价格为 p,销售量为 x,则总收入为 $R=px$.

(3) 总利润函数

利润是指收入减去成本后剩余的部分,即 $L=R-C$.

总成本等于总收入的状态称为**保本**,此时的产量(销售量)称为**保本点**或**无盈亏点**;当总收入大于总成本时称为**盈利**,当总收入小于总成本时称为**亏本**.

2. 需求函数与供给函数

需求与供给是经济活动中的主要矛盾,它们对产品的生产和销售有着重要影响.

一种产品的市场需求量 Q_d 通常受多种因素的影响,如产品价格、质量、同类产品价格、消费者的收入水平等. 如果简化问题,不考虑除价格以外的其他因素或把其他因素视为相对稳定,那么需求量可看作价格 p 的一元函数,称为**需求函数**,记作 $Q_d=f_d(p)$. 通常需求函数是价格的单调减少函数. 最简单、最常见的需求函数是线性需求函数 $Q_d=a-bp(a,b>0)$,它表明,价格为零时有最大需求量 a,而 $\frac{a}{b}$ 为最大销售价格(此时需求量为零).

产品的供给量 Q_s 也与诸多因素有关. 与前面一样,将问题简化,在一定条件下的供给量看作价格的一元函数,称为**供给函数**,记作 $Q_s=f_s(p)$. 供给函数是价格的单调增加函数. 最简单的供给函数是线性供给函数 $Q_s=-c+dp(c,d>0)$.

使产品的需求量与供给量相等的价格,称为**均衡价格**,记作 p_0,如图 1-1-3 所示.

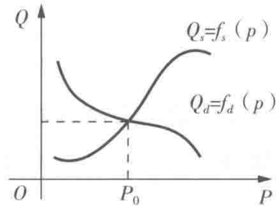

图 1-1-3　均衡价格

【相关实践】

下面我们看几个函数的例子.

例 1　求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　这是两个函数 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 与 $y_2=\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 之和的定义域,先求出每个函数的定义域,然后取其公共部分即可.

使 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 有定义,必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$,解之,得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$. 即 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$.

使 $y_2=\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 有定义,必须满足 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$,解之,得 $-3\leqslant x\leqslant 4$. 即 $y_2=\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3,4]$.

于是,所给函数的定义域为 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

例 2　常函数:$y=C$(C 为某个常数). 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为