[redacted]

闫永义　岳菊梅　著

逻辑动态系统代数状态空间法理论与应用

科学出版社

逻辑动态系统代数状态空间法
理论与应用

闫永义　岳菊梅　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了一种新的系统建模、分析与综合的数学方法——逻辑动态系统代数状态空间法。该方法是在矩阵的半张量积的基础上发展而来的，在使用矩阵处理复杂的泛逻辑系统方面具有很大优势。全书共 9 章，第 1~4 章介绍逻辑动态系统代数状态空间法；第 5~8 章为其各种应用，包括有限自动机的动态建模、性能分析、控制技术，合成有限自动机的建模与控制，受控有限自动机的代数模型及动态分析，Type-2 模糊逻辑关系方程的求解，图的结构分析，以及农业综合区道路网络规划和农业机器人路径规划中的应用等；第 9 章为本书内容的总结与后续工作展望。

本书适合系统科学、控制理论与控制工程、数学和人工智能等专业的科研人员参考，也可作为系统科学、控制理论与控制工程等相关学科高年级本科生及研究生的教学用书。

图书在版编目（CIP）数据

逻辑动态系统代数状态空间法理论与应用/闫永义，岳菊梅著. —北京：科学出版社，2018.11

ISBN 978-7-03-059698-7

Ⅰ. ①逻… Ⅱ. ①闫… ②岳… Ⅲ. ①动态逻辑–代数空间–状态空间–研究 Ⅳ. ①TP302.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 260168 号

责任编辑：朱英彪 赵晓廷 / 责任校对：张小霞
责任印制：张 伟 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 11 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018 年 11 月第一次印刷 印张：12
字数：239 000

定价：95.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

自然界中的动态行为大致可分为两类。一类遵循物理学定律或者广义物理学定律，属于物理世界范畴的连续变量动态系统，如天体的运行、电荷的做功和人口的增长等。这类行为的状态是在某种距离空间中连续变化的，其演化过程可用微分方程或者差分方程来表达，因而可以借助现有的数学理论对其进行建模、分析、控制与优化。另一类属于逻辑系统的范畴，如象棋与扑克牌游戏、基因网络的进化、军事指挥中的 C3I 系统等。这类行为的演化过程遵循的是一些逻辑规则，因而无法用传统的微分方程或者差分方程来描述其动态行为，目前还缺乏有效的分析工具。

本书基于近年发展起来的逻辑动态系统代数状态空间法，考虑到目前对逻辑动态系统的研究还缺乏有效的建模与分析工具，一方面针对一些典型的逻辑系统，如有限自动机，包括一般有限自动机、合成有限自动机和受控有限自动机，采用这种代数状态空间法对其动态行为进行建模、分析与综合；另一方面针对与逻辑系统相关而没有得到完全解决的问题，如 Type-2 模糊逻辑关系方程的求解问题、搜索图的控制集与内稳定集问题，利用这种新的逻辑系统分析与综合工具进行进一步研究。

本书的创新内容在于以下方面。其一，建立有限自动机的双线性动态行为模型；基于这种新模型，介绍有限自动机的可控性及可稳性问题，提出判断有限自动机任意状态是否可控或可稳的充分必要条件；利用该充分必要条件建立有限自动机识别正则语言的判别准则。其二，介绍合成有限自动机的建模与控制问题。建立合成有限自动机的逻辑动态模型；对于状态可控或者输出可控的合成有限自动机，提出能够设计出所有的状态控制序列和输出控制序列的算法。其三，对于在功能和结构上都扩展的一类有限自动机 —— 受控有限自动机，建立其动态行为的代数描述；基于此代数模型，讨论受控有限自动机的可达性与可控性问题，提出状态可达与可控的充分必要条件。其四，讨论 Type-2 模糊逻辑关系方程的求解问题。建立两种求解算法，一种是针对一般型 Type-2 模糊逻辑关系方程，给出其解的理论描述；另一种是求解对称值 Type-2 模糊逻辑关系方程，算法能够求出其论域上的所

有解，具有实际应用价值。其五，介绍与逻辑系统拓扑结构密切相关的图论问题，包括控制集、内稳定集及 k-内稳定集等。提出判断任意顶点子集是否为图的控制集、内稳定集及 k-内稳定集的充分必要条件；建立能够搜索出图的这些特殊结构的算法；将新结论应用到 k-轨道任务分配问题，得到该问题新的解法及一些有趣的结论。

与现有的有关结论相比，本书内容一个明显的优点是将问题表述为矩阵的代数形式，使这些问题的求解归于计算一些矩阵的半张量积，计算结果可给出所求问题的答案。总之，“数学般”地求解有关问题是本书的最大特点。

本书的主要内容先后发表在国际、国内相关学术期刊上，部分内容在不同的国际、国内会议上报告过。许多同行，特别是南开大学陈增强教授带领的团队、中国科学院数学与系统科学研究院程代展和齐洪胜研究员带领的团队、山东大学冯俊娥教授带领的团队、哈尔滨工业大学贺风华教授带领的团队、东南大学卢剑权教授带领的团队、南京师范大学朱建栋教授带领的团队、北京大学楚天广教授带领的团队、清华大学梅生伟教授带领的团队、山东师范大学李海涛教授带领的团队和浙江师范大学刘洋教授带领的团队提出了许多宝贵的建议，对此深表感谢！感谢导师南开大学陈增强教授对本人研究工作的一贯支持！

本书的出版得到国家自然科学基金委员会–河南省人民政府联合基金、河南省科技攻关计划项目 (182102210045)、河南省高等学校重点科研项目 (15A416005)、河南科技大学青年科学基金 (2015QN016) 的支持，在此一并致谢。

本书第 1~4 章及第 9 章由河南科技大学闫永义撰写，第 5~8 章由河南科技大学岳菊梅撰写。由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评、指正。

作　者

2018 年 6 月

符 号 说 明

$\mathrm{M}_{m\times n}$	$m\times n$ 实矩阵集合
A^i	矩阵 A 的第 i 行
B_j	矩阵 B 的第 j 列
$\mathrm{col}_i(A)$	矩阵 A 的第 i 列
$\mathrm{row}_i(A)$	矩阵 A 的第 i 行
$\mathrm{col}(A)$	矩阵 A 的列组成的集合
$\mathrm{row}(A)$	矩阵 A 的行组成的集合
$\mathcal{D}^k$	$\mathcal{D}^k=\left\{0,\dfrac{1}{k-1},\cdots,\dfrac{k-2}{k-1},1\right\}$
I_n	n 阶单位矩阵
δ_n^i	I_n 的第 i 列
Δ_n	$\{\delta_n^i \vert i=1,2,\cdots,n\}$
$L\in \mathrm{M}_{m\times r}$	逻辑矩阵，即 $\mathrm{col}(L)\subset\Delta_m$
$\mathcal{L}_{m\times r}$	$m\times r$ 逻辑矩阵的集合
$A\prec_t B$	矩阵 A 的列数和矩阵 B 的行数满足 $p=nt$
$A\succ_t B$	矩阵 A 的列数和矩阵 B 的行数满足 $n=pt$
$\wedge$	逻辑合取运算符
$\vee$	逻辑析取运算符
$\neg$	逻辑否定运算符
$\rightarrow$	逻辑蕴涵运算符
$0_n\in\mathrm{R}^n$	元素全为 0 的 n 维向量
$1_n\in\mathrm{R}^n$	元素全为 1 的 n 维向量
$k_n\in\mathrm{R}^n$	元素全为 k $(k=1,2,\cdots)$ 的 n 维向量
$L=\delta_m[i_1,i_2,\cdots,i_r]$	$L=[\delta_m^{i_1},\delta_m^{i_2},\cdots,\delta_m^{i_r}]\in\mathcal{L}_{m\times r}$ 的简记
$\ltimes$	矩阵的半张量积运算符
$\otimes$	矩阵的 Kronecker 积

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　逻辑动态系统代数状态空间法概述

Deif 对矩阵理论的应用价值给予了高度评价：矩阵理论可称为高等算术，几乎每个工程应用都涉及矩阵，这是因为要处理带有许多部件的复杂系统，必须有一种数学工具能将这些部件结合在一起，而矩阵方法正好能够达到这一目的。在电网络、结构理论、力学系统和经济学等学科研究中均能找到矩阵理论的精彩应用 [1]。

当然，矩阵理论的应用也有一定的局限性。例如，高维数组问题，用矩阵来处理并不方便，甚至在有些情况下，矩阵显得无能为力。对于三维数组，Bates 和 Watts 建议用立方矩阵进行处理 [2,3]，但未得到学术界的广泛认可。原因如下：一方面，对于不同的问题，必须定义不同的立方矩阵，这给实际应用带来很大麻烦；另一方面，这种立方矩阵无法应用到维数大于 3 的数组，即一般数组。学者张应山提出了多边矩阵理论 [4]，这是一个创新性的工作，但由于其计算过程过于复杂，并未得到广泛应用。

中国科学院数学与系统科学研究院的程代展研究员从 1997 年开始研究如何利用矩阵去有效地处理多维数组及非线性问题。他在思考计算机对多维数组的存储方法时得到启发，提出了一种新的矩阵乘法——矩阵的半张量积 (semi-tensor product of matrices, STP)。这种矩阵乘法可以自动搜索数据的层次结构，因此可以有效地处理多维数组问题。矩阵的半张量积是对矩阵普通乘法的推广，不仅保留了矩阵普通乘法的主要性质，同时也具备了一些特殊性质。因此，理论上它可以取代矩阵的普通乘法，从而得到广泛应用。正如程代展研究员所指出的，矩阵的半张量积会在未来领军的有限及离散数学中起到重要作用 [5]。

逻辑动态系统代数状态空间法 (algebraic state space approach to logical dynamic systems, ASSA) 正是基于这种矩阵的半张量积发展起来的一种系统建模、分析与综合的工具。近年来，该方法得到了长足的发展和普遍的重视，被广泛应用于多种工程问题和理论研究中。2007 年，逻辑动态系统代数状态空间法首先应用于

布尔控制网络领域。布尔网络是由美国加利福尼亚大学生物学家 Kauffman 在 1969 年研究细胞和基因调控规律时提出的生物学模型 [6]。随着系统生物学的发展，它已成为生物学、物理学和系统与控制科学等学科新的研究热点 [7,8]。以程代展为代表的学者及团体利用逻辑动态系统代数状态空间法研究了布尔网络的拓扑结构问题 [9,10]，得到了问题的一般解法，建立了系统能控、能观的判断条件以及系统的实现方法 [11,12]；提出了逻辑空间与子空间的构造及判别方法 [13]；研究了布尔网络的稳定与镇定问题 [14]，设计出最优控制策略 [15] 和布尔 (控制) 网络的辨识方法 [16,17] 等。这些工作形成了布尔网络的控制理论 [18]，并得到了国际学术界的肯定，文献 [11] 荣获了国际自动控制联合会 (International Federation of Automatic Control，IFAC) 授予的 *Automatica* 最佳方法/理论论文奖 [8]。

随着逻辑动态系统代数状态空间法自身的不断发展完善，其应用也越来越广泛，并在许多领域取得了一些具有标志性的成果。例如，布尔控制网络[9,11,12,17,19-28]、混合值逻辑网络 [29-32]、(切换) 非线性系统 [33-40]、网络演化博弈 [41-49]、有限序列机理论 [50-55]、模糊控制理论 [56-60]、布尔函数及其在组合电路和数字电路中的应用 [61]、线性规划 [62]、图论及多智能体系统 [63-65] 等。一般来讲，只要系统的状态是有限离散的，逻辑动态系统代数状态空间法都是一个有力的建模工具，如对布尔逻辑系统、多值逻辑系统、混合值逻辑系统、基于网络演化的博弈系统和有限序列机等离散动态系统的建模等。

总之，逻辑动态系统代数状态空间法为逻辑动态系统的分析与设计提供了一个便捷的平台，在对逻辑动态系统进行建模时表现出极大的优越性。该方法能将物理性质相同或者物理意义相近的物理量进行交换，使得这些变量在模型中处于相同位置，从而将这些变量作为一个整体变量加以考虑，最终将系统的动态行为建模为线性形式的代数方程。基于这种线性的动态方程，能够十分方便地对系统进行分析与综合。例如，对布尔网络的分析与控制，以及对基于网络演化的博弈系统的建模等，都取得了具有里程碑意义的成果，解决了历史上遗留或解决得不够完善的问题 [11,43,45,49]。

有限自动机 (finite automation) 是一种典型的逻辑动态系统，可被定义为一种逻辑结构。有限自动机理论广泛应用于许多相关领域，有各自不同的研究内容、研究方法和研究目标。在数学领域，利用有限自动机对多种数学算法和函数的可计算性进行描述。在控制科学领域，有限自动机属于控制论的一部分，与智能控制理论

有着紧密的联系，为许多问题提供了原理模型。在系统生物学领域，生物学家在研究生命体的遗传规律时，把有限自动机当作生长发育的数学模型。在语言学领域，语言学家在研究形式语言理论时，把有限自动机当作语言接收器。此外，在计算机的基础理论方面，有限自动机常被用来研究计算机的逻辑运算及复杂性理论等。

模糊逻辑及模糊逻辑系统是模糊控制的基础。模糊控制是人工智能的三大支柱之一 (模糊控制、神经网络和混沌理论)。目前，人工智能领域的热点研究方向有模糊逻辑、专家系统和神经网络等。模糊逻辑的研究内容主要包括基因算法、混沌理论和线性动态系统理论等，属于计算数学的研究范围，其应用已渗透到农业、经济、军事和工业控制等科学领域。模糊逻辑关系方程的求解问题，在模糊控制方面有较多的应用。例如，在设计模糊控制器时，如果能够得到模糊逻辑关系方程的所有解，并提供这些解的一些特征信息，那么就能为模糊控制器的设计提供最佳方案；另外，如果模糊控制器的设计总是不能满足设计要求，那么模糊逻辑关系方程的这些解也能提供有用信息去帮助找到导致不能满足要求的因素，从而对模糊控制器的设计进行优化。

图作为数学模型成功地分析和解决了许多现实世界的具体问题 [66]。图的一些具有特殊性质的结构为理解逻辑动态系统的拓扑结构提供了数学模型。物理学、化学、通信、计算机技术、遗传学和社会学等领域中的一些问题可归结为图论问题。数学科学的许多分支，如群论、矩阵理论、概率论和拓扑学等，也与图论有着交叉关系 [67]。而在系统科学领域，图论为包含二元关系的系统提供了数学分析手段 [68]。

上述三种对实际问题的抽象模型，即有限自动机、模糊逻辑及模糊逻辑系统和图论都是典型的离散动态系统 (严格地说，图论是一种静态的数学模型，但它可以为许多动态系统提供数学模型上的支持，如多智能体系统等)。而逻辑动态系统代数状态空间法对状态有限且离散的动态系统来说是非常有力的建模工具，基于逻辑动态系统代数状态空间法所得的模型，对系统的分析与综合非常方便 [11,19,21-24,50,55,56,59,60,63-65,69]。本书利用这种新的理论工具，对逻辑动态系统的若干问题进行研究，包括有限自动机、合成有限自动机、受控有限自动机、模糊逻辑关系方程和图的结构问题等。利用新的建模与分析工具，必然会得到解决这些问题的新结论。一方面，为理解和运用这些问题提供了新的视角；另一方面，也为这些尚未解决或者解决得不够完善的问题提供了新的研究手段。

1.2　逻辑动态系统代数状态空间法的应用研究现状

随着逻辑动态系统代数状态空间法及矩阵的半张量积自身的不断完善发展，其应用领域也在不断扩大。目前，逻辑动态系统代数状态空间法及矩阵的半张量积已在布尔控制网络、非线性动态系统、模糊控制系统、有限序列机、网络演化博弈、图论及超图等领域得到成功应用。本节简要概述两者在这些领域的应用研究现状。

1.2.1　在布尔控制网络中的应用研究

最初是程代展带领的研究团队，将逻辑动态系统代数状态空间法作为建模及分析工具应用到布尔控制网络，并取得了大量研究成果，其中一些具有里程碑的意义。

2009 年，程代展通过输入–状态结构研究了布尔网络的拓扑结构 [10]。利用逻辑算子的代数形式，将布尔网络基于逻辑的输入–状态行为转化为代数形式的离散时间动态系统；在此基础上，研究了布尔网络的拓扑结构，发现布尔网络的吸引子 (attractors) 具有一种网状的合成圈结构 (nested compounded cycles)。这种结构解释了圈在神经网络的动态行为中起决定作用的原因。随后，程代展等又将渠化布尔函数 (canalizing Boolean function) 的概念推广为多输入–多输出渠化布尔映射。利用矩阵的半张量积将逻辑函数表示为矩阵的代数形式，基于逻辑函数的这种代数形式，建立了渠化布尔函数的判别准则，进而研究了布尔控制网络的扰动解耦问题，给出了扰动解耦的设计方法 [70]。同年，程代展等又研究了布尔网络的稳定性与布尔控制网络的稳定化问题 [28]。利用逻辑动态系统代数状态空间法，将布尔网络表示成离散时间线性动态系统，将布尔控制网络表示成离散时间双线性动态系统。这种代数形式提供了研究布尔网络和布尔控制网络的代数手段。例如，基于逻辑坐标变换，改进了基于关联矩阵得到的稳定性的充分条件，并应用于控制器的设计中。另外，采用布尔控制网络的这种代数形式，得到了布尔控制网络可稳定化的充分必要条件。

值得一提的是，程代展和齐洪胜关于布尔控制网络的可观性与可控性的研究工作 [11]，在 2011 年荣获了 IFAC 主办期刊 *Automatica* 的 2008~2010 年度最佳方法/理论论文奖，这是迄今为止唯一由华人学者完成的 *Automatica* 获奖论文。在这篇文章中，他们建立了构建布尔控制网络的方法。这种方法只需要知道布尔控制

网络的转移矩阵；同时，还通过可达集的概念建立了布尔控制网络的可控性条件，并且得到了可观性的充分必要条件。

2010 年，程代展在之前工作的基础上，开展了对布尔控制网络的实现问题及状态空间分析的研究工作。文献 [12] 中基于布尔网络的线性动态方程，定义了布尔变量坐标变换的概念，采用这种坐标变换研究了布尔网络的状态空间坐标变换，同时定义了布尔控制网络的不变子空间的概念；由此，进一步分析布尔控制网络的结构，得到了可控性与可观性的正则形式 (normal form) 以及卡尔曼 (Kalman) 分解形式；此外，还建立了布尔控制网络的最小实现方法。文献 [71] 中提出了构造子空间基的方法，特别是精确地定义了正交基、Y-友好基 (Y-friendly subspace) 和不变子空间的概念，并提出了验证算法。应用这些构建方法，成功地研究了布尔网络的模糊滚动齿轮结构 (indistinct rolling gear structure) 问题。

2011 年，程代展等又进一步研究了布尔网络的模型构建问题 [16]。假设由实验获得了一组关于布尔网络的动态性数据，由这些观测数据，提出了几种构建布尔网络的动态模型。这种建模方法不直接构造布尔网络的逻辑动态模型，而是先构造布尔网络的代数模型，在由实验数据得到代数模型之后，再将这种代数模型转回到逻辑模型。其中，针对一般布尔网络的构造方法需要较多的实验数据。为了减少所需数据量，进一步假设网络的拓扑图已知，提出了最小度的构建方法。为了进一步压缩所需数据量，假设网络的拓扑图是一致网络 (uniform network)，提出了相应的构建方法。对于观察数据有误的情况，也给出了相应的模型构建方法。随后，程代展和赵寅讨论了布尔控制网络的辨识问题 [17]，提出了布尔控制网络的状态方程由输入–状态数据可辨识的充分必要条件，建立了可控布尔网络可观的充分必要条件。在此基础上，建立了布尔控制网络可辨识的充分必要条件，同时提出了数值算法。此外，二人也考虑了两种特殊情况：已知网络图的布尔控制网络和高阶布尔控制网络的辨识问题，以及对于大规模的布尔控制网络的近似辨识问题，都提出了相应的辨识方法。

1.2.2 在模糊控制系统中的应用研究

逻辑动态系统代数状态空间法在模糊控制领域的主要应用包括逻辑和模糊控制的矩阵表示 [60]、模糊逻辑关系方程的求解 (包括 Type-1 和 Type-2 两类模糊逻辑关系方程)[56,57,59]、多重模糊关系及在耦合模糊控制 (coupled fuzzy control) 中的

应用 [58]、多变量模糊系统的控制器设计 [72-77] 等。

2005 年，程代展和齐洪胜利用逻辑动态系统代数状态空间法开始研究逻辑及模糊控制的矩阵表示问题 [60]。他们将逻辑表示成矩阵的形式，在这种形式下提出了逻辑函数的一般表达式。这种表达方法在逻辑推理中十分方便，要证明一个逻辑命题，只需要计算一系列的半张量积即可。在此基础上，将逻辑算子推广到多值逻辑的情形，为模糊系统的分析奠定了基础。

2012 年，程代展等利用逻辑动态系统代数状态空间法对模糊逻辑关系方程的求解问题进行了研究 [59]。他们考虑的是一类在实际应用中使用最为广泛的最大–最小模糊逻辑关系方程，发现如果模糊逻辑关系方程有解，那么在参数解集 (parameter solution set) 里有一个对应的解。其研究方法是，首先将逻辑变量表示为向量形式，然后利用矩阵的半张量积将逻辑方程变换为代数方程，最后就可以用求解代数方程的方法来解逻辑方程。与之前的求解方法相比，这种方法的优点是可以从参数解集中求得模糊逻辑关系方程的所有解。而传统的求解方法只能求得模糊逻辑关系方程的某些特殊解，如最大解与最小解等。

2013 年，冯俊娥和吕红丽以逻辑动态系统代数状态空间法为工具研究了多重模糊关系及耦合模糊控制的设计问题 [58]。在假定论域是有限的前提下，将模糊逻辑变量表示为向量形式，从而统一了论域中的元素、子集及模糊子集的表示形式。自然地，经典集合之间的映射可以推广到模糊集合的情形。基于矩阵的半张量积方法，提出了逻辑矩阵的加法和乘法，这给计算合成模糊关系带来了很大的方便，并且定义了二元模糊结构，保证了模糊论域的有限性，也可用于模糊化和清晰化。同时，他们将上述结果应用到多输入–多输出 (multi-input multi-output，MIMO) 模糊系统，提出了一种新的耦合模糊控制器设计方法。

同年，葛爱冬和王玉振等基于逻辑动态系统代数状态空间法对多变量的模糊逻辑控制器进行了分析和设计 [77]。他们首先对多变量模糊逻辑控制器的模糊控制规则进行了新的描述，这种描述非常便于模糊推理；然后通过构造模糊结构矩阵提出了新的模糊推理机制，并且建立了一组最小入度的控制规则；最后将这些结果应用到多变量模糊系统控制设计及并联式混合动力汽车 (parallel hybrid electric vehicle，PHV) 中，并取得了较好的效果。

为了将逻辑动态系统代数状态空间法及矩阵的半张量积引入 Type-2 模糊逻辑关系方程的求解问题中，首先将 Type-2 模糊关系分解成两部分：主子阵和次子

阵，并建立了对应的主子阵 Type-2 模糊逻辑关系方程和次子阵 Type-2 模糊逻辑关系方程。然后提出了 r 元对称值 Type-2 模糊关系模型及与之对应的 r 元对称值 Type-2 模糊逻辑关系方程模型。其中，主子阵和次子阵都是 Type-1 模糊逻辑关系方程 (即一般的模糊逻辑关系方程)。最后利用逻辑动态系统代数状态空间法在求解 Type-1 模糊逻辑关系方程时的方法和思路来对 Type-2 模糊逻辑关系方程进行求解。

闫永义等在 2013~2014 年利用矩阵的半张量积与逻辑动态系统代数状态空间法分别研究了单点 Type-2 模糊逻辑关系方程和一般 Type-2 模糊逻辑关系方程的求解问题 [56,57]。在求解单点 Type-2 模糊逻辑关系方程时，根据 Zadeh 扩展原理 (其中 t 范数采用取小 t 范数)，将 Type-1 模糊关系推广到 Type-2 模糊关系，建立了 Type-2 模糊逻辑关系方程。然后，将单点 Type-2 模糊逻辑关系方程的解分解为主元阵和次元阵两部分，利用矩阵的半张量积和逻辑方程的矩阵形式，得到了主元阵有解的条件；利用取小模糊逻辑推理，求得次元阵应满足的必要条件。在此基础上，得到了求解单点 Type-2 模糊逻辑关系方程的算法，该算法对计算机的内存要求更低。对于一般 Type-2 模糊逻辑关系方程的求解，为了将矩阵的半张量积和逻辑动态系统代数状态空间法及其在求解 Type-1 模糊逻辑关系方程时的应用，引入 Type-2 模糊逻辑关系方程的求解问题中，提出了 r 元对称值 Type-2 模糊关系模型及对应的对称值 Type-2 模糊逻辑关系方程模型。基于此，建立了两种求解 Type-2 模糊逻辑关系方程的算法：一种给出了一般 Type-2 模糊逻辑关系方程解的理论描述，具有理论意义；一种可以求出对称值 Type-2 模糊逻辑关系方程的所有解，具有使用价值。这些结论提供了寻找最优解的途径，有助于对 Type-2 模糊控制器的设计进行改进。

1.2.3 在有限自动机中的应用研究

在对有限自动机的动态行为进行建模时，考虑到这种动态行为的本质是一种基于逻辑的演化过程，且已有学者采用逻辑动态系统代数状态空间法将一般情况下的逻辑方程表示为统一的线性代数方程，将有限自动机的输入字符、输出字符和状态都表示为向量的形式，这样有限自动机的转移函数和输出函数就可以表示为输入、输出和状态的线性函数。这种代数方程体现了有限自动机的所有动态特性，因此可以对有限自动机的动态性进行分析，如可达性、可控性和可稳性等。在此基