普通高等教育农业部“十三五”规划教材配套用书
全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析

上册

第三版

王家军　张香云　方惠兰 ◎ 主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十三五”规划教材配套用书
全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析 上册

第三版

王家军 张香云 方惠兰 主编

中国农业出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与习题解析．上册 / 王家军，张香云，方惠兰主编．—3 版．—北京：中国农业出版社，2018.8

普通高等教育农业部“十三五”规划教材配套用书
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 109 - 24327 - 9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②张… ③方… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 153372 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
责任编辑 魏明龙
文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2009 年 9 月第 1 版 2018 年 8 月第 3 版
2018 年 8 月第 3 版北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：20
字数：360 千字
定价：36.00 元

内容简介

本书是普通高等教育农业部“十三五”规划教材《高等数学》(上册，第三版)配套的学习参考书，针对原教材的各个章节依序修订而成。内容包含原教材中各章节的学习要求、内容提要及解难释疑、解题方法与典型例题解析等指导性材料，并给出了各章节练习题、测试题的参考解答等辅助性材料。既为本科学生学习高等数学提供方便，也为其深造考研提供具体指导与帮助。

本书分为上、下两册。上册包括函数与极限、连续性、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容。下册包括空间解析几何与向量代数初步、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数等内容。

第三版编写人员名单

主　编　王家军　张香云　方惠兰

副主编　丁素芬　李小亮　刘　静

参　编　叶彩儿　宋红凤　张居丽

黄　敏

第一版编写人员名单

主　编　王家军　张香云

副主编　宋红凤　张居丽　邬良春
　　　　胡　琴

参　编　丁素芬　黄　敏

第二版编写人员名单

主　编　王家军　张香云　方惠兰

副主编　丁素芬　李小亮　刘　静

参　编　宋红凤　张居丽　黄　敏

第三版前言

本书是与王家军为总主编的普通高等教育农业部“十三五”规划教材《高等数学》(上册)配套的学习指导书．其编写原则，是对照原教材各章节的内容编写学习要求、学习指导(解难释疑)、解题方法与典型例题解析等指导性材料．其主要宗旨是：为初学者深刻理解高等数学知识、全面掌握高等数学方法提供适时的针对性帮助．本书也可作为高等数学课程考研学习的参考书目．

考虑到高等数学课程可能出现的学习困难，特别是初入校的大学生学习负担较重的现象，本书对原教材中的全部练习题给出了参考解答．同时，为了照顾到不同学习基础、不同学习要求者的学习需要，每章末安排了测试题并附有参考解答(其中某些题目，以及每章总练习的一些题目已接近考研水准)，供学有余力的同学作为探究性学习的练习题材．必须指出，所有习题的参考解答，仅应作为读者在自行练习之后自我检测的参考依据，以免影响学习效果．

编　者

2018年3月于杭州

目录

第一章　函数与极限

函数是变量之间依赖关系的一种动态描述方式，是高等数学的主要研究对象，而极限是高等数学中研究函数的基本工具．本章主要介绍数列极限、函数极限的理论与方法．

一、主要内容与重点

1. 数集及其表述形式，区间与邻域．

2. 函数及其表示方式、函数的几种特性，反函数与复合函数，几个重要的特例函数(符号函数、取整函数等)，基本初等函数和初等函数．

3. 数列极限及其性质，数列极限存在性．

4. 函数极限概念、性质，单侧极限，重要极限公式．

5. 无穷小与无穷大的概念，无穷小比较及其应用．

重点　极限概念，无穷小及其比较的概念，极限求法．

难点　极限的 $\varepsilon-N$ 或 $\varepsilon-\delta$ 语言，极限的求证方法．

二、学习要求

熟悉函数概念及其四个特殊性质，掌握函数的复合运算及分解运算；理解基本初等函数的性态及初等函数的有关结论；了解数列极限的 $\varepsilon-N$ 语言和函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言，理解数列极限与函数极限的关系；会求数列或函数的极限，会求左、右极限并判断函数极限的存在性，理解无穷大与无穷小的概念及其关系，理解无穷小比较的概念与方法，会使用无穷小的运算法则、特别是用等价无穷小代换求极限．

三、学习指导

从研究常量到研究变量，是初等数学向高等数学的根本转变．对极限变化

的无限性与动态化作深入理解，通过练习掌握求证极限的方法，是学好高等数学的必备基础.

第1节　函　　数

一、学习要求

1. 理解集合的概念，掌握区间及邻域的表示方法.

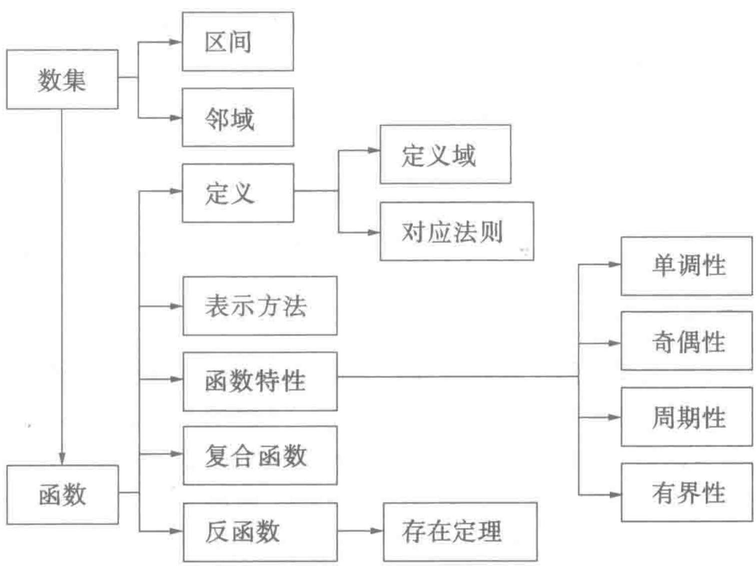
2. 理解函数的概念，了解函数的四种特性；掌握函数的表示方法，尤其是实际问题中建立函数关系的方法.

3. 理解复合函数、反函数及分段函数的概念.

重点　区间、邻域、函数的概念；复合函数及分段函数的概念，反函数的概念.

难点　函数关系的建立；复合函数、反函数、分段函数及其表述.

二、知识框图



三、主要内容与解难释疑

1. 函数概念 $y=f(x)$，$x\in D$ 的理解

函数概念有两个要素，即定义域 D 和变量取值的对应法则 f，而值域

$f(D)$由这两个要素所决定．其中，定义域是自变量和因变量能构成函数关系的基础．例如，$f(x)=\ln(3-x)\sqrt{x-4}$的定义域为空集，此函数便没有意义；而对应法则是表示和理解函数的关键，这里特别强调的是：对于定义域 D 中的每一个数 x，必须能够由所给的对应法则唯一确定值域中的一个实数 y——此即单值对应(反之，值域中的一个数可以与定义域中的多个数相对应．如 $y=x^2$，无论 x 取 1 或 -1，都唯一对应于 $y=1$，但反之，函数值 1 却对应于 $x=\pm 1$ 两个值)．

正是由于函数定义域和对应法则的重要性，人们规定：定义域和对应法则均相同的两个函数是**相同**的．

例如，$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是不同的，因为其定义域不同；而 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ 在$[1, 2)$上是相同的．

此外，函数与函数表达式是不同的．这里的函数是指上述对应关系，而函数表达式则是函数关系的具体形式(在高等数学中主要指**解析式**)．当然，这种解析式并不一定表示为一个式子．

例如，分段函数 $y=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0,\\ 1-x, & x<0\end{cases}$ 就是两个式子表示的一个函数．

在实际应用中，函数的表达形式还有表格式、图像式等．

2. 复合函数

复合函数是最常见的函数形式，一般由内、外函数关系的叠合运算而构成：

如果 $y=f(u)$，$u\in D_1$，$u=\varphi(x)$，$x\in D_2$ 满足 $\varphi(D_2)\subset D_1$，则称 $y=f(\varphi(x))$，$x\in D_2$ 为以 x 为自变量，u 为中间变量的**复合函数**．

需要注意，这里的关键条件 $\varphi(D_2)\subset D_1$ 可以放宽为 $\varphi(D_2)\cap D_1\neq\varnothing$，只不过该复合结果函数的定义域需要重新确定．

例如，函数 $y=\sqrt{u}$，$u\in D_1=[0, +\infty)$和 $u=1-x^2$，$x\in D_2=(-\infty, +\infty)$ 满足：

$$\varphi(D_2)\cap D_1=(-\infty, 1]\cap[0, +\infty)\neq\varnothing,$$

所构成的复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 以 $D=[-1, 1]\subset D_2$ 为定义域．

只要遵循上述复合运算的原则，即可构造出更加复杂的复合函数．如

$$y=\sqrt{u},\ u=\ln v,\ v=x^2-1$$

可以复合为 $y=\sqrt{\ln(x^2-1)}$，$|x|\geqslant\sqrt{2}$.

3. 函数的有界性

从定义上讲，函数 $f(x)$在定义域 D 上有界，即存在正数 M，使对任意

$x\in D$，都成立$|f(x)|\leqslant M$. 这就是说：**界**是对函数值域的明确限制．

必须注意：定义的关键是界 M 的**存在性**．即对给定的函数 $f(x)$，这样的界限 M 是否确定存在(不存在即称为**无界**)；但在存在的情况下，这样的界 M 却不唯一：对于定义中要求的不等式$|f(x)|\leqslant M$ 而言，显然比 M 大的任何实数(如 $M+1$)都符合要求．

例如，$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上以 $M=1$ 为界，当然更有$|\sin x|\leqslant 2$.

此外，关于有界与有上、下界的关系(见原教材)可改述为：

定理　函数 $f(x)$在定义域 D 上有界等价于在定义域 D 上既有上界 M_2，也有下界 M_1.

事实上，只要取 $M=\max\{M_1, M_2\}$，则对照函数有界或有上下界的定义即可得到证明(请读者自行写出).

评注　本定理的重要性在于给出了函数有界与否、特别是对无界的常用判断方法：只要上、下界至少其一不存在，该函数即无界．

例如，函数 $y=\tan x$ 在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上无上界$\left(\tan\dfrac{\pi}{2}=+\infty\right)$，故在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上无界．

此外，函数界的存在性与所讨论范围的大小有关，这在教材上已有反映．

4. 单调函数与反函数

函数的单调性也与所讨论的范围有确定关系，如 $y=x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$上不是单调函数，但在$[0, +\infty)$或$(-\infty, 0]$上分别是单调的．

现在的问题是：是否单调函数必有反函数，非单调的函数一定不存在反函数？这回答是否定的，例如：

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-1, 0],\\ x^3+2, & x\in(0, 1]\end{cases}$$

在$[-1, 1]$上不是单调函数，但却存在反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0, 1],\\ \sqrt[3]{x-2}, & x\in(2, 3].\end{cases}$$

评注　函数 $f(x)$是否存在反函数，取决于其定义域 D 与值域 $f(D)$之间是否具有一一对应的关系．单调函数只是满足这种一一对应关系的特殊形式．

5. 函数的奇偶性

按照定义，具有奇偶性的函数 $f(x)$的定义域 D 必须关于原点对称，且对于 D 中的每一个 x，要根据 $f(-x)=\pm f(x)$的情形来判断．因此，需要注意：

① 定义域关于原点不对称的函数一定是非奇非偶函数；

② 若 $f(x)$是奇函数，且 $f(0)$有意义，则必有 $f(0)=0$.

四、解题方法与例题解析

1. 求定义域

求函数定义域(以下均用 D 表示)的方法与原则，与中学数学是相同的：

① 分式的分母不能为零；

② 偶次根号下的式子应大于、等于零；

③ 对数式的真数部分应大于零，底数部分大于零且不等于 1；

④ 三角函数或反三角函数要满足其定义要求，如 $\arcsin x$，$\arccos x$ 的 x 应满足$|x|\leqslant 1$；

⑤ 若函数解析式表示为四则运算形式，则定义域取各运算项定义域的交集；

⑥ 分段函数的定义域取各分段函数定义域的并集；

⑦ 表达实际应用问题的函数关系，其定义域要满足问题的实际要求；

⑧ 抽象函数的定义域由具体给定的条件决定.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-x^2}$；(2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1-x}$.

解 (1) 要使得函数表达式有意义，只需 $x-x^2=x(1-x)\geqslant 0$，即 $D=[0,1]$.

(2) 由反三角函数的定义域，有 $-1\leqslant\dfrac{2x}{1-x}\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}$，于是 $D=\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$.

例 2 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求 $f(e^{\sin x})$的定义域.

解 $y=f(e^{\sin x})$由 $y=f(u)$，$u=e^v$，$v=\sin x$ 复合而成，其中应有

$$0\leqslant e^{\sin x}\leqslant 1,$$

所以 $\sin x\leqslant 0$，即

$$2k\pi-\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi(k\text{ 为整数}),$$

于是 $D=[2k\pi-\pi,2k\pi]$(k 为整数).

2. 求函数

例 3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$，并写出该定义域.

解　由于 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，注意到 $\ln(1-x)\geqslant 0$，有 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，这就是 $\varphi(x)$的定义域.

例 4　设函数 $f(\varphi(x))=G(x)$，其中 $\varphi(x)$与 $G(x)$均为已知函数，求$f(x)$.

分析　左边的复合函数以 $y=\varphi(x)$为中间变量，故可通过求其反函数达到解题的目的.

解　设 $y=\varphi(x)$的反函数为 $\varphi^{-1}(x)$，则有 $f(x)=G(\varphi^{-1}(x))$.

需要注意的是反函数 $\varphi^{-1}(x)$的具体求法. 例如，对函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，其中 $y=\frac{1}{x}$的反函数为 $x=\frac{1}{y}>0$，则 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ $(x>0)$. 因此，当反函数 $\varphi^{-1}(x)$无法求取时，可以通过变换函数形式或实行变量替换，使之化为上面的情形即可求解(如习题 1 - 1 中的第 5 题).

3. 求函数的值域

求函数的值域通常用如下方法：

① 根据定义域，用不等式求之；

② 如果所给函数有反函数，可通过反函数求之.

例 5　求下列函数的值域：

(1) $y=x+\sqrt{1-x}$；(2) $y=\frac{x+1}{x+3}$.

解　(1) 令$\sqrt{1-x}=t$，则$x=1-t^2$，$y=1-t^2+t=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$，其中等号当且仅当$t=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{3}{4}$时成立. 于是所求函数的值域为$\left(-\infty,\ \frac{5}{4}\right]$.

(2) 由于所给函数有反函数：$x=\frac{1-3y}{y-1}$，$y\neq 1$，故所求函数的值域为 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

4. 判断奇偶性

函数奇偶性的判断方法是：先查定义域是否对称；若对称，再验证 $f(-x)$与 $f(x)$的关系.

例 6　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x-2}$；(2) $f(x)=\begin{cases}1-x，& x\leqslant 0,\\ 1+x，& x>0.\end{cases}$

解　(1) 由于 $D=(-\infty,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$关于原点不对称，所以 $f(x)$非奇非偶；

(2) 这里 $D=\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\begin{cases}1-(-x), & -x\leqslant 0,\\ 1+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1+x, & x>0,\\ 1-x, & x\leqslant 0\end{cases}=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数．

习题 1-1 参考解答

思考题

单调函数一定有反函数，非单调的函数是否一定不存在反函数？

答　不是．单调性只是反函数存在的充分性条件而不具必要性．例如：函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-1,0],\\ x+1, & x\in(0,1]\end{cases}$ 在$[-1,1]$上非单调，但有反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0,1],\\ x-1, & x\in(1,2];\end{cases}$ 又如 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上非单调，也有反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & 0<x<1.\end{cases}$

练习题

1. 求下列函数的定义域．

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$；(2) $y=\sin x+\tan x$；(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

解　(1) 因为 $2+x-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 2$，所以 $D=[-1,2]$.

(2) 因为 $\sin x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$\tan x$ 的定义域是 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $D=\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3) 因为 $x^2-3x+2\neq 0$，即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$，所以 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 1, x\neq 2\}$.

2. 求下列函数值．

(1) 设 $f(x)=\sin x+\cos x$，求 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+\Delta x)$；

(2) 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<3,\\ 0, & |x|\geqslant 3,\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(3)$.

解　(1) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=1$，$f(x_0)=\sin x_0+\cos x_0$，

$$f(x_0+\Delta x)=\sin(x_0+\Delta x)+\cos(x_0+\Delta x).$$

(2) $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\varphi(-2)=|\sin(-2)|=|-\sin 2|=\sin 2,\ \varphi(3)=0.$$