教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

高等代数专题研究

张庆成 编

中央广播电视大学出版社

中央广播电视大学教材

高等代数专题研究

张庆成　编

中央广播电视大学出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

高等代数专题研究／张庆成编．—北京：中央广播电视大学出版社，2010.7 （2018.5 重印）

中央广播电视大学教材

ISBN 978-7-304-04894-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等代数-专题研究-电视大学-教材 Ⅳ.①015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 139860 号

中央广播电视大学教材

高等代数专题研究

张庆成　编

出版·发行：中央广播电视大学出版社

电话：营销中心 010—68180820　　总编室 010—68182524

网址：http://www.crtvup.com.cn

地址：北京市海淀区西四环中路 45 号　　**邮编**：100039

经销：新华书店北京发行所

策划编辑：何勇军　　**版式设计**：韩建冬

责任编辑：石明贵　　**责任校对**：王　亚

责任印制：赵连生

印刷：北京密云胶印厂　　**印数**：6101～8100

版本：2010 年 7 月第 1 版　　2018 年 5 月第 4 次印刷

开本：B5　　**印张**：17.25　　**字数**：298 千字

书号：ISBN 978-7-304-04894-5

定价：32.00 元

内 容 提 要

本书共分六章.第1章代数运算与数学归纳法,介绍了代数运算的概念,讨论了最小数原理、第一数学归纳法、第二数学归纳法.第2章一元多项式理论,讨论了多项式的整除、最大公因式、多项式的唯一因式分解、多项式的根、复系数多项式、实系数多项式的分解、有理多项式的不可约性.第3章线性空间,主要讨论线性相关性、线性子空间、子空间的基和维数、子空间的直和等.第4章线性变换,讨论线性变换的运算、线性变换的特征值与特征向量、可对角化的线性变换及哈密尔顿-凯莱定理.第5章欧几里得空间,讨论了欧氏空间的标准基、对称变换、实对称矩阵、正交变换、正交矩阵和实对称矩阵的对角化.第6章双线性函数与二次型,讨论了双线性函数的性质和二次型.为便于自学,每章最后都有学习指导,并给出了大量的典型例题.书后给出了各节的练习题、习题和自测题的部分答案或提示.

本书可供师范院校、电大学生和自学者使用.

序　　言

21 世纪,中国全面地进入了一个新的发展与竞争的时代.归根结底,竞争是人才的竞争与知识的竞争,团体竞争的优胜者将是那些具有一批高水平人才的团体;个体竞争的优胜者将是那些具有现代科学知识与超群工作能力的人.在这竞争的时代,青年人渴望学习到适应工作岗位需要的知识,正是在这种环境下,中央广播电视大学与东北师范大学为满足一大批中学数学教师的要求,联合开办了(师范类)本科数学与应用数学专业.

本专业的开办,为追求知识的中学青年教师开辟了一条前进的道路,而知识的获取,要靠学习者的辛勤劳动.可以说,学习是一项艰苦的劳动.这项劳动与其他劳动的一个显著区别是:学习不能由别人代替完成,甚至也不能合作完成,特别是数学知识的学习,必须经过学习者一番夜不能寐的(有时甚至是痛苦的)冥思苦想,才能掌握数学的本质,才能体会到数学的真谛,才能达到由此及彼、由表及里的境界.

数学是众多学科中最为抽象的学科.正是因为它高度的抽象性,决定了它广泛的应用性,同时也造成了数学学习的困难,毋庸讳言,相对其他学科来说,学习数学需要花费更多时间与精力.但是,数学并不是高不可攀的科学,数学的学习如同攀高楼一样,只要一步一个台阶(而不是两个台阶,三个台阶……,更不是飞跃)地拾级而上,我们并不觉得太困难即可攀上高楼.同样,只要学习者扎扎实实地掌握这一步知识,再去学习下一步的内容,循序渐进,数学就可以成为任你的思维纵横驰骋的自由王国.

作为教师,要充分地考虑学生在自学过程中遇到的各种困难.我们在教材的编写中,尽最大可能地使教材通俗易懂,由易到难,深入浅出,便于自学,适当地做出一些注释,引导学生深入理解知识.每章开始给出本章学习目标和导学,每章的结尾做出本章的总结,指出本章的重点及难点,并安排了学习辅导内容,介绍典型例题,同时配备了自测题目.

中央广播电视大学与东北师范大学联合开办的本科数学与应用数学专业处于刚刚起步阶段,我们的教学首次编写这套教材,一切处于探索的过程中,因

此,这套教材难免有这样或那样的不妥之处,我们热情欢迎本套教材的读者,提出宝贵的批评意见和改进建议,使我们的教师及时地改进这套教材以提高后面学生的学习效果.

史宁中

于长春

2004 年 4 月 25 日

前　言

本书是为中央广播电视大学本科开放教育数学与应用数学专业“高等代数专题研究”课程编写的文字教材.

高等代数专题研究课程是在学生学过线性代数课程的基础上进行的学习.为此,既要兼顾已学过线性代数的内容,又要考虑到高等代数重要地位以及后续课程学习的需要.本书在编写过程中,内容的选取和结构的安排是一个值得反复推敲的问题,经过课题组专家的反复讨论,认为本书应该体现高等代数主要内容,但不与讲过的线性代数部分重复,同时还应该体现以自学为主的学习形式.我们借鉴普通高校本科和函授本科多年的教学实践,同时也参照了国内外流行的高等代数教材的基本内容和写法,尽量做到既介绍经典的高等代数的基本内容,又兼顾到高等代数的某些应用和近代理论,使学员通过本课程的学习能够了解到高等代数最基本的概貌,有助于提高学员自身的数学修养,增强分析问题和解决问题的能力,并为后续课的学习做好必要准备.

本书编写时努力体现下列特点:

1. 选取高等代数的深入内容,包括代数运算与数学归纳法、多项式理论、线性空间、线性变换、欧几里德空间、双线性函数和二次型.通过这些内容的学习,学生能对高等代数有一个整体把握,为后续课程的学习奠定基础.

2. 教材的编写上,针对高等代数内容抽象、概念多、学生抓不住实质的特点,我们力求做到由浅入深,循序渐进.为便于自学,每章开头都给出本章的学习目标、导学和思考.在导学中,指出学习建议和应注意的问题,以及本章各部分内容的关系和本章应掌握的重点.每章的后面有本章小结和学习指导.各章习题的选取尽量做到难易适中,以帮助读者对概念和定理的理解和掌握.我们也考虑到学有余力的同学“吃不饱”的情况,特别选择了部分高等学校高等代数的研究生的试题,做为练习和欣赏.这部分内容和书中的 * 号部分内容不作为考核要求.

3. 由于高等代数这门课程内容抽象、推理严谨,初学者在做题时常常“无从下手”,这给自学带来一定的困难.因此,我们在书后给出各节练习题、习题以及

自测题的部分提示或答案，希望能给学习有困难的学生一些启发和思考. 同时，为了便于学习者检索基本定理、定义及推理过程，在正文中除了“定义”内容单独排序外，还将“定理、命题、推论”统一排序。

4. 考虑到大多数学习者来自中小学数学教师，我们编写本教材时，努力选择那些与中小学数学有一定联系的内容和例题. 如：数学归纳法这一章的内容及例题，就选择了部分中小学数学竞赛题；一元多项式的理论，着力体现方程根的历史发展进程，使学习者从总体把握方程根的理论；二次型理论部分，编写了二次曲线的化简，力求给读者一个清晰的数学分类的思想及高等代数在几何方面应用的范例.

学习高等代数专题研究，掌握它的概念和方法，理解它的深刻思想，需要不断地思考和反复地训练，这是一个痛苦而快乐的过程. 只有这样，我们才能深入把握数学的精神，用于准确指导中小学数学的教学.

本书由东北师范大学张庆成副教授编写；北京师范大学丁勇教授，首都师范大学李庆忠教授、于祖焕教授参加了本课程教学大纲和文字教材的审定.

丁勇教授、李庆忠教授、于祖焕教授，北京航空航天大学柳重勘教授，中央广播电视大学顾静相副教授、陈卫宏副教授、赵坚副教授，特别是中央广播电视大学赵佳博士对本书的原稿进行了仔细的审阅，提出了许多宝贵和详尽的修改意见，对作者修改定稿有很大帮助，在此一并表示感谢.

本书编写的过程中，参考并引用了书末所列参考文献中的大量内容，在此一并申明并向各书的作者致谢.

限于编者水平，本书仍难免有疏漏不妥之处，敬请读者批评指正！

编　者

2010 年 3 月

目　录

1　代数运算与数学归纳法

数学中,运算是个最基本、最普遍的概念.在中学数学中,数的加法、减法、乘法都是运算,其实它们的本质属性是"两个得一个".本章从代数的角度给出代数运算的定义.数学归纳法是数学证明的最常用、最重要的方法.本章介绍第一数学归纳法和第二数学归纳法.

学习目标

1. 理解代数运算的概念,会用代数运算解释一些常见的运算.
2. 了解最小数原理.
3. 知道第一数学归纳法和第二数学归纳法,会用这两个数学归纳法证明问题.

导　学

数学中运算是个最基本、最普遍的概念和方法.数学归纳法是数学证明的最常用、最重要的方法,其应用非常广泛.就中学数学而言,代数、几何、三角等各学科中许多关于自然数的命题都可以用数学归纳法证明.

在本章学习过程中应注意的问题有以下几点:

1. 理解代数运算的本质,并学会用代数运算解释一些常见的运算.
2. 除了解最小数原理外,还应注意最小数原理成立的条件和推广形式.
3. 第一数学归纳法和第二数学归纳法的证明只需做一般的了解,主要掌握用它们证明问题的方法步骤.

思　考

学习本章,请读者考虑两个问题:一是代数运算的本质是什么,二是第一数学归纳法和第二数学归纳法的区别是什么.

1.1 代数运算

定义 1.1.1 设 A,B 是两个集合,作一个新集合

$$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称这个集合是 A 与 B 的笛卡尔积,记作 $A\times B$.

注意:(a,b)是一个元素对,因而

$$B\times A=\{(b,a)\mid b\in B,a\in A\}$$

一般说来,$A\times B$ 并不等于 $B\times A$. 例如,设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5\}$,则

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

$$B\times A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$

然而,当 A,B 都是有限集时,$A\times B$,$B\times A$ 所包含元素个数是相同的,都等于 $|A|\cdot|B|$($|A|$表示集合 A 的元素个数).

我们知道数的加、减、乘、除运算,多项式的加、减、乘运算都具有一个共同的特点,即两个得唯一的一个. 换句话说,对任意取定的两个元素,按照某种法则都有唯一确定的一个元素与之对应. 于是有如下定义:

定义 1.1.2 设 A,B,C 是三个非空集合,称映射 $f:A\times B\to C$ 是 A,B 到 C 的代数运算. 特别地,当 $A=B=C$ 时,映射 $f:A\times A\to A$ 称为 A 上的二元代数运算.

一个代数运算可以用"∘"来表示,并把(a,b)在"∘"下的象记为 $a\circ b$.

例 1.1.1 设 $\mathbf{R}$ 是实数集,映射

$$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

$$(a,b)\mapsto a+b$$

是 $\mathbf{R}$ 上的二元代数运算. 用约定记法写为 $a\circ b=a+b$,这就是通常的实数加法.

例 1.1.2 在 n 阶方阵集合 $M_n(\mathbf{R})$上,规定二元代数运算

$$f:M_n(\mathbf{R})\times M_n(\mathbf{R})\to M_n(\mathbf{R})$$

$$(A,B)\mapsto AB$$

写为 $A\circ B=AB$,它是通常矩阵乘法.

例 1.1.3 设 $A=\{$奇,偶$\}$,规定二元代数运算$\oplus$:

$$偶\oplus偶=偶,偶\oplus奇=奇$$

$$奇\oplus偶=奇,奇\oplus奇=偶$$

则$\oplus$是 A 上的一个二元代数运算.

在整数集合 $\mathbf{Z}$ 中,加、减、乘都是 $\mathbf{Z}$ 上的二元代数运算,但除法不是 $\mathbf{Z}$ 的二

元代数运算,因为 $2\div 3\notin \mathbf{Z}$. 同样,在多项式集合 $P[x]$ 中,多项式的加法、减法、乘法都是 $P[x]$ 上的二元代数运算,但除法不是 $P[x]$ 上的代数运算. 因为 $(x+2)\div(x+3)\notin P[x]$.

练习 1.1

1. 判定下列法则"$\circ$"是否为有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的代数运算?

(1) $a\circ b=\frac{1}{2}(a+b)$. (2) $a\circ b=a^2-ab+b^2$. (3) $a\circ b=a\sqrt{b}+2a^2$.

2. 判定下列法则"$\circ$"是否为整数集 $\mathbf{Z}$ 上的代数运算?

(1) $a\circ b=2a+b$. (2) $a\circ b=a^b$. (3) $a\circ b=3$.

1.2 数学归纳法

数学归纳法是数学证明中一个重要的方法. 数学归纳法所根据的原理是正整数集的一个最基本的性质——最小数原理.

用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数集合:$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合,用 $\mathbf{Z}_+$ 表示正整数集合.

最小数原理:正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 的任意一个非空子集 S 必含有一个最小数,即存在一个数 $a\in S$,使得对任意的数 $c\in S$,都有 $a\leqslant c$.

如 $S_1=\{5,6,7,10\}$,$S_2=\{1\ 000,1\ 001,\cdots\}$ 都是 $\mathbf{Z}_+$ 的非空子集,S_1,S_2 分别有最小数为 5,1 000.

注意:最小数原理并不是对于任意数集都成立的. 例如,全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 就没有最小数. 又如,全体正分数所组成的集合也没有最小数. 这是因为如果 b 是正分数,那么 $\frac{b}{2}$ 就是小于 b 的正分数.

设 c 是一个整数. 令

$$M_c=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\geqslant c\}$$

那么以 M_c 代替正整数集 $\mathbf{Z}_+$,最小数原理对于 M_c 仍然成立. 也就是说,M_c 的任意一个非空子集必含有一个最小数. 特别地,$\mathbf{N}$ 的任意一个非空子集必含有一个最小数.

由最小数原理可以给出第一数学归纳法.

定理 1.2.1(第一数学归纳法) 设有一个与正整数 n 有关的命题 $P(n)$.

如果

(1)当 $n=1$ 时,$P(n)$成立.

(2)假设 $n=k$ 时,$P(n)$成立,则当 $n=k+1$ 时,$P(n)$也成立.

那么 $P(n)$对一切正整数 n 都成立.

证明:用反证法. 假设命题 $P(n)$不是对一切正整数都成立,令 S 表示使 $P(n)$不成立的正整数组成的集合,那么 $S\neq\varnothing$. 由最小数原理,S 中有最小数 n_0. 因为当 $n=1$ 时,$P(n)$成立,所以 $n_0\neq 1$,从而 n_0-1 是一个正整数. 因为 n_0 是 S 中最小数,$n_0-1\notin S$. 即当 $n=n_0-1$,$P(n)$成立. 于是由(2)知,当 $n=n_0$ 时,$P(n)$成立. 因此 $n_0\notin S$. 这是一个矛盾.

理解数学归纳法的定义和正确性并不难,但是要正确地用好数学归纳法却不是一件容易的事.

数学归纳法中的两步缺一不可. 验证 $P(1)$成立是基础,利用归纳法假设,并结合已知的有关数学知识证明 $P(n+1)$成立是递推的根据. 这两步对证明命题相辅相成,构成数学归纳法证明过程的逻辑结构. 尤为重要的是,在证明过程中必须用到归纳假设,这是检验是否用对了数学归纳法的一把尺.

例 1.2.1 证明:对任意 $n\in\mathbf{Z}_+$,都有

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1} \tag{1.2.1}$$

证明:当 $n=1$ 时,式(1.2.1)右边 $=1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$,左边 $=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$. 故 $n=1$ 时,式(1.2.1)成立.

现设式(1.2.1)对 n 成立,考虑 $n+1$ 的情形.

利用 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$,知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

所以,式(1.2.1)对 $n+1$ 成立.

综上,由数学归纳法原理知式(1.2.1)对一切正整数 n 都成立.

说明:这是一个错误的证明,其错误在于证明式(1.2.1)对 $n+1$ 成立时,并没有用到归纳假设.

正确的过程如下:由归纳假设知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

事实上,式(1.2.2)的得到也是正确的,但这是对式(1.2.1)的直接证明,不应该把它套上数学归纳法这顶帽子.这一点也是初学者经常犯的一个错误,应认真改正,否则难以形成一个正确的逻辑推导的思维过程.

例 1.2.2 证明 $1+2+\cdots+n=\frac{n^2+n+1}{2}$.

证明:假设 $n=k$ 时,命题正确,即 $1+2+\cdots+k=\frac{k^2+k+1}{2}$.

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k^2+k+1}{2}+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k^2+k+1+2k+2)\\&=\frac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)+1]\end{aligned}$$

即命题对 $k+1$ 正确.因此,对任意自然数 n 都是正确的.

事实上, $$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

显然命题是错误的,而证明过程中忽略了数学归纳法的第一步,才导致了错误的结论.

例 1.2.3 求证:$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明:当 $n=1$ 时,上式显然成立.

假设 $n=k$ 时成立,考虑 $n=k+1$ 的情形

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}$$

所以对 $n=k+1$ 时也正确. 因此,命题对一切自然数 n 都成立.

例 1.2.4　求证:n 个正实数的算术平均值大于或等于这 n 个数的几何平均值,即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\tag{1.2.3}$$

其中 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

证明:当 $n=1$ 时,显然成立;当 $n=2$ 时,式(1.2.3)等价于 $a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2}$,即$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0$,故式(1.2.3)成立.

假设式(1.2.3)对 $n(n\geqslant 2)$ 成立,考虑 $n+1$ 的情形

记
$$A=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})}{(n+1)}$$

由归纳假设知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n}(a_1+\cdots+a_{n+1}+\underbrace{A+\cdots+A}_{n-1\text{个}A})\\
&=\frac{1}{2n}(a_1+\cdots+a_n)+\frac{1}{2n}(a_{n+1}+\underbrace{A+\cdots+A}_{n-1\text{个}A})\\
&\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\sqrt[n]{a_{n+1}A\cdots A})\\
&\geqslant\sqrt{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\sqrt[n]{a_{n+1}A\cdots A}}\\
&=\sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_{n+1}A^{n-1}}
\end{aligned}$$

注意到$(n+1)A=a_1+\cdots+a_{n+1}$,故

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n}(a_1+\cdots+a_{n+1}+\underbrace{A+\cdots+A}_{n-1\text{个}A})\\
&=\frac{1}{2n}((n+1)A+(n-1)A)=A
\end{aligned}$$

所以 $A\geqslant\sqrt[2n]{a_1\cdots a_{n+1}A^{n-1}}$,

进而,$A^{n+1}\geqslant a_1a_2\cdots a_{n+1}$,即

$$\frac{1}{n+1}(a_1+\cdots+a_{n+1})\geqslant\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}$$

故式(1.2.3)对 $n+1$ 成立. 所以,对任意自然数 $n\in\mathbf{Z}_+$,不等式(1.2.3)成立.

注意:根据最小数原理,我们可以取 M_c 来代表正整数集 $\mathbf{Z}_+$. 也就是说,如

果某一个命题是从某一个整数开始成立,这时仍然可以利用数学归纳法来证明,只要把定理 1.2.1 中条件(1)$n=1$ 换成 $n=c$ 即可.

例 1.2.5 证明:当 $n\geqslant 3$ 时,n 边形的内角和等于$(n-2)\pi$.

证明:当 $n=3$ 时,命题成立. 因为三角形内角和 $\pi=(3-2)\pi$.

假设 $n=k(k\geqslant 3)$时命题成立,对任意一个 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$(如图 1.2.1). 连接 A_1A_3,那么 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$的内角和等于三角形 $A_1A_2A_3$ 的内角和与 k 边形 $A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$的内角和之和. 前者和为 π,后者归纳假设为$(k-2)\pi$.

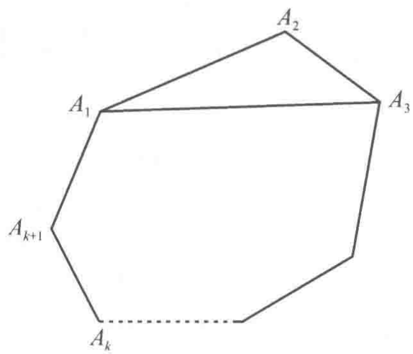

图 1.2.1

因此 $k+1$ 边形 $A_1\cdots A_kA_{k+1}$内角和为

$$\pi+(k-2)\pi=(k-1)\pi=[(k+1)-2]\pi$$

所以对任意的正整数 $n(n\geqslant 3)$,结论成立.

在有些情况下,归纳法假定"命题 $P(n)$ 对于 $n=k$ 成立"还不够,而需要较强的假定.

定理 1.2.2(第二数学归纳法) 设有一个与正整数 n 有关的命题 $P(n)$. 如果

(1)当 $n=1$ 时,$P(n)$成立.

(2)假设对于 $n<k$ 的自然数 $P(n)$成立,则 $n=k$ 时,$P(n)$也成立.

那么 $P(n)$对一切自然数都成立.

证明:考虑命题 $Q(n)$:"对所有 $1\leqslant k\leqslant n, k\in\mathbf{Z}_+$,$P(k)$都成立."则由 $Q(n)$成立,可知 $P(n)$成立.

当 $n=1$ 时,由(1)知 $P(n)$成立,从而 $Q(n)$成立.

假设 $Q(n-1)(n\geqslant 2)$成立,即对所有 $1\leqslant k\leqslant n-1$,$P(k)$都成立,由(2)知 $P(n)$成立,所以对 $1\leqslant k\leqslant n$,$P(k)$成立,从而 $Q(n)$成立. 于是由第一数学归纳法可知对任意 $n\in\mathbf{Z}_+$,$Q(n)$都成立,进而 $P(n)$成立.