中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

多复变数函数引论

陆启铿 / 编著
周向宇 / 校

科学出版社

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

多复变数函数引论

陆启铿　编著
周向宇　校

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是多复变函数论方面的入门书，着重介绍多复变数的解析函数、正交系与核函数、解析映照、零点与奇异点等方面的基本结果及存在的主要问题. 这些问题有的已获得一些结果，有的尚待进一步研究.

本书供大学数学系高年级学生阅读及教师参考，本书也可供理论物理学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

多复变数函数引论/陆启铿编著. —北京：科学出版社，2018.12
ISBN 978-7-03-047030-0

Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①陆… Ⅲ. ①多复变函数论-高等学校-教材
Ⅳ. ①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 010987 号

责任编辑：胡庆家 赵彦超／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 12 月第一次印刷 印张：10 1/4
字数：200 000

定价：79.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

再版说明

陆启铿先生是新中国培养的国际一流数学家. 作为华罗庚先生归国后的首批亲传弟子, 陆先生凭借自己的执着和过人禀赋, 在多复变和数学物理领域做出了大量奠基性和开创性的工作, 取得了国际瞩目的成就. 陆先生是我国多复变研究与数学物理研究的开拓者和领导者之一. 他于 20 世纪 50 年代发表的论文《Schwarz 引理及解析不变量》, 是国际上较早地将多复变函数与复几何联系起来的工作, 一个推论是 Carathéodory 度量不超过 Bergmann 度量, 另一推论在国外知名书籍中被冠以他人之名作为定理出现. 他与华罗庚先生合作发表了《典型域的调和函数论》, 建立了典型域上调和函数的系统理论. 1966 年陆先生发现并证明了 Bergmann 度量常曲率的有界域解析等价于单位球的定理, 并提出了 "陆启铿猜想". 他率先明确指出的物理上的规范场和数学上的纤维丛的联络之间的联系, 产生了广泛影响. 他的相关成果在国际上被称为 "陆启铿定理" "陆启铿域" "陆启铿不变量" 和 "陆启铿常数" 等; 他提出的 "陆启铿猜想" 是新中国成立后国际数学界首次以中国数学家命名的猜想, 至今仍为多复变的研究热点.

1961 年, 科学出版社出版了陆启铿先生的著作《多复变数函数引论》, 这是国内第一本多复变入门书, 大学数学系高年级学生就能阅读. 该书介绍多复变的解析函数、Bergmann 核及 Bergmann 度量、解析映照、零点与奇异点等方面的基本结果及相关的主要问题, 包括作者上述关于 Schwarz 引理的被误冠他人之名的研究成果. 今天看来, 该书仍不失为学生学习、了解多复变的优秀入门书, 对数学工作者也是有特色、有价值的参考书.

本次再版, 将繁体字改为了简体字, 对目前不太通用的术语进行了替换并给出了注释, 同时还添加了人名与术语的索引. 在再版校对中, 得到李震乾博士的协助, 在此表示感谢.

周向宇

2018 年 10 月 18 日

序

多复变数函数论的研究, 可以说已有悠久的历史了, 但直到 19 世纪末与 20 世纪初, Poincaré, Cousin, Hartogs, Levi 等人的工作相继出现, 显示出它与单复变数函数论的本质差别后, 才引起较多的人专门研究之. 然而, 甚至在 20 世纪中叶开始时, 数学家 H. Weyl 回顾前五十年的数学发展情况, 当他说到多复变数函数论时, 仍谓它还处于幼稚时代. 他的话刚说过不久, H. Cartan 及 J.-P. Serre 漂亮地解决了 Cousin 问题, 其后 K. Oka 解决了 Levi 猜想, 而最近 Пятецкий-Шапиро 又给 É. Cartan 猜想以反例. 这些问题对多复变数函数论的发展是十分重要的, 而以往被认为是相当困难的. 数学上一个有意义的问题的解决与一个有价值的猜想的肯定或否定, 往往引起更多、更深刻的问题的研究; 此外, 解决问题时所创造的工具与所运用的技巧, 又往往可应用到其他科学部门. 因之近十年来多复变数函数论有比较迅速的发展, 有更多的数学家研究它, 并且应用范围逐渐超越出纯粹数学领域. 例如, 在量子场论的重要问题色散关系的研究中, 正有人应用多复变数解析函数的展拓理论. 至于在数学的内部分支方面, 多复变数函数论的应用更是广泛.

在国内, 华罗庚教授研究多复变数函数论已十余载, 他的工作是丰富的, 受到国内外数学工作者的重视. 然而从全国来说, 以往研究多复变数函数的数学工作者只有极少数. 最近这种情况正在改变, 逐渐有更多的人重视这门学科, 并希望对多复变数函数论开始进行研究或要求有一些了解. 但是中文的介绍多复变数函数论的入门书籍还未曾有, 作者写本书目的之一, 便是企图对有兴趣于多复变数函数论的同志作一概括性的、入门性的介绍.

由于多复变数函数论的已有结果十分丰富, 并且它们的证明需要许多数学工具 (包括代数的、微分几何的、李群的、拓扑的、微分方程的、单复变数函数论的、泛函的工具), 要作一全面而深入的介绍, 不仅要浩繁的篇幅, 而且是作者的能力所不及. 作者仅希望对于多复变数函数论的最基本的结果与存在的主要问题作一比较全面的介绍, 同时要使得具有相当于大学数学系三、四年级知识水平的人也能够阅读. 至于要用到其他较深刻数学工具的结果, 则只有叙述其大概而不加详细证明. 有兴趣的读者可根据书中所介绍的情况及所引用的文献, 沿此线索而深入研究.

有一点值得注意的, 虽然本书绝大部分定理及例题仅用不超过通常数学系同学的知识水平便能证明, 但证明中有一些地方是有意省略的, 留给读者作为习题, 读者要比较仔细的, 并且往往要经过一些思索才能证明. 另一方面, 有一些结果的证明, 为了仅使用初等的方法, 不免要比原来的证明累赘, 这希读者原谅.

在 1959 年秋至 1960 年夏, 作者曾试用本书在北京大学数学系四年级函数论专门化作为授课的讲义, 发觉其中缺点很多, 虽然已作了一些修改, 相信还会存在不少的缺点. 希望各方面的读者阅后提供宝贵的批评和意见, 以便将来作更进一步的修正.

最后, 作者衷心地感谢我的老师华罗庚教授对本书所提出的许多珍贵的意见. 许以超同志对本书手稿的校阅、誊写方面的帮助, 也在此表示感谢.

陆启铿

1960 年 9 月 14 日于北京

目　录

第 1 章　多复变数的解析函数

1.1　解析函数

我们命 $\mathbb{C}^n$ 表 n 个独立的复变数 $z_1, \cdots, z_n$ 的空间. 此空间的点为一组 n 个有限的复数 $(a_1, \cdots, a_n)$. 为简便起见, 我们常以 z 代表 n 个复变数, 即 $z = (z_1, \cdots, z_n)$, 而以 a 代表此空间的点, 即 $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

以 a 为展开点的 (n重) 幂级数

$$\sum_{m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \cdots (z_n - a_n)^{m_n} \tag{1.1.1}$$

($a_{m_1 \cdots m_n}$ 为常数) 称为在 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 点收敛, 如果在 $z = b$ 点①有一个方法把此级数排列成为单级数, 而此级数是收敛的.

空间 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆柱 $P(a, r)$ 为一点集, 由适合下列不等式的 z 点组成:

$$|z_1 - a_1| < r_1, \cdots, |z_n - a_n| < r_n,$$

此处 $r = (r_1, \cdots, r_n)$ 是一组 n 个正数, 而 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 点称为多圆柱的中心.

定理 1.1.1　若级数 (1.1.1) 在 $z = b$ 点收敛, 则此级数在多圆柱

$$|z_1 - a_1| < |b_1 - a_1|, \cdots, |z_n - a_n| < |b_n - a_n|$$

中任一紧致子集上一致收敛.

此定理可仿单重幂级数的相应定理的证明而得之, 即方法上是平行的推广. 读者试自证之.

在 a 点解析的函数或函数元素 $f(z) \equiv f(z_1, \cdots, z_n)$, 即 $f(z)$ 在一以 a 点为中心的多圆柱 $P(a, r)$ 定义并在此多圆柱能展为收敛的幂级数者, 由幂级数的理论可知, 在 $P(a, r)$ 的每一点 $c = (c_1, \cdots, c_n)$, 级数 (1.1.1) 若在 $P(a, r)$ 收敛, 则能以 c 为展开点在一多圆柱 $P(c, \delta)$ [$\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$ 为一组适当小之正数] 展为收敛的幂级数, 因之 $f(z)$ 在 $P(a, r)$ 的每一点皆是解析的.

又由幂级数的理论知, $f(z)$ 在 $P(a, r)$ 是连续的, 其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial z_\alpha}$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ 存在②, 且等于级数的逐项偏导数之和; 此外 $\dfrac{\partial f}{\partial z_\alpha}$ 在 $P(a, r)$ 也是解析的, 因之 $f(z)$

①$z = b$ 即 $z_1 = b_1, \cdots, z_n = b_n$.

②如单复变数函数论一样, 有人利用偏导数的存在定义解析 (参阅 §1.4).

有任意次的对 $z_1, \cdots, z_n$ 的连续偏微分, 并且易证 $f(z)$ 的展式的系数适合

$$a_{m_1\cdots m_n} = \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\left[\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right]_{z=a}. \tag{1.1.2}$$

在 $P(a,r)$ 中, 当 $z_1,\cdots,z_{\alpha-1},z_{\alpha+1},\cdots,z_n$ 固定时, 显然 $f(z)$ 是单复变数 z_α 的在圆 $|z_\alpha - a_\alpha| < r_\alpha$ 解析的函数. 若命 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ $(\alpha = 1,2,\cdots,n)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 其中 $x = (x_1,\cdots,x_n)$, $y = (y_1,\cdots,y_n)$ 是实变数, u 与 v 是实函数, 则根据单复变数解析函数的性质知道, 对每一整数 α $(= 1,\cdots,n)$, u 与 v 适合 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}. \tag{1.1.3}$$

$\mathbb{C}^n$ 中的一开集 D 定义为 $\mathbb{C}^n$ 的一个子集, 对 D 的每一点 a 能有一多圆柱 $P(a,r)$ 包含于 D 者. 开集 D 称为 (单叶) 域, 如果 D 是连通的. 在单叶域 D 定义的函数 $f(z)$, 在每一点 $z \in D$, 对应有唯一的复数值 $f(z)$. 若 $f(z)$ 在 D 的每一点皆是解析的, 则 $f(z)$ 称为在域 D 解析[①].

利用单复变数函数论的 Liouville 定理, 立刻得到

定理 1.1.2 若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 解析并且有界, 则必为常数.

1.2 多圆柱的 Cauchy 积分

设 D_α 为 z_α 平面的一域, 广义多圆柱 $D_1 \times \cdots \times D_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的域, 由所有的 $z = (z_1,\cdots,z_n)$ 点所组成, 其中 $z_1 \in D_1,\cdots,z_n \in D_n$.

现设每一 D_α 皆是 z_α 平面的有界域, 其边界 C_α 由有限多个互不相交的、有长的、简单的闭曲线组成. 设 $f(z)$ 在 $D_1 \times \cdots \times D_n$ 解析, 且在其边界仍然连续, 则对任一点 $z \in D_1 \times \cdots \times D_n$ 有广义多圆柱的 Cauchy 公式

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\cdots\int_{C_1\times\cdots\times C_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n. \tag{1.2.1}$$

实际上, 当 $n = 1$ 时上式是熟知的. 利用归纳法, 假设 $n-1$ 个复变数时上式成立. 现在视 $f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 为 z_1 的在 D_1 解析的函数族, $z_2,\cdots,z_n$ 为参数, 则由 $f(z)$ 的连续性假定知, $f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是单复变数 z_1 的正规族, 并且对任一组数 $\zeta_2 \in C_2,\cdots,\zeta_n \in C_n$, 函数

$$f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n) = \lim_{z_2\to\zeta_2,\cdots,z_n\to\zeta_n} f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

①在单叶域上定义的解析函数即单值的解析函数. 非单叶域的定义比较复杂, 本书只限于讨论单叶域. 以后我们简称单叶域为域.

仍然在 D_1 解析. 应用归纳法的假定, 便有

$$
\begin{aligned}
&f(z_1, z_2, \cdots, z_n)\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{C_2\times\cdots\times C_n}\cdots\int \frac{f(z_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_2\cdots d\zeta_n\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^{n}} \int\limits_{C_2\times\cdots\times C_n}\cdots\int \frac{d\zeta_2\cdots d\zeta_n}{(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)} \int_{C_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.
\end{aligned}
$$

由于 $f(\zeta)$ 的连续性, 上式即 (1.2.1).

由 (1.2.1) 易知

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\\
&= \frac{m_1!\cdots m_n!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_1\times\cdots\times C_n}\cdots\int \frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1+1}\cdots(\zeta_n - z_n)^{m_n+1}}.
\end{aligned}
\tag{1.2.2}
$$

特别取 D_α 为圆 $|z_\alpha - a_\alpha| < r_\alpha$ 时, 由上式及 (1.1.2) 可得

$$
\begin{aligned}
a_{m_1\cdots m_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} &\int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1}\cdots\\
&\cdots\int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{m_1+1}\cdots(\zeta_n - a_n)^{m_n+1}}
\end{aligned}
\tag{1.2.3}
$$

及

$$
|a_{m_1\cdots m_n}| \leqslant \frac{M}{r_1^{m_1}\cdots r_n^{m_n}},
\tag{1.2.4}
$$

其中 M 是 $|f(\zeta)|$ 在 $|\zeta_1 - a_1| = r_1, \cdots, |\zeta_n - a_n| = r_n$ 之高界.

若有在域 D 解析的函数 $f(z)$. 在 D 的一点 a 取一多圆柱 $P(a, r)$, 其闭包 $\overline{P}(a, r)$:

$$
|z_1 - a_1| \leqslant r_1, \cdots, |z_n - a_n| \leqslant r_n
$$

仍然包含于 D 中, 则由 (1.2.3) 及 (1.2.4) 可知

定理 1.2.1 若 $f(z)$ 在域 D 解析, 则它在域 D 的 a 点的展式 (1.1.1) 是唯一的, 并且此展式在任一包含于 D 的以 a 为心的多圆柱成立.

定理 1.2.2 若 $f(z)$ 在域 D 解析, 且在域 D 中一非空的开子集上等于零, 则 $f(z)$ 在整个域 D 恒等于零.

实际上, $f(z)$ 最少在一包含于 D 的多圆柱 $P(a, r)$ 内恒等于零. 如 b 是 D 的任一点, 可以用 D 中的一曲线与 a 点相联, 而以有限个包含于 D 的多圆柱盖过此曲线, 则 $f(b)$ 亦必须等于零, 只要我们证明, 在一多圆柱解析的函数若在一非空开子集上为零则恒等于零. 后者用解析函数的幂级数展式是容易证明的.

定理 1.2.3　设 $f(z)$ 在原点的邻域 P_n:

$$|z_1| < r_1, \cdots, |z_n| < r_n$$

中解析, 命 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha\ (\alpha = 1, \cdots, n)$. 若 $f(z)$ 在点集

$$-r_\alpha < x_\alpha < r_\alpha, \quad y_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

(或者在 $x_\alpha = 0, -r_\alpha < y_\alpha < r_\alpha, \alpha = 1, \cdots, n$) 上等于零, 则 $f(z)$ 在 P_n 中恒等于零.

证　$f(z)$ 可在 P_n 中展为收敛的幂级数

$$f(z) = \sum_{m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}.$$

当 $z_1, \cdots, z_n$ 取实值时, 级数

$$f(x) = \sum_{m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} = 0.$$

因此

$$\frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} = 0,$$

特别是

$$a_{m_1 \cdots m_n} = \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \left[\frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} \right]_{x=0} = 0.$$

由此知 $f(z) \equiv 0$. 证毕.

定理 1.2.4　若 $2n$ 个复变数的函数

$$f(z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \cdots, z_n, \zeta_n)$$

在 $\mathbb{C}^{2n}$ 空间的原点的邻域解析, 而在此邻域中适合下面条件的子集 ($\overline{z}_\alpha$ 表 z_α 的复数共轭)

$$\zeta_1 = \overline{z}_1, \cdots, \zeta_n = \overline{z}_n \tag{1.2.5}$$

上为零, 即

$$f(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \cdots, z_n, \overline{z}_n) = 0,$$

则在整个邻域中

$$f(z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \cdots, z_n, \zeta_n) \equiv 0.$$

证　我们作线性变换

$$u_\alpha = \frac{z_\alpha + \zeta_\alpha}{2}, \quad v_\alpha = \frac{z_\alpha - \zeta_\alpha}{2i}, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

其逆变换为

$$z_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha, \quad \zeta_\alpha = u_\alpha - iv_\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

函数

$$\varphi(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n) \equiv f(u_1 + iv_1, u_1 - iv_1, \cdots, u_n + iv_n, u_n - iv_n)$$

在复变数 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n$ 空间的原点的邻域解析.

适合条件 (1.2.5) 的点集, 经变换映为 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n$ 空间的适合下面条件的点集:

$$(u_\alpha - \overline{u}_\alpha) - i(v_\alpha - \overline{v}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

此乃表示 $\varphi(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)$ 在 u_α, v_α 取实值时等于零. 据定理 1.2.3, 它必须恒等于零, 因之 $f(z_1, \zeta_1, \cdots, z_n, \zeta_n)$ 亦然.

定理 1.2.5 若 $f(z)$ 在域 D 解析且非常数, 则 $|f(z)|$ 不能在 D 的内点达到其最大值. 如 $f(z)$ 在 D 的边界仍然连续, 则 $|f(z)|$ 在边界上达到其最大值.

实际上只要证明, 如果 $|f(z)|$ 在 D 的一内点 a 达到其极大值, 则 $f(z)$ 在 D 为常数. 据定理 1.2.2, 这只要证明 $|f(z)|$ 在一包含于 D 的多圆柱 $P(a, r)$ 为常数便可. 设 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 为 $P(a, r)$ 的任一点, 据假设, $|f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)| \geqslant |f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_n)|$, 当 $|z_n - a_n| < r_n$. 应用单复变数函数论的极大模原理知, $f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_n)$ 为常数, 故有 $f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-1}, b_n)$. 再应用极大模原理于单变数函数 $f(a_1, \cdots, a_{n-2}, z_{n-1}, b_n)$ 可知, $f(a_1, \cdots, a_{n-2}, b_{n-1}, b_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, b_n)$. 如此继续, 最后得出 $f(a_1, \cdots, a_n) = f(b_1, \cdots, b_n)$, 故 $f(z)$ 在 $P(a, r)$ 为常数. 定理第二部分的证明是显然的.

值得注意的是, 如 $f(z)$ 在边界仍然连续, 则 $|f(z)|$ 往往在边界的某一子集 (不必包括全部边界) 达到其最大值. 此子集由域 D 的几何结构所确定, 这里仅以单位闭多圆柱 $\overline{P}_n$:

$$|z_1| \leqslant 1, \cdots, |z_n| \leqslant 1$$

为例.

如 $f(z)$ 在 $\overline{P}_n$ 连续且在其内点解析, 则 $[f(z)]^k$ 亦有此性质 (k 为任意的正整数). 应用多圆柱的 Cauchy 公式得①

$$f^k(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathfrak{L}_n} \frac{f^k(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

其中 $\mathfrak{L}_n$ 代表点集

$$|z_1| = 1, \cdots, |z_n| = 1.$$

①为简便起见, 在不致引起混乱的情况下, 我们往往用一重积分符号代表多重积分符号.

我们有估值

$$|f(z)|^k \leqslant \frac{M^k}{(2\pi i)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_n}{|e^{i\theta_1}-z_1|\cdots|e^{i\theta_n}-z_n|}$$

或

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{(2\pi)^{\frac{n}{k}}}\left\{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_n}{|e^{i\theta_1}-z_1|\cdots|e^{i\theta_n}-z_n|}\right\}^{\frac{1}{k}},$$

其中 $M=\sup\limits_{\zeta\in\mathfrak{L}_n}|f(\zeta)|, \zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$.

命 $k\to\infty$, 我们有

$$|f(z)|\leqslant M,$$

此乃表示 $|f(z)|$ 在 $\mathfrak{L}_n$ 达到其最大值. 注意 $\mathfrak{L}_n$ 仅是 $\overline{P}_n$ 的边界的 n 维子集, 而 $\overline{P}_n$ 的边界是 $(2n-1)$ 维点集. $\mathfrak{L}_n$ 称为 P_n 的特征流形.

除多圆柱外, 其他域的 Cauchy 公式的研究可参阅 A. Weil [1], Bergmann [1], Martinelle [1], 华罗庚 [5], 华罗庚与陆启铿 [1] 等人的工作.

1.3 形式微分

视

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha,\quad \overline{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

或

$$x_\alpha=\frac{z_\alpha+\overline{z}_\alpha}{2},\quad y_\alpha=\frac{z_\alpha-\overline{z}_\alpha}{2i}$$

为变数的变换而引进形式微分

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \tag{1.3.1}$$

即若 $f(x,y)$ 是实变数 x,y 的有连续偏微分的函数, 则定义

$$\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}-i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}+i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right).$$

如是 Cauchy-Riemann 方程 (1.1.3) 可书为下面简洁的形式

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\alpha}=0,\quad \alpha=1,\cdots,n, \tag{1.3.2}$$

其中 $f=u+iv$.

应用形式微分, 我们有

定理 1.3.1 若 $f_\alpha(z)=u_\alpha(x,y)+iv_\alpha(x,y)$ 是 z 的在某一域解析的函数, 则在此域中有如下的恒等式:

$$\det\frac{\partial(u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)}=\left|\det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\right|^2,$$

此处我们以 $\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$ 表函数方阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1}\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{pmatrix},$$

而 $\det A$ 表一方阵 A 的行列式.

证 应用 Cauchy-Riemann 方程, 经计算可得矩阵关系式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & -iI\\ I & iI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} & \dfrac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\\ \dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} & \dfrac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & I\\ iI & -iI\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)} & O\\ O & \overline{\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}}\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

其中 I 表 $n\times n$ 么方阵, 即

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

由 (1.3.3) 立得定理.

定理 1.3.2 设

$$f_\alpha(z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_m),\quad \alpha=1,\cdots,n$$

是 $m+n$ 个复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n),w=(w_1,\cdots,w_m)$ 的函数, 在 $\mathbb{C}^{m+n}$ 空间的 $z=a=(a_1,\cdots,a_n),w=b=(b_1,\cdots,b_m)$ 点的邻域①解析. 若 $f_\alpha(a,b)=0,\alpha=$

①所谓一点的邻域就是包含此点的开集.

$1, \cdots, n$, 而

$$\left[\det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}\right]_{z=a, w=b} \neq 0,$$

则函数方程

$$f_\alpha(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_m) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n \tag{1.3.4}$$

有唯一的解

$$z_\alpha = g_\alpha(w_1, \cdots, w_m), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

并且此解在 $\mathbb{C}^m$ 空间的 $w = b$ 点的邻域解析. 此外 $g_\alpha(b) = a_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$.

证 命 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, f_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ 及 $w_k = s_k + it_k$ $(k = 1, \cdots, m)$. 根据假设及定理 1.3.1 知

$$\left[\det \frac{\partial(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)}\right]_{z=a, w=b} \neq 0.$$

根据实变数的隐函数理论知, 方程 (1.3.4) 有唯一的解

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(s, t), \quad y_\alpha = \psi_\alpha(s, t), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

其中 φ_α 与 ψ_α 是实变数 $s = (s_1, \cdots, s_m), t = (t_1, \cdots, t_m)$ 的在 $w = b$ 点邻域中的实解析函数①.

命 $g_\alpha = \varphi_\alpha + i\psi_\alpha$. 在 (1.3.4) 中对 $\overline{w}_k$ 微分, 有

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{w}_k} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{z}_\beta} \frac{\partial \overline{g}_\beta}{\partial \overline{w}_k} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta} \frac{\partial g_\beta}{\partial \overline{w}_k} = 0.$$

由于 $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{z}_\beta} = 0, \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{w}_k} = 0$, 我们得

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta} \frac{\partial g_\beta}{\partial \overline{w}_k} = 0.$$

由于 $\det \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}$ 可在 $z = a, w = b$ 点的充分小邻域中不为零, 根据齐次线性方程的理论知, 必须

$$\frac{\partial g_\beta}{\partial \overline{w}_k} = 0.$$

①在 n 维实欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一域定义的实解析函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, 即在此域的每一点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 有一邻域, 在其中 φ 能展为 $x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n$ 的收敛的幂级数.

此式在 $\mathbb{C}^m$ 空间的 $w=b$ 点的充分小邻域 $P(a,r)$ 中成立. 此乃表示 $g_\beta(w)$ 当 $w_1,\cdots,w_{k-1},w_{k+1},\cdots,w_m$ 固定时是 w_k 的解析函数. 我们取 $P(b,r)$ 如此之小, 使得 $g_\beta(w)$ 在 $P(b,r)$ 的闭包连续. 重复应用单复变数的 Cauchy 公式得

$$\begin{aligned} g_\beta(w) &= \frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{|\zeta_1-b_1|=r_1}\cdots \\ &\quad \cdots\int_{|\zeta_m-b_m|=r_m}\frac{g_\beta(\zeta_1,\cdots,\zeta_m)d\zeta_1\cdots d\zeta_m}{(\zeta_1-w_1)\cdots(\zeta_m-w_m)} \\ &= \sum_{k_1,\cdots,k_m=0}^{\infty} a_{k_1\cdots k_m}(w_1-b_1)^{k_1}\cdots(w_m-b_m)^{k_m}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{k_1\cdots k_m} &= \frac{1}{r_1^{k_1}\cdots r_m^{k_m}} \\ &\times\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g_\beta(b_1+r_1e^{i\theta_1},\cdots,b_m+r_me^{i\theta_m})e^{-ik_1\theta_1}\cdots e^{-ik_m\theta_m}d\theta_1\cdots d\theta_m. \end{aligned}$$

上面的级数在 $P(b,r)$ 中收敛, 故 $g_\beta(w)$ 是 w 的在 $w=b$ 点邻域中解析的函数. 定理得证.

设 u 是在一域 D 解析的函数 $f(z)$ 的实部, 即 $u=\frac{1}{2}(f+\overline{f})$. 由此可见 u 适合偏微分方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta}=0,\quad \alpha,\beta=1,\cdots,n \tag{1.3.5}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial y_\beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta\partial y_\alpha}=0,\quad \alpha,\beta=1,\cdots,n. \tag{1.3.6}$$

显然 $f(z)$ 的虚部 $v=\frac{1}{2i}(f-\overline{f})$ 亦适合方程 (1.3.5).

有二阶连续偏微分的实值函数 $u(x,y)$ 适合偏微分方程组 (1.3.5) 者称为 *B*-调和函数[1] (在 $n=1$ 时即普通的调和函数).

反之, 给与一域 D 的 B-调和函数 u, 是否存在一 B-调和函数 v, 使得 $u+iv$ 在 D 解析? 回答是肯定的. 由线积分定义的函数

$$v(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)=\int_{z_0}^{z}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\alpha}dx_\alpha+\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}dy_\alpha\right) \tag{1.3.7}$$

便是所求的函数. 但是要注意, v 一般是非单值函数, 除非 D 是单连通的 (即在 D 中的任一闭简单曲线能连续地在 D 缩为一点). 后一断言要借助 Stokes 公式证明, 这里从略.

[1] 现译为“多调和函数 (pluriharmonic function)”. —— 校者注