北京市教委“基于体适能背景下的运动人体科学学科与心理学科建设”项目资助
PXM 2009-014206-075629

高等数学

张　健／编著

GAODENG SHUXUE

北京体育大学出版社

能背景下的运动人体科学学科与心理学科建设”项目资助

629

高等数学

张 健 编著

北京体育大学出版社

策划编辑：李　飞
责任编辑：白　珺
审稿编辑：李　飞
责任印制：陈　莎

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/张健编著.—北京：北京体育大学
出版社，2010.12
ISBN 978-7-5644-0606-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学－高等学校－
教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第249887号

高等数学　　　　**张　健　编著**

出　　版：北京体育大学出版社
地　　址：北京市海淀区信息路48号
邮　　编：100084
邮 购 部：北京体育大学出版社读者服务部 010-62989432
发 行 部：010-62989320
网　　址：www.bsup.cn
印　　刷：北京昌联印刷有限公司
开　　本：787×960毫米　　1/16
印　　张：21.5

2011年4月第1版　2011年4月第1次印刷
定　价：48. 00元
（本书因装订质量不合格本社发行部负责调换）

作者简介

张　健　1986年毕业于北京大学，获理学学士，2006年获得澳大利亚科技大学硕士学位。副教授、硕士研究生导师，现任首都体育学院解剖生物力学教研室主任，2002年获北京市优秀人才培养专项经费资助，2003年北京市精品教材《运动技术诊断》主编。给在校运动训练专业、体育教育专业和人体科学专业的本科生和研究生主要讲授《运动生物力学》、《运动技术诊断学》《高等数学》三门课程。

近五年，主要对教学方法和教学手段的发展进行深入系统的研究，发表科研论文6篇，主要刊登在国际体育科学论文大会、体育科学核心期刊、全国体育科学论文大会、首都体育学院学报等学术刊物。主编北京市高校精品教材《运动技术诊断》。

2003年荣获首都体育学院《蔡红军奖教基金》；2004年荣获首都体育学院优秀本科教学课教师称号；2005年荣获首都体育学院“三育人”称号；2005年荣获首都体育学院优秀教学成果三等奖；2005年荣获理论学科部教育成果评比二等奖。

近五年来，（1）获得北京市优秀人才项目资助；（2）主持负责国家体育总局有关运动生物力学技术分析的部委级课题；（3）主编北京市高校精品教材《运动技术诊断》。

前 言

高等数学是高等学校许多专业学生必修的重要基础理论课程，它对学生综合能力的培养起到了及其重要的作用。

在科学技术迅速发展的今天，数学作为一种手段和一门工具，在几乎所有学科中都发挥了及其重要的作用，并产生了前所未有的推动力。掌握好高等数学的基本理论、基本技能和分析方法，对于刚进入大学的学生来说掌握起来有一定的难度，本书是根据我二十多年的教学经验，按照新形势下教材改革的精神，结合高校学生的实际，并对教材的内容进行了精心的选择，进行全面撰写的，是面向21世纪课程教材。

本书在编写过程中力图体现下述特点：

1.结构严谨：按照教学的基本要求、任务，充分考虑高校学生的特点和当前高等数学教学的实际编写的。

2.叙述详细：重点突出，重难点分明，重视学生空间图像能力、抽象概括能力、逻辑推理能力和应用数学的意识与能力。

3.便于自学：本书对基本概念、基本理论、基本方法都作了深入浅出的介绍，配备了较多的例题和练习，重视培养学生的自学能力。

全书包括函数与极限、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和常微分方程等9章内容，各节均配有较为丰富的例题和习题，并附有习题参考答案，以方便学生自学。

编者

2010年9月

绪论

什么是数学呢？数学就是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，在过去近一个世纪的时间中，数学、作为一种手段，一门工具，在几乎所有学科中都发挥了及其重要的作用，并产生了前所未有的推动力。当然，在历史的长河中，数学的发展也分为了几个阶段：

第一个阶段：数学萌芽时期（远古—公元前5世纪），算术几何形成时期，当时算术与几何还未分开，彼此交织在一起，没有形成完整严格的体现，缺乏逻辑性，基本上看不到命题证明、演绎、推理。

第二个阶段：常量（初等）数学时期（公元前5世纪—17世纪中叶），数学逐步形成了一门独立的、演绎的学科，算术、初等几何、初等代数、三角学都已成为独立的分支。

第三个阶段：变量（高等）数学时期（17世纪中叶—19世纪中叶），变量与函数的概念引入数学，解析几何、微积分、概率论、射影几何形成。

第四个阶段：近代数学时期（19世纪中叶—20世纪中叶），非欧几里得几何、抽象代数、复变函数论、集合论、微分几何、微分方程论、积分方程论、点集拓扑、组合拓扑。

第五个阶段：现代数学时期（20世纪中叶以来），（原子能的应用，电子计算机的发明，空间技术的兴起）广义函数论、整体微分几何、非标准分析、微分拓扑、代数拓扑、代数几何、模糊数学、计算数学……

由数学的历史看来，从古至今，数学从理论、应用、分类等方面都得到了极大的发展。当然，数学在各方面也都起到了重要的作用，所以我们从小就开始接触数学，既然学习了这么多年数学，为什么还要学习高等数学呢？

高等数学是高等学校许多专业学生必修的重要基础理论课程，数学是研究现实世界中的“数量关系”与“空间形式”。世界上任何客观存在都有其“数”和“形”的属性特征，并且一切事物都发生变化，遵循量变到质变的规律。

凡是研究量的大小、量的变化、量与量之间关系以及这些关系的变化就少不了数学。同样，客观世界存在有各种不同的空间形式。因此，宇宙之大，

粒子之微，光速之快，世事之繁……无处不用数学。

数学不但研究空间形式与数量关系，还研究现实世界中的任何形式和关系，只要这种形式和关系能抽象出来，用清晰准确的方式表达，即所谓化为数学模型。

在今天数学中，“数”和“形”的概念已发展到很高的境地，比如：非数之“数”的众多代数结构，像群、环、域等，无形之形的一些抽象空间，像非欧几里得空间、线性空间、拓扑空间、流形等。

可以说，数学研究是各种抽象的“数”和“形”的模式结构，恩格斯曾经说过：“要辩证又唯物地了解自然，就必须掌握数学”。英国哲学家培根说过：“数学是打开科学大门的钥匙”。马克思还认为：“一种科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步”。既然数学如此重要，那么高等数学都应学些什么呢?

高等数学的内容有微积分学、向量代数和空间解析几何，但主要部分是微积分学，微积分学研究的对象是函数，而极限原则是微积分学的基础，也是最主要的推理方法。

微积分对于许多工程技术的重要性就像是望远镜之于天文学，显微镜之于生物学一样。与微积分创立密切相关的科学技术问题，从数学角度归纳起来有四类：1. 已知变速运动的路程，求瞬时速度和加速度；2. 求已知曲线的切线；3. 求给定函数的最大值与最小值；4. 求给定曲线长度，求平面曲线围成的面积，求已知曲面围成的体积，求物体的重心，已知变速运动物体的速度、加速度、求物体运动的路程与时间的关系等。

本书对上述问题进行了重点讲解与深化的练习，希望通过练习使学者对微积分有足够的重视。

通过高等数学的学习，要使同学们获得以下方面的基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础：1. 函数、极限、运算；2. 一元函数微积分学；3. 向量代数和空间解析几何；4. 多元函数微积分学；5. 无穷级数；6. 常微分方程等。

本书体现了高等数学的三个特点：高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的应用性。

希望读者通过阅读此书，对高等数学有一定的了解，产生一丝兴趣，有信心能学好高等数学，当然，本书中也会存在一些问题，欢迎广大读者与专家们批评指正。

目　录

第一章　一元函数与极限/1

第二章　导数与微分/32

第三章　微　分/80

第四章　微分中值定理与导数的应用/99

第五章　不定积分/148

第六章　定积分/185

第七章　多元函数与极限/228

第八章　无穷级数/267

第一章 一元函数与极限

第一节 映射与函数

定义1.1 映射：设X、Y是两个非空集合. 如果存在一个对应法则f使X中的每一个元素x按照对应法则f，总有Y中唯一的确定的元素y与x对应，则称f为X到Y的映射.记为$f:X\to Y$或$X\xrightarrow{f}Y$.

其中，x称为f的原象，X称为f的定义域，y称为x在f下的象，即$y=f\left(x\right)$. 并称集合$\left\{y=f\left(x\right),x\in X\right\}$为$f$的值域.

定义1.2 满单射：$f:X\to Y$是一个映射，若$\left\{y=f\left(x\right),\forall x\in X\right\}=Y$则称$f$是一个满射. $\forall x_1,x_2\in X$，且$x_1\neq x_2$，则有$f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$，则称$f$是一个单射. 若$f$既是满射又是单射，则称$f$为双射. 特别地：当$X=Y$时，称$f$为$x$的一一变换.

定义1.3 恒等映射：若$f:X\to X$，则称f为X恒等映射.

定义1.4 映射的合成：如果$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$，那么$\forall x\in X$，都有$gf:X\to Z$，那gf称为映射的合成.

定义1.5 函数：设x和y是两个变量，D是一个给定的非空集合.如果对于每个数$x\in D$一个变量y按照一定的对应法则f，总有唯一确定的x与之对应，则称y是x的函数，记$y=f\left(x\right)$.其中数集D叫做函数$y=f\left(x\right)$的定义域，x叫做自变量，y叫做因变量，$Y=\left\{y\mid y=f\left(x\right),x\in D\right\}$叫做值域.

例1 设$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x)=\sin x$ 这个 f 是一个映射，其定义域为$D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域为$[-1,1]$.

例2 $e^x+y^2=-5$能否成为一个函数?

解 因为e^x的取值范围为$(0,+\infty)$，y^2的取值范围为$[0,+\infty)$，所以e^x+y^2不可能等于-5. $e^x+y^2=-5$没有意义，所以不能成为一个函数.

例3 求$y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}$的定义域.

解 要使$y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}$有意义. X必须使$\sqrt{x-1}$及 $\frac{1}{x-2}$都有意义.

所以x要满足$\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$既$x\geq 1$且$x\neq 2$，所以$y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}$的定义域为$\{x\mid x\geq 1\text{且}x\neq 2\}$.

例4 $y_1=\log_3 x^2$和$y_2=2\log_3 x$是否表示同一个函数.

解 看到上面两个函数，有人会想到将$y_1=\log_3 x^2$变为$y_1=2\log_3 x$，便认为y_1与y_2是同一个函数其实这是十分错误的，在$y_1=\log_3 x^2$中自变量x的取值范围为$x\in R$，但在$y_2=2\log_3 x$中自变量x的取值范围为$\{x\mid x>0\}$，在$x\leq 0$时y_2无意义，由于定义域不同，所以y_1与y_2不能表示同一个函数.

例5 求函数$y=\sqrt{\cos x-1}$在$x=2k\pi$处的取值.

解 因为$x=2k\pi$处函数有意义，所以$y=\sqrt{\cos 2k\pi-1}=0$.

下面我们来介绍几个特殊的函数

1. 分段函数：自变量分几个部分，对应法则用不同的式子来表示的函数称为分段函数.符号函数 $y=\sin x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{为有理数})\\ 0 & (x\text{为无理数})\end{cases}$$

例 $f(x)=\begin{cases}2\log_3{}^{x} & (x>0)\\ 2 & (x\le 0)\end{cases}$ 以及上面我们给出的符号函数与狄利克雷函数.

2. 取整函数：设想 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数部分记为 $[x]$ 这个函数 $y=[x]$ 称为取整函数.

例1 $f(x)=[x]^2-2[x]+1$.

证 根据 $[x]$ 的定义，我们有 $x-1\le[x]\le x$，当 $x>0$ 时，

$1-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{[x]}{x}\le 1$，令 $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$，$g(x)=1$，$h(x)=1-x^{-1}$.显然，

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$. 夹逼定理，即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$.

3. 反函数：设 $y=f(x)$ 定义域是 x 到 $f(x)$ 上的单射.即任取 $y\in f(x)$ 存在唯一一个 $x\in X$ 使 $f(x)=y$,则有 $x=f^{-1}(y)$，其中 $y\in f(x)$，这是由 $f(x)$ 到 x 的一个新的对应关系，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

例2 求（1）$y=\sqrt{x+1}$（2）$y=\lg(x+5)$ 的反函数.

解 （1）$y=\sqrt{x+1}$ 的值域为 $y\geq 0$，所以反函数的定义域为 $x\geq 0$，$x=y^2-1$，即 $y=x^2-1$，所以 $y=\sqrt{x+1}$ 的反函数为 $y=x^2-1$ $(x\geq 0)$.

（2）$y=\lg(x+5)$ 的值域为 $y>0$，所以反函数的定义域为 $x>0$. $10^y=x+5$ 即 $y=10^x-5$，所以 $y=\lg(x+5)$ 得反函数为 $y=10^x-5$ $(x>0)$.

例3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

解　我们对函数 $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ 作适当的变形：$\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\dfrac{\sin\frac{3x}{3x}}{\sin\frac{2x}{2x}}\cdot\dfrac{3}{2}$.

令 $y=3x$，当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，这样 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

同样的道理，我们又有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$，于是我们得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\dfrac{3}{2}$.

下面我们给出函数的一般求法即求反函数的步骤：

步骤1 求原函数的值域，将其记为反函数的定义域.

步骤2 反解 x 用 y 将 x 表示出来.

步骤3 将 x 变为 y，y 变为 x.

步骤4 将新的 y 关于 x 的函数及定义域写在一起即为反函数.

第二节　初等函数及函数的简单性质

一、初等函数

1. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（$x\in R$）.

例 $y=x^{\frac{1}{2}}$

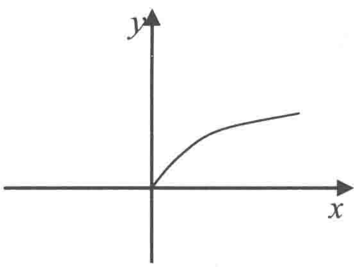

图1-1

$y=x$

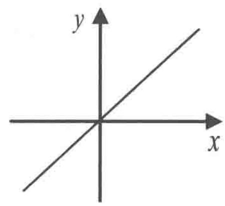

图1-2

$y=x^2$

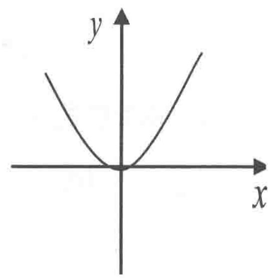

图1-3

$y=x^3$

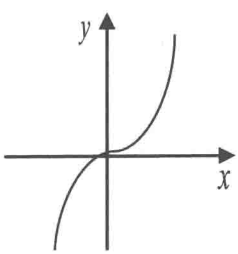

图1-4

$y=x^{-1}$

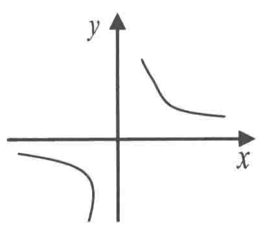

图1-5

2. 指数函数 $y=a^x$ $\left(a>0且a\neq 1\right)$.

例 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ $y=2^{x}$

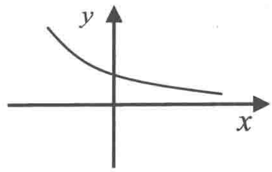

图1-6

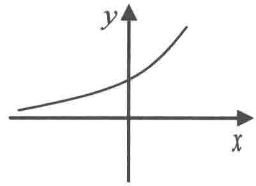

图1-7

所以当$0<a<1$时，$y=a^{x}$的图像为图1-6，在其定义域内为减函数。当$a>1$时，$y=a^{x}$的图像为图1-7，在其定义域内为增函数.

3. 对数函数$y=\log_{a}{}^{x}$ $(a>0且a\neq 1)$.

例 $y=\log_{\frac{1}{2}}{}^{x}$ $y=\log_{2}{}^{x}$

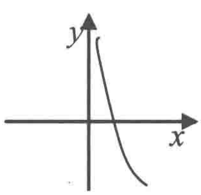

图1-8

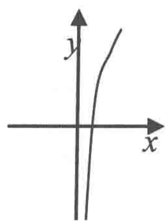

图1-9

所以当$0<a<1$时，$y=\log_{a}{}^{x}$的图像为图1-8，在其定义域内为减函数.当$a>1$时$y=\log_{a}{}^{x}$的图像为图1-9，在其定义域内为增函数.

4. 三角函数.

例： $y=\sin x$正弦函数 $y=\cos x$余弦函数

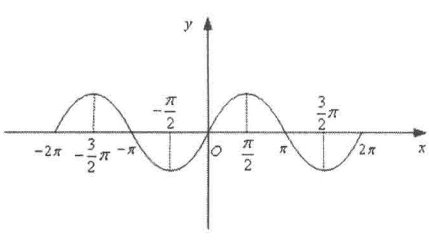

图1-10

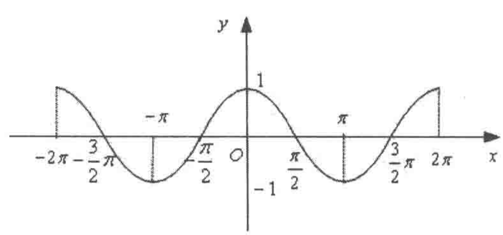

图1-11