学校“十三五”规划教材

JUZHEN LILUN JIQI YINGYONG

矩阵理论及其应用

（第二版）

黄有度　朱士信　殷　明　编著

合肥工业大学出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

校"十三五"规划教材

矩阵理论及其应用

（第二版）

黄有度　朱士信　殷　明　编著

图书馆

合肥工業大學出版社

内容提要

矩阵理论是数学的一个重要分支,同时在工程学科中有极其重要的应用.本书较为全面、系统地介绍了矩阵理论及其应用.全书共分为六章,内容包括线性空间与线性变换、矩阵特征值与约当标准形、矩阵的范数和幂级数、矩阵函数及其应用、矩阵分解、矩阵特征值的估计与广义逆矩阵等.为了便于读者学习,在各章后面还配有一定数量的习题,并在书末附有对各章习题较详细的解答.本书内容丰富,简明易懂,对内容的深度与广度进行了很好的结合.

本书可作为理工科院校研究生和数学专业高年级本科生的教材,也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵理论及其应用/黄有度,朱士信,殷明编著.—2版.合肥:合肥工业大学出版社,2018.8

ISBN 978-7-5650-4114-3

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①黄…②朱…③殷… Ⅲ.①矩阵论—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第196083号

矩阵理论及其应用(第二版)

黄有度 朱士信 殷 明 编著　　　责任编辑 汤礼广

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2018年8月第2版
地 址	合肥市屯溪路193号	印 次	2018年8月第3次印刷
邮 编	230009	开 本	710毫米×1000毫米 1/16
电 话	理工编辑部:0551—62903087	印 张	13.5
	市场营销部:0551—62903198	字 数	224千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	安徽昶颉包装印务有限责任公司
E-mail	hfutpress@163.com	发 行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-4114-3　　定价:31.00元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社市场营销部联系调换。

第二版前言

本书自 2013 年出版以来，先后被许多学校选为研究生和本科生的教材或参考书. 在多年使用过程中，广大师生陆续地发现本书仍存在一些错误以及需要完善的地方，为此，在本书再版过程中，我们结合自己的教学经验，并吸收了读者的合理化建议，对第一版进行了适当修订.

这次修订的主要内容有以下几点：

(1) 更正了一些印刷错误；

(2) 为了和现在的代数教材保持相对应，把原来的行向量全部改为列向量；

(3) 对一些定义及定理重新进行了修订，如正交补空间及相关的证明等；

(4) 增加了部分内容，如线性子空间中的基扩充引理等.

尽管我们对本书进行了认真修订，但再版后的本书仍然不可能十分完美，因此欢迎读者继续提供修改建议，以便我们对本书不断完善.

编著者

第一版前言

矩阵理论是数学学科的重要分支，在科学技术的许多领域——从自然科学、工程技术到经济管理、社会科学——都有重要的应用．现代科学技术，特别是计算机和计算技术的迅猛发展，为矩阵理论的应用和研究开辟了更加广阔的前景．因此，对许多专业的研究生来说，矩阵理论不仅是一门重要的基础课，而且对研究生学习其他课程和将来从事科研工作都有很大的帮助．

由于矩阵理论应用领域广泛，介绍矩阵理论的教材一般都不可能做到涉及很具体的应用方法，因此对矩阵理论这门课程，学习者往往会产生抽象、难懂的感觉．所以在编写本书的过程中，我们针对当前研究生教育的实际情况，在兼顾内容的深度与广度的同时，力求做到深入浅出、简明易懂．另外，为了便于学习者学习，我们在每一章末尾还配有一定数量的习题，并且在书后还附有习题的参考答案，不过我们希望学习者应尽量独立完成对习题的解答，否则练习的效果会大打折扣．

矩阵理论以线性代数为基础，因此要求学习者先牢固掌握和熟练运用线性代数的基本概念及计算方法．

本书分为六章．第一章介绍线性空间和线性变换，它是同线性代数的衔接点，本章内容已在线性代数中作了简单介绍，此处再进

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

行复习、补充和提高. 第二章介绍矩阵特征值与约当标准形，引入了多项式矩阵及其标准形、一般矩阵的约当标准形的概念和计算. 第三章介绍矩阵的范数和幂级数，引入了向量、矩阵的范数，并介绍了矩阵幂级数及其收敛性的判断方法. 第四章介绍矩阵函数及其应用，它是前面各章的抽象理论与实际应用之间的接口. 第五章是关于矩阵分解的内容，介绍了矩阵常用的几种分解方法. 第六章是关于矩阵特征值的估计与广义逆矩阵的内容，介绍了矩阵特征值的估计方法，并引入了广义逆矩阵的概念.

本书在编写过程中，得到了合肥工业大学研究生院和数学学院等部门的领导和同事们的大力支持与帮助，在此对他们表示衷心的感谢.

限于编著者的水平，书中难免存在不妥之处，望读者批评指正.

编著者

目　　录

第一章　线性空间与线性变换

本章将把向量空间的概念推广到线性空间，并讨论线性空间的一些性质.

第一节　线性空间

一、线性空间

在线性代数中已给出了向量与向量空间的概念.

n 个数构成的有序数组称为 **n 维向量**，由实数构成的向量称为**实向量**，所有 n 维实向量的集合记为 $\mathbf{R}^n$. 向量与向量之间定义了加法运算，数和向量之间定义了数乘运算. 加法运算和数乘运算满足下面将提到的一些特定规律.

若 V 是 n 维向量的非空集合，且对向量的加法和数乘运算封闭，即运算的结果仍属于该集合，则称 V 为**向量空间**.

向量空间的定义虽然只有上面一句话，但是其中含有很多的内涵. 在向量空间中进行加法运算时，参加运算的是向量空间中的两个元素，即两个向量. 但是进行数乘运算时，需要有一个数来和向量进行数乘运算，这个数不是向量空间中的元素，因此向量空间必须得到一个数集的支持，以便进行数乘运算. 由于向量运算的需要，这个数集必须对加、减、乘、除这四种运算封闭(作除法时除数不为零).

对加、减、乘、除运算封闭的包含非零元素的数集称为**数域**. 例如有理数域 $\mathbf{Q}$，实数域 $\mathbf{R}$，复数域 $\mathbf{C}$ 等. 由此定义可知，任何数域中都包含 0 和 1.

由此可见，向量空间 V 必须伴随有一个数域 P. 显然，实向量空间伴随的是实数域 $\mathbf{R}$，复向量空间伴随的是复数域 $\mathbf{C}$.

现在，把向量空间的概念推广到一般集合上.

定义 1　设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 在 V 中定义了一种二元运算，称为**加法**，即对 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，都有 V 中唯一的一个元素 $\boldsymbol{z}$ 与它们

对应,称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和,记为 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$. 在数域 P 与集合 V 的元素间定义了一种运算,称为**数乘**,即对 P 中任一数 λ 和 V 中任一元素 $\boldsymbol{x}$,都有 V 中唯一的一个元素 $\boldsymbol{y}$ 与它们对应,称为 λ 和 $\boldsymbol{x}$ 的**数积**,记为 $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$. 而且,当加法和数乘满足以下 8 条规则($\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V,\forall\lambda,\mu\in P$)时:

(1)$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$(加法的交换律);

(2)$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$(加法的结合律);

(3)V 中有一个元素 $\mathbf{0}$,对 V 中任何元素 $\boldsymbol{x}$,有 $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$($\mathbf{0}$ 称为 V 的**零元素**);

(4) 对 V 中每个元素 $\boldsymbol{x}$,存在 V 中的元素 $\boldsymbol{y}$,使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$($\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的**负元素**,记为 $-\boldsymbol{x}$);

(5)$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

(6)$\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\mu(\lambda\boldsymbol{x})$(数乘的结合律);

(7)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$(数乘对加法的分配律);

(8)$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$(数乘对加法的分配律);

则称 V 为数域 P 上的**线性空间**.

加法运算和数乘运算称为**线性运算**.

线性空间中的元素也称为向量. 当然,这里的向量已不一定是有序数组了.

易证线性空间有如下性质:

线性空间的零向量唯一;每个向量的负向量唯一;零和任何向量的数积为零向量;任何数与零向量的数积为零向量;-1 和任何向量的数积即为该向量的负向量.

线性空间的例子:

例 1 显然,向量空间为线性空间.

例 2 由数域 P 中的数为元素构成的所有 $m\times n$ 矩阵,按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法,构成线性空间 $P^{m\times n}$.

例 3 n 为一个正整数,P 为数域,则系数属于 P 而变量为 x 的所有次数小于 n 的多项式集合(包括零多项式),按通常多项式的加法和数与多项式的乘法,构成 P 上的线性空间,记为 $P[x]_n$. 若无"次数小于 n"的限制,也构成线性空间,记为 $P[x]$.

例 4 定义在区间 $[a,b]$ 上的所有实值连续函数构成的集合,按函数的加法和数乘,构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 $C[a,b]$.

以上四例的验证请读者完成.

例 5 V 为 $\mathbf{R}^{+}=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$,$P$ 为 $\mathbf{R}$,定义"加法 $\oplus$"和"数乘 $\otimes$"分别

为：$x \oplus y = xy, \lambda \otimes x = x^{\lambda}, x, y \in \mathbf{R}^{+}, \lambda \in \mathbf{R}$. 按如此定义的加法和数乘，$V$ 为 P 上的线性空间.

此例中，V 的“零元素”为 1，x 的“负元素”为 $\frac{1}{x}$，

$$(\lambda+\mu) \otimes x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda} x^{\mu} = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x),$$

$$\lambda \otimes (x \oplus y) = (xy)^{\lambda} = x^{\lambda} y^{\lambda} = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y),$$

其余部分的验证留给读者完成.

此例说明，线性空间中的“加法”与“数乘”和一般的加法和数乘可能完全是两回事.

二、线性空间的基和维数

与向量空间中的向量一样，线性空间中的向量也有线性相关和线性无关等有关概念.

线性空间中若干个向量经数乘后再求和，称为这些向量的**线性组合**. 一个向量等于一组向量的线性组合，则说该向量可由这组向量线性表示.

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 为数域 P 上线性空间 V 中的一组向量，若 P 中有不全为零的一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 与 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 构成的线性组合成为零向量：

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{x}_r = \mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性相关. 若满足上式的一组数不存在，或者说要使上式成立，必须使所有的 λ_k 都为零，则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关.

例 6　证明 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中向量组 $\boldsymbol{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 线性无关.

证明　设 $\lambda_1 \boldsymbol{E}_{11} + \lambda_2 \boldsymbol{E}_{12} + \lambda_3 \boldsymbol{E}_{21} + \lambda_4 \boldsymbol{E}_{22} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

于是 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 线性无关.

定义 2　设线性空间 V 中有 n 个向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 满足：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(1) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关;

(2)V 中任何向量都可由$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性表示;

则$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 称为 V 的**一组基**,n 称为 V 的**维数**. V 的维数记为 $\dim(V)$,这里 $\dim(V)=n$.

当 V 的维数为有限时,V 称为**有限维线性空间**,否则称为**无限维线性空间**. 在前面所给的线性空间例子中,$P[x]$ 和 $C[a,b]$ 为无限维线性空间,其余的是有限维线性空间. 本书只讨论有限维线性空间.

实际上,线性空间的一组基即为线性空间的一个最大线性无关组;反之,任何一个最大线性无关组都是一组基(留作习题). 由此可见,一个线性空间可以有无穷多组基.

在例 5 所给的线性空间中,任何不等于 1 的正数都可以作为基(注意:此空间的零元素为 1). 例如,取 $a(a>0,a\neq 1)$,则对任何 $x\in\mathbf{R}^+$,取 $\lambda=\log_a x$,有 $\lambda\otimes a=a^\lambda=a^{\log_a x}=x$,即 x 可由 a 线性表示,故 a 为一组基,即此线性空间是 1 维的.

由例 6 可知 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 线性无关,显然 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中的任意向量可由该向量组线性表示,从而该向量组为一组基,因此 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 为 4 维空间.

定义 3 设$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为 V 的一组基,对 V 中任一向量 $\boldsymbol{y}$,必存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,使

$$\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{x}_n,$$

此时 $\boldsymbol{y}$ 可记为

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix},$$

称$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{y}$ 在基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 下的坐标.

由基的线性无关性立即可得,任何向量在给定基下的坐标是唯一的.

例 7 设线性空间 $R[x]_n=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in\mathbf{R}\}$.

(1) 证明:$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是线性空间 $R[x]_n$ 中的一组基,从而 $R[x]_n$ 的维数为 n.

（2）求 $R[x]_n$ 中向量 $\boldsymbol{\xi}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 下的坐标.

证明　（1）先证向量组 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是线性无关的. 设

$$k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_{n-1}x^{n-1}=0,$$

要使上式对任意 x 都成立，可得 $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$，所以 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 线性无关. 又因为 $R[x]_n$ 中的任意向量 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 可由 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 线性表示，故 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是线性空间 $R[x]_n$ 中的一组基，从而 $R[x]_n$ 维数为 n.

（2）由（1）知 $\boldsymbol{\xi}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 下的坐标为 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^{\mathrm{T}}$.

例 8　已知 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 空间中的一组基为 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，求向量 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ 在该组基下的坐标.

解　设 $\boldsymbol{B}=k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3+k_4\boldsymbol{A}_4$，代入得方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=1,\\ k_1+k_2+k_3=2,\\ k_1+k_2+k_4=1,\\ k_1+k_3+k_4=0.\end{cases}$$

解得 $k_1=1,k_2=1,k_3=0,k_4=-1$，所以 $\boldsymbol{B}$ 在该组基下的坐标为 $(1,\ 1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

三、基变换和坐标变换

由于线性空间可以有不同的基，而一个向量在不同的基下一般有不同的坐标，下面讨论同一向量在不同基下的坐标间的关系.

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 为线性空间 V 的两组基，则后一组基的每个基向量用前一组基唯一线性表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1&=p_{11}\boldsymbol{x}_1+p_{21}\boldsymbol{x}_2+\cdots+p_{n1}\boldsymbol{x}_n,\\ \boldsymbol{y}_2&=p_{12}\boldsymbol{x}_1+p_{22}\boldsymbol{x}_2+\cdots+p_{n2}\boldsymbol{x}_n,\\ &\vdots\\ \boldsymbol{y}_n&=p_{1n}\boldsymbol{x}_1+p_{2n}\boldsymbol{x}_2+\cdots+p_{nn}\boldsymbol{x}_n.\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

写成矩阵形式为

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，得

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{P}. \tag{1.1.2}$$

称 $\boldsymbol{P}$ 为从基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 到 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 的**过渡矩阵**. (1.1.1) 式或(1.1.2)式称为**基变换公式**. 易知一组基到另一组基的过渡矩阵是可逆的.

设一个向量在基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 下的坐标分别为 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$，则有

$$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix},$$

由坐标的唯一性，知

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}. \tag{1.1.3}$$

这就是同一向量在不同基下的坐标间的关系. (1.1.3) 式称为**坐标变换公式**.

例 9 已知 $P[x]_3$ 中的两组基：$\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x,\boldsymbol{\alpha}_3=x^2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=1,\boldsymbol{\beta}_2=x-x_0$，$\boldsymbol{\beta}_3=(x-x_0)^2$，求前一组基到后一组基的过渡矩阵，并求 $\boldsymbol{q}=3-x^2$ 在后一组基下的坐标.

解 由 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=-x_0\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=x_0^2\boldsymbol{\alpha}_1-2x_0\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，可知

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&-x_0&x_0^2\\0&1&-2x_0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -x_0 & x_0^2\\ 0 & 1 & -2x_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

易见 $\boldsymbol{q}$ 在前一组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -1\end{pmatrix},$$

故在后一组基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -x_0 & x_0^2\\ 0 & 1 & -2x_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x_0 & x_0^2\\ 0 & 1 & 2x_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-x_0^2\\ -2x_0\\ -1\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{q}=3-x^2=(3-x_0^2)\boldsymbol{\beta}_1-2x_0\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$.

例 10　已知 $\mathbf{R}^4$ 中的两组基:$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_4=(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求前一组基到后一组基的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解　由已知

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P},$$

则

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & 0 & 0 & 0\\ -12 & 12 & 0 & 0\\ -12 & -4 & 8 & 0\\ 3 & -5 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & 24 & 0 & 0\\ -12 & 12 & 0 & 0\\ -12 & -20 & 8 & -8\\ 3 & -7 & 4 & 8\end{pmatrix}.$$

四、线性空间的同构

在数值计算中，多项式往往用其系数向量来代替；图像处理中，像素的色彩值甚至整幅图像也可用向量来表示. 这实际上是借助一个线性空间来研究另一个线性空间. 这种代换的可能性在于两种线性空间具有相同的代数结构，即所谓同构.

定义4 设V与V'都是数域P上的线性空间，若V与V'的元素之间有一个一一对应：

$$\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}\in V,\boldsymbol{x}'\in V'),$$

且当$\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}\leftrightarrow\boldsymbol{y}'$时，有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\leftrightarrow\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}',\quad k\boldsymbol{x}\leftrightarrow k\boldsymbol{x}'(k\in P),$$

则称线性空间V与V'是**同构**的，且称它们元素间的一一对应为**同构对应**.

若有一种二元关系"～"满足：

(1) 反身性：$A\sim A$；

(2) 对称性：$A\sim B\Rightarrow B\sim A$；

(3) 传递性：$A\sim B$ 且 $B\sim C\Rightarrow A\sim C$，

则称此种关系为**等价关系**.

例如，数的相等、三角形的相似、矩阵的相似等都是等价关系. 线性空间的同构关系是等价关系.

定理1 数域P上的n维线性空间V与向量空间P^n同构.

证明 在V中取定一组基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，$V$中的任何向量$\boldsymbol{x}$在这组基下有唯一的坐标$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{x}_n=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix},$$

建立V与P^n间的对应关系：

$$\boldsymbol{x}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}.$$

这种关系是一一对应的，而且，若

$$\boldsymbol{x}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{x}_1+(\lambda_2+\mu_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(\lambda_n+\mu_n)\boldsymbol{x}_n\leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_1\\ \lambda_2+\mu_2\\ \vdots\\ \lambda_n+\mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix},$$

$$k\boldsymbol{x}=k\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k\lambda_n\boldsymbol{x}_n\leftrightarrow\begin{pmatrix}k\lambda_1\\ k\lambda_2\\ \vdots\\ k\lambda_n\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},$$

因此，V 与 P^n 同构. 证毕.

由此定理及同构是等价关系即有：

推论　数域 P 上所有维数相同的有限维线性空间都同构.

线性空间元素间的同构对应有如下性质：

(1) 零元素对应零元素；

(2) 负元素对应负元素；

(3) 同构对应保持线性相关性和线性无关性；

(4) 同构的有限维线性空间的维数相同.

综合上面的讨论，即得如下定理：

定理 2　数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

同构的线性空间具有相同的代数结构，因此在研究某一较复杂或较抽象的线性空间时，可用一个与其维数相同但较简单、较具体的线性空间来代替. 特别地，可以用熟知的普通向量空间来代替. 这也是研究同构的实际意义之所在.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com