连续时间投资组合选择理论、方法及其应用

LIANXU SHIJIAN TOUZI ZUHE XUANZE LILUN FANGFA JIQI YINGYONG

常 浩 荣喜民 著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

连续时间投资组合选择理论、方法及其应用

常　浩　荣喜民　著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

连续时间投资组合选择理论、方法及其应用 / 常浩,荣喜民著. —天津:天津大学出版社,2018.1
ISBN 978-7-5618-6031-1

Ⅰ.①连… Ⅱ.①常… ②荣… Ⅲ.①组合投资-研究 Ⅳ.①F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 002762 号

出版发行 天津大学出版社
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 北京虎彩文化传播有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 13.25
字　　数 268 千
版　　次 2018 年 1 月第 1 版
印　　次 2018 年 1 月第 1 次
定　　价 39.00 元

前　言

本书是一本入门读物，主要讨论了几类连续时间投资组合选择模型，比较适合金融投资领域的高年级本科生和低年级研究生阅读。本书重点探讨了不完全市场下的投资问题、限制性投资问题，随机利率与随机波动率环境下的资产－负债管理问题以及投资－消费问题等问题的相应解法以及数值解释，而没有过多地探讨诸如金融随机模型的参数估计、投资人风险偏好的确定以及投资策略的实证分析等金融实证方面的问题。

本书共分6章。第1章主要介绍了课题研究背景、投资组合选择理论、国内外的研究现状以及本书主要内容和创新。第2章主要介绍了不完全市场下动态资产分配的扩展研究。第3章主要探讨了随机环境下的资产－负债管理问题。第4章主要介绍了借贷利率限制下功能资产分配的扩展研究。第5章主要探讨了随机环境下的投资－消费问题。第6章阐述了上述几个研究问题的未来研究方向。全书模型较为简单，通过对本书的阅读和理解，可以帮助读者掌握处理连续时间投资组合选择理论的基本方法论，为后续研究打下坚实的基础。

目前，连续时间投资组合选择理论已经被广泛应用于指导各种基金的投资活动，由此催生了一系列新的研究内容，如保险基金的投资和养老基金的投资等。这些新的研究内容又反过来促进了投资组合选择理论的研究进展，从投资环境、投资人行为、市场模型、研究方法和策略的实证分析等不同角度丰富和发展了现有的投资组合选择理论。

本书在作者博士论文基础上，融入了新的研究内容修改整理而成。该书的出版得到了教育部人文社会科学研究基金（批准号：16YJA790004），中国博士后科学基金（批准号：2014M560185，2016T90203）和天津市高校”中青年骨干创新人才培养计划”项目的资助，在此对相关人员的支持表示感谢！

由于时间仓促，加之本人水平有限，本书难免存在错误和不当，欢迎读者和同行批评指正！

常浩

2018年4月于天津

目　录

第1章　绪　论

1.1　课题研究背景

Markowitz 组合证券投资选择的研究是20世纪最重要的研究成果，是金融工程与风险管理的重要研究内容，其研究成果带动了经济、金融及保险等各领域关于资产投资的更深层次和更有效的研究，特别是在最优化理论和方法迅速发展、随机数学广泛渗透之下，其研究成果不断涌现，使银行、非银行金融机构、保险公司及相关企业能够通过其研究成果进行资产的套期保值、风险防范、投资获利，并对社会经济稳定与发展起到至关重要的作用。1952年，美国芝加哥大学 Markowitz 发表了奠基性的文章 *Portfolio Selection*，并在1952年出版了同名专著，从而奠定了证券组合选择的理论基础，这标志着现代数理金融学的诞生。在这篇奠基性论文中，Markowitz 以期望度量股票收益率，以方差度量风险，并对完备市场环境下的投资问题进行分析研究，创造性地提出了完备市场环境下组合证券投资的均值－方差模型，并通过解一个凸二次规划得到最优投资组合，从而使金融研究从定性研究走向定量研究。在此之后，Sharpe(1964)、Lintner(1965)和 Mossin(1966)三人分别独立提出了著名的资本资产定价模型(CAPM)，这是对 Markowitz 理论的进一步发展，其模型在很长时间内成为许多资本市场理论的基础。Markowitz 和 Sharpe 也因其在证券组合选择和资产定价方面的突出成就共同分享了1990年诺贝尔经济学奖。随着资产组合投资研究的不断深入，投资研究历经了从完全市场的单期离散投资到多期、动态、连续的投资研究，发展到不完全市场的单期、动态、连续的投资研究，又发展到投资－消费问题、资产－负债管理问题和借贷利率限制或者卖空限制下等方面的投资研究，所有这些都丰富和发展了资产组合投资研究的理论和方法，而且更加符合金融市场实际，更具有可操作性。

1.2　投资组合选择理论

1.2.1　金融市场模型

在实际的投资环境中，投资人或者投资机构经常将银行账户、债券、国库券等金融资产视为无风险资产，常见的市场模型主要有以下几种。

(1)常数无风险利率模型

$$dB(t)=r_0B(t)dt$$

其中,r_0 表示无风险利率;$B(t)$表示 t 时刻无风险资产的价格。

(2)马氏调节无风险利率模型

$$dB(t)=r(Z_t)B(t)dt$$

其中,$B(t)$表示 t 时刻无风险资产的价格;Z_t 表示马氏调节过程;$r(Z_t)$表示无风险利率。

(3)Ho-Lee 利率模型:指的是无风险利率不是一个常数,而是一个服从 Ho-Lee 利率模型的随机过程。即假设无风险资产价格 $B(t)$服从下列微分方程

$$dB(t)=r(t)B(t)dt$$

其中,$r(t)$表示无风险利率,且 $r(t)$服从 Ho-Lee 利率模型

$$dr(t)=a(t)dt+bdW(t)$$

其中,$a(t)=\tilde{\alpha}(t)+b\tilde{\eta}(t)$,$\tilde{\alpha}(t)$,$\tilde{\eta}(t)$是时间 t 的确定函数,$b>0$ 是常数。

(4)Vasicek 利率模型:指的是无风险利率是一个服从 Vasicek 利率模型的随机过程。即假设无风险资产价格 $B(t)$服从下列微分方程

$$dB(t)=r(t)B(t)dt$$

其中,$r(t)$表示无风险利率,且 $r(t)$服从 Vasicek 利率模型

$$dr(t)=a(b-r(t))dt+\sigma dW(t)$$

其中,$a>0$,$b>0$,$\sigma>0$ 是常数。

Vasicek 利率模型考虑了均值回复(随时间的推移,利率呈现出向某个长期平均水平收敛的趋势),短期利率以速率 a 拉向水平 b,这个额外的拉力是服从正态分布的随机项 $\sigma dW(t)$。

(5)Cox-Ingersoll-Ross 利率模型:指的是无风险利率是一个服从 CIR 利率模型的随机过程。即假设无风险资产价格 $B(t)$服从下列微分方程

$$dB(t)=r(t)B(t)dt$$

其中,$r(t)$表示无风险利率,且 $r(t)$服从 CIR 利率模型

$$dr(t)=a(b-r(t))dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

其中,a,b,σ 都是常数。

(6)仿射利率模型:指的是无风险利率是一个服从仿射利率模型的随机过程。即假设无风险资产价格 $B(t)$服从下列微分方程

$$dB(t)=r(t)B(t)dt$$

其中,$r(t)$表示无风险利率,且 $r(t)$服从仿射利率模型

$$dr(t)=(a-br(t))dt-\sqrt{k_1+k_2r(t)}dW(t)$$

其中,$a>0$,$b>0$,$k_1>0$,$k_2>0$ 均为常数。

在实际的投资环境中,风险资产(如股票、基金、零息票债券等投资伴随风险的

金融资产)服从的市场模型常见的有以下几种。

(1)几何布朗运动

$$dS(t)=S(t)(\mu dt+\sigma dW(t))$$

其中,μ,σ 是常数;$S(t)$表示时刻 t 风险资产的价格。

(2)带跳的几何布朗运动

$$dS(t)=S(t)(\mu dt+\sigma dW(t))+\int_R zN(dt,dz)$$

其中,μ,σ 是常数;$S(t)$表示时刻 t 风险资产的价格。

(3)常方差弹性(CEV)模型

$$dS(t)=S(t)(\mu dt+\sigma S^{\beta}(t)dW(t))$$

其中,μ,σ 是常数;$S(t)$表示时刻 t 风险资产的价格;$\beta<0$ 是常数。

注意常方差弹性模型是几何布朗运动的自然扩展,当 $\beta=0$ 时,CEV 模型退化为几何布朗运动。

(4)Heston 随机波动率模型

$$dS(t)=S(t)(\mu dt+\sqrt{v(t)}\,dW(t))$$

$$dv(t)=k(\theta-v(t))dt+\sigma\sqrt{v(t)}\,d\widetilde{W}(t)$$

其中,μ,σ 是常数;$S(t)$表示时刻 t 风险资产的价格。

(5)马氏调节几何布朗运动

$$dS(t)=S(t)(\mu(Z_t)dt+\sigma(Z_t)dW(t))$$

其中,Z_t 是马氏调节过程,股票收益率和波动率分别是马氏调节过程的函数。

1.2.2 效用函数理论

效用函数是度量投资人或者投资机构对风险的承受能力和偏好程度的一种手段。投资人的效用应是终端财富的函数,从理论上讲,不同的投资人应有不同的效用函数。在实际应用中,可通过一系列的心理测试来逼近得到每个投资人的效用函数。在金融市场中,大多数投资人都是风险厌恶型的。因此,效用函数通常满足以下条件。

$$U'(x)>0,\quad U''(x)<0$$

在效用函数理论中,经常使用绝对风险厌恶度量指标 R_A 和相对风险厌恶度量指标 R_R 来度量风险厌恶程度。

$$R_A=-\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

$$R_R=-\frac{U''(x)}{U'(x)}x$$

在金融市场中,常见的风险厌恶型效用函数主要有以下几种。

(1)常系数相对风险厌恶效用函数(CRRA)

$$U(x)=\frac{x^{\gamma}}{\gamma},\gamma<1\text{ 且 }\gamma\neq0$$

对 CRRA 效用函数而言，$U'(x)=x^{\gamma-1}$，$U''(x)=(\gamma-1)x^{\gamma-2}$，则有

$$R_{\mathrm{A}}=\frac{1-\gamma}{x},R_{\mathrm{R}}=1-\gamma$$

在投资组合选择理论中，CRRA 效用函数的一个重要应用是：当 $\gamma\to1$ 时，CRRA 效用函数下的最优投资策略退化为对数效用函数下的最优投资策略。

(2)常系数绝对风险厌恶效用函数(CARA)

$$U(x)=-\mathrm{e}^{-\gamma x},\gamma>0$$

对于 CARA 效用函数而言，$U'(x)=\gamma\mathrm{e}^{-\gamma x}$，$U''(x)=-\gamma^2\mathrm{e}^{-\gamma x}$，则有

$$R_{\mathrm{A}}=\gamma,R_{\mathrm{R}}=\gamma x$$

(3)对数效用函数

$$U(x)=\ln x$$

对于对数效用函数而言，$U'(x)=\frac{1}{x}$，$U''(x)=-\frac{1}{x^2}$，则有

$$R_{\mathrm{A}}=\frac{1}{x},R_{\mathrm{R}}=1$$

(4)二次效用函数

$$U(x)=x-\gamma x^2,x<\frac{1}{2\gamma}\text{且 }\gamma>0$$

二次效用函数的一个重要应用是：在投资组合选择理论中，二次效用最大化下的最优投资策略是均值－方差有效的，即均值－方差模型下的最优投资策略与二次效用最大化下的最优投资策略是一致的。因此，在解决各类投资组合选择问题的均值－方差模型时，往往将其放到二次效用最大的环境中进行解决。

(5)双曲型绝对风险厌恶效用函数(HARA)

$$U(x)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\alpha x}{1-\gamma}+\beta\right)^{\gamma}$$

其中，$\gamma\neq1$，$\frac{\alpha x}{1-\gamma}+\beta>0$，$\alpha>0$。

HARA 效用函数包含如下三种特定形式：

①当 $\gamma<1,\beta=0$ 时，HARA 效用函数退化为 CRRA 效用函数；

②当 $\gamma=-\infty,\beta=1$ 时，HARA 效用函数退化为 CARA 效用函数；

③当 $\gamma=2$ 时，HARA 效用函数退化为二次效用函数。

1.3 国内外研究现状

1.3.1 不完全市场的研究

完全金融市场是一种比较理想的投资环境，其数学表现形式是金融市场中可供交易的基础资产的数目与股票价格所满足的布朗运动的维数(随机源)相等，其重要

特征就是市场中存在唯一的等价鞅测度,所有交易资产都可由基础资产复制。但实际的金融市场由于受到经济政治与其他不确定因素的影响而导致基础资产数目小于布朗运动维数,因此,完全市场并不符合投资者实际的投资环境,而寻求去解决不完全市场条件下的投资组合选择问题就显得更有实际意义。

在不完全市场中基础资产数目小于布朗运动的维数(由随机源的数目确定),其重要特征是市场中不存在唯一的等价鞅测度,存有未定权益不能由基础资产复制。实际的投资环境由于受到社会政治经济宏观和微观等各方面不确定因素的影响,从而导致基础资产数目实际上严格小于布朗运动的维数,因此不完全市场更接近投资者实际的投资环境。于是国内外许多学者开始从不同角度深入研究不完全市场条件下的最优投资组合问题。Karatzas 等对效用函数最大化目标下的鞅方法和对偶理论进行了详细的分析,并在完全市场下应用鞅表示定理得到了幂效用和对数效用函数下投资组合选择的最优投资策略,然后提出了一种将不完全市场转化为完全市场的方法,继而得到了原不完全市场下幂效用和对数效用函数下的最优投资策略;He 和 Pearson 对不完全市场和卖空限制下投资 - 消费问题进行了分析;Karoui 和 Quene 对不完全市场下未定权益的定价问题进行了研究;Davis 对不完全市场下的期权定价问题进行了研究;Wang 和 Ye 对不完全市场下未定权益的均值 - 方差问题进行了研究;Kramkov 和 Schachermayer 对效用函数的弹性性质进行了详细分析,并将结果应用于不完全市场的最优投资问题,进而得到取得最优投资策略的充分必要条件;Kallsen 提出了另一种处理不完全市场最优投资问题的效用最大化问题;Karatzas 在其著作 *Method of Mathematical Finance* 中对不完全市场的性质、未定权益定价、效用函数理论和对偶理论以及鞅方法都进行了分析和总结,并对不完全市场的研究现状进行了概述;Musiela 和 Rutkowski 在其著作 *Martingale Methods in Financial Modelling* 中对不完全市场发生的背景、产生原因以及类型进行了分析,并对借贷利率限制和卖空限制下的风险最小对冲和方差最小对冲问题进行了分析。这些文献的一个共同特征就是假定金融市场中基础资产数目小于布朗运动维数,从而导致金融市场的不完全性。

对于由不可复制的未定权益或其他不确定因素导致金融市场的不完全性,目前也取得了一些研究成果。Duffie 等将随机收入引入投资 - 消费问题,并假设该收入不可复制,从而导致金融市场的不完全性,文章应用动态规划和 HJB 方程对幂效用和对数效用函数下的最优投资 - 消费策略进行了分析;Schachermayer 对终端财富可能为负的情况下的效用函数的性质进行了分析,并将结论应用于不完全市场下的最优投资问题;Bellamy 将跳扩散过程引入投资组合问题,并研究了不完全市场下的效用最大化问题;Cvitanic 等将随机捐赠过程引入投资组合优化问题中,从而导致金融市场的不完全性,并对终端财富的效用最大化问题进行了研究;Owen 对不完全市场的最优对冲问题进行了研究;Chacko 和 Viceira 假设股票价格波动率是随机波动率过程,并由此导致市场的不完全性,他们应用随机控制与 HJB 方程对投资 - 消费问题

的最优投资策略问题进行了研究；Tehranchi 假设金融市场中的随机因素和市场不完全相关（相关系数绝对值小于 1），并应用 Holder 不等式研究了该不完全市场中的投资组合优化问题，得到的指数效用、幂效用和对数效用函数下最优投资策略的显式解；Hugonnier 和 Kramkov 对不完全市场中未定权益的定价问题进行了研究；Xia 和 Yan 应用鞅测度理论对不完全市场的投资组合优化问题进行了研究；Miao 和 Wang 对不完全市场下的投资 - 消费问题进行了研究；Musiela 和 Zariphopoulou 对不完全市场下的无差异定价问题进行了研究，并提供一种概率迭代算法；Keppoa 等假定投资人收到的捐赠不可对冲，从而导致金融市场的不完全性，他们对对数效用最大化下的投资组合问题进行了分析，并提供一种递归算法。上述研究的共同特征就是假定金融市场的不完全性是由某种不可复制或者对冲的未定权益导致的，或者是由某种不确定因素导致的，这些研究都从不同角度对不完全市场的投资或定价问题进行了分析。

与此同时，国内也有一些学者研究了不完全市场下的投资组合优化问题。李平在其博士论文中对离散时间下的未定权益定价和效用最大化问题进行了系统研究；夏建明在其博士论文中对不完全市场下的期权定价问题进行了系统研究；刘宣会和胡奇英应用鞅方法对不完全市场下未定权益的套期保值问题进行了研究；曹晓华和潘杰对不完全市场下衍生资产定价问题进行了研究；刘志新等对不完全市场下的期货定价问题进行了研究；张力健等应用极小鞅测度方法对不完全市场下的期货定价问题进行了研究；孙万贵对不完全市场下的投资问题进行了研究；荣喜民和赵慧对不完全市场下的保险投资问题进行了研究。这些学者都从不同角度研究了不完全市场下的各种投资问题，丰富和发展了投资组合选择理论方法。

如果金融市场中基础资产数目小于布朗运动的维数，此时金融市场是不完全的，解决这类不完全市场下投资组合选择问题的一种直观想法是将不完全市场转化为完全市场。Karatzas 和 Zhang 分别从两个不同的角度解决了这一问题，其中 Karatzas 中提供了一种通过增加虚拟股票使得基础资产数目等于布朗运动的维数，从而将不完全市场转化为完全市场的方法；而 Zhang 提出可降低布朗运动的维数使其与市场中所有基础资产数目相等，这提供了另一种将不完全市场转化为完全市场更直接更便捷的方法。

一般来说，投资组合选择问题可从两个方面加以研究：一是用效用函数来表示投资者对风险的偏好程度，建立终端财富期望效用最大意义下的投资组合模型；二是直接用方差度量风险，用期望度量收益，从而建立期望收益最高而风险最小的均值 - 方差意义下的投资组合模型。鞅方法是解决效用函数意义下完全市场环境里连续时间动态投资组合选择问题的有效方法。鞅方法首先由 Harrison 和 Kreps 提出并运用于解决多周期的投资组合问题，后来又有多位学者分别完善和发展了鞅方法并解决了连续时间、带有交易成本、带有卖空限制和借贷利率限制和保险投资等各类投资组合选择问题。

1.3.2 资产－负债管理问题的研究

资产－负债管理问题是现代金融管理的核心内容，越来越受到理论界和许多金融机构的重视，目前国内许多金融机构已将它视为提高企业核心竞争力的象征。1990年，Sharpe与Tint首先建立了负债情形下投资组合选择问题的均值－方差模型，为从投资组合选择的角度研究资产－负债管理问题奠定了理论基础。1995年，Browne首次将组合证券投资理论应用于保险公司的投资活动，从投资的角度来研究保险公司的破产概率，开创性地应用随机最优控制理论对最小化破产概率和指数效用最大意义下的最优投资策略进行了研究。文中假设赔付过程符合带有漂移的布朗运动，并指出该过程可正可负。从那以后，资产－负债管理在理论与应用上都取得了长足的进步。其中Leippold等对多周期环境下的资产－负债管理问题进行了研究，并提出了一种几何方法。Chiu与Li考虑了多种风险资产情形下当负债与股票价格都服从几何布朗运动时资产－负债管理的风险控制问题，他们应用线性二次控制方法得到了负债情形下最优投资策略和有效前沿的解析表达式。Xie等建立了负债与股票价格服从不同的布朗运动情形下的均值－方差模型，得到了最优投资策略和有效前沿的解析表达式，并分析了负债对最优投资策略和有效前沿的影响，对带有负债和政策调节的投资组合选择问题进行了研究，并建立了该问题的均值－方差模型。Papi和Sbaraglia将交易成本引入资产－负债管理问题，提出了一种离散时间的动态规划算例得到最优投资策略的数值解。金秀与黄小原将资产负债管理理论应用到辽宁养老基金管理的实际问题中，解决了辽宁养老基金管理的最佳资产配置问题。吉小东与汪寿阳探讨了养老金的资产－负债管理问题，为解决我国养老保险体制面临的困境及拓宽养老金融资渠道提出了若干政策建议。

随机最优控制理论是解决连续时间投资组合选择问题的有效方法之一，近年来，有关随机控制理论在金融与保险中的应用取得了很多研究成果。Li和Ng建立了多周期环境下动态投资组合的均值－方差模型，并提供了一种“嵌入方法”将均值－方差模型下的双目标优化问题转化为单目标优化问题，为应用随机最优控制理论解决均值－方差模型提供了理论基础；后来，Zhou与Li将“嵌入”方法应用到连续时间投资组合选择模型，并建立该问题的均值－方差模型，提出了一种随机线性二次控制方法，得到了该模型的最优投资策略和有效前沿的解析表达式，该方法有效地解决了均值－方差意义下的投资组合选择问题。后来，这种方法被广泛应用到负债情形下、卖空限制下与不同借贷利率限制下连续时间的投资组合选择问题。Lim和Zhou分别在完全市场和不完全市场对随机参数情形下的投资组合选择问题进行了研究，并建立该问题的均值－方差模型，通过引入向后随机微分方程并应用随机线性二次方法和完全平方方法得到了最优投资策略和有效前沿的解析解；后来Ferland和Watier对随机参数情形下基于效用最大化的投资组合问题进行了研究。柏立华和王建伟分别在各自博士论文中应用随机最优控制理论对金融和保险中的若干问题进行了研究，极大地推进了随机最优控制理论的应用。

1.3.3 限制性投资组合的研究

在实际的投资环境中，从银行借入资金的利率（称为贷款利率）往往大于把资金存入银行的利率（称为存款利率），且不同的投资者对风险的偏好程度是不同的，具有不同的效用函数，因此我们有必要研究不同借贷利率限制下满足不同效用函数，如指数效用函数、幂效用函数与对数效用函数的投资者的最优投资策略问题。目前借贷利率不同情形下的投资组合选择问题发展较快，近年来取得了很多的研究成果。Paxson 主要对借贷利率限制对流动性资产与非流动性资产之间的财富分配情况的影响进行了分析；Fleming 和 Zariphopoulou 考虑了借贷利率不同情形下一个投资 - 消费模型，但不允许卖空股票，应用动态规划及 HJB 方程方法得到了幂效用函数下最优投资策略与消费策略的解析表达式，并对借贷情况进行了分析；Zariphopoulou 将借贷利率限制、交易限制与破产限制引入消费 - 投资模型；Vila 和 Zariphopoulou 允许投资时间长度是无限的；Teplá 分别考虑了借贷利率限制或卖空限制或两种并存情形下的投资组合选择模型；Yao 和 Zhang 将借贷利率限制下的投资 - 消费模型应用到投资者买房和租房的问题中；Fu 和 Lari-Lavassani 针对借贷利率限制下的投资组合选择问题，建立了一个均值 - 方差模型，但允许股票卖空，应用动态规划得到了最优投资策略和有效前沿的解析表达式；Bayraktar 和 Young 以及 Azcue 和 Muler 分别对借贷利率限制下保险公司的破产概率问题进行了研究，并对破产概率最小情形下的最优投资策略进行了分析。这些模型大多都是解决了幂效用函数（常系数相对风险厌恶效用函数）下的最优投资策略问题。

与此同时，国内也有许多学者研究了不同借贷利率限制下的投资组合选择问题。黄薇等人将随机收入引入连续时间消费 - 投资模型，但未能得到最优投资策略与消费策略的显式表达式；杨招军和黄立宏提出一种猜测 - 证明的新方法，解决了幂效用函数下最优投资策略的解析表达式，但这种方法未能解决其他效用函数下的解析表达式；秦国文建立了一个离散时间的均值 - 方差模型；姚海祥和李仲飞用 VaR 度量风险，建立了借贷利率限制下的离散时间的均值 - VaR 模型；王秋媛等应用动态规划和非线性规划原理解决了幂效用函数下连续时间投资 - 消费模型的最优投资策略问题。这些模型分别从不同角度与不同的应用环境，不同程度地丰富和发展了 Markowitz 投资组合选择模型，但是他们的研究或者是离散时间的投资模型，或者是未能得到最优投资策略的解析表达式，或者只考虑了幂效用函数下的最优投资决策问题。

1.3.4 投资 - 消费问题的研究

投资 - 消费问题（也称 Merton 问题）是投资者将手头的资金在消费与投资之间进行分配，目的是选择最优投资策略与最优消费策略，使得消费与终端财富的期望效用最大，这是一个二元最优问题。1969 年，Merton 首次在投资组合选择问题中考虑投资人的消费行为，建立了连续时间情形下的投资 - 消费模型，并创造性地应用随机

控制理论方法对幂效用和对数效用函数下的最优投资 - 消费策略进行了研究,得到了最优投资 - 消费策略的解析表达式。1971 年,Merton 又对连续时间情形下一般效用函数下的最优投资 - 消费策略进行了研究。这两篇论文创造性地解决了投资人在投资的过程中如何消费的问题,为投资 - 消费问题奠定了理论基础,也为今后研究其他类型的投资 - 消费问题提供了一般的方法论基础。自那以后,消费 - 投资组合选择问题得到了大范围的扩展与应用,取得了很多研究成果,如不同借贷利率限制下的投资 - 消费问题、不完全市场下的投资 - 消费问题、带有交易成本的投资 - 消费问题、随机利率环境下的投资 - 消费问题、随机波动率模型下的投资 - 消费问题等。Fleming 和 Zariphoulou、Vila 和 Zariphopoulou 假设投资过程中借款利率大于存款利率,对有借贷利率限制的投资 - 消费问题进行了研究;Yao 和 Zhang 将房子作为风险资产进行投资并在借贷利率限制情形下对投资人的投资 - 消费问题进行了分析;Duffie 等将收入引入投资 - 消费问题中,并假设收入是一个不可复制的随机过程,对由此而导致的不完全市场里的投资 - 消费问题进行了研究;Sasha 和 Zariphopoulou 假设股票的漂移和波动都由一个随机因子所驱动,并对该不完全市场下的投资 - 消费问题进行了研究;Blanchet-Scalliet 等对投资周期不确定情形下的投资 - 消费问题进行了研究。上面这些模型都在一定条件下发展了 Merton 的投资 - 消费模型,解决了特定金融环境下投资者的最优投资 - 消费策略问题,丰富和发展了投资 - 消费问题的理论方法。但这些模型都没有考虑投资人在投资和消费过程中所发生的交易成本,其无风险利率和股票波动率也是确定的。

投资 - 消费过程中往往发生交易成本,因此将交易成本引入投资 - 消费问题就显得很有必要,且具有实际意义。目前为止,国内外很多学者对此问题进行了研究,得出了很多研究成果。Constantinides 在一般的多周期环境下对带有凸交易成本的投资 - 消费问题进行了研究,主要讨论了多周期环境中的投资 - 消费问题能在单周期环境中加以研究的程度。Dumas 和 Luciano 研究了带有交易成本的投资 - 消费问题,以最大化终端累计消费为目标函数,应用随机控制方法得到最优投资 - 消费策略的显式解。Shreve 和 Soner 在一个完全市场下以无限长周期内期望消费的贴现值为目标函数,对值函数的特性进行了分析。Akian 和 Menaldi 假设交易成本与交易额成正比,并假设金融市场存在一种无风险资产和多种风险资产,应用动态规划对投资人的投资 - 消费情形进行了分析。Liu 和 Loewenstein 假设投资周期有限且对带有交易成本的投资 - 消费问题进行了研究,得到了周期不确定情形下问题的闭式解,并发现解的序列收敛于周期确定时的解。Janecek 和 Shreve 以无限区间内消费效用期望最大化为目标函数,对带有成比例交易成本的投资 - 消费问题进行了研究,并对值函数的逼近扩展进行了启发式和严格的推导,得到了不交易区域的近似结果。Liu 对带有固定和成比例的交易成本的投资 - 消费问题进行了研究,发现当资产收益不相关时,投资在每种风险资产中的资金数量保持在两个常数之间,其分析结果显示交易成本是影响交易数量的重要因素。Zhao 和 Nie 证明了在带有交易成本的多资产投资 - 消