普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材
全 国 高 等 农 业 院 校 优 秀 教 材

线性代数

第二版

周志坚　甄　苓◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材
全 国 高 等 农 业 院 校 优 秀 教 材

线 性 代 数

第二版

周志坚　甄苓　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 周志坚，甄苓主编 . —2 版 . —北京：中国农业出版社，2015. 2（2018. 6 重印）

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-20026-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①周… ②甄… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 000593 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）

（邮政编码 100125）

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2009 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 2 版

2018 年 6 月第 2 版北京第 3 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：16. 25

字数：285 千字

定价：30. 00 元

内 容 提 要

线性代数课程在大学的基础课教学中占有重要的地位，并广泛应用于科学技术的各个领域。由于线性代数具有较强的逻辑性、抽象性，因此本书在编写的过程中注重使所述内容通俗易懂，具有较强的可读性。

全书主要内容包括：行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性与线性方程组，特征值、特征向量与相似矩阵，二次型，线性空间与线性变换及 MATLAB 在线性代数中的应用等。各章均配有一定数量的习题，并附有习题参考答案。其中一至五章教学时数约 48 学时，打“*”号部分及其他部分可供对数学要求较高的专业选用。

本教材可供高等院校各专业师生使用，也可供自学者和相关人员学习和参考。

第二版编写人员名单

主　编　周志坚　甄　苓

副主编　刘加妹

第一版编写人员名单

主　编　周志坚　甄　苓

副主编　刘加妹　介跃建

第二版前言

本书第一版自2009年出版以来，已经历了6年的教学实践。在此期间，使用本教材的师生们对该教材提出了宝贵的意见和建议。按照农业部“十二五”规划教材的编写精神，我们在保留了第一版的体系和风格的同时，对部分内容进行了修订。

新版教材在进一步加强基础知识、基本技能培养的同时，淡化了部分内容的理论性，如对向量组的线性相关性中的定理、命题、性质进行了整合；对矩阵的对角化及二次型的部分内容进行了调整，使新版的结构更加严谨、逻辑更加清晰。为了注重应用性，各章增加了应用例题和应用习题；为了加强学生的逻辑推理能力，对部分例题进行了调整，并在各章习题中增加了思考题。

本版修订工作由刘加妹、甄苓、周志坚完成，其中，第一、六章由刘加妹编写；第二、三章、附录二、附录三由甄苓编写；第四、五章、附录一由周志坚编写。

在新版的修订过程中，得到了我系广大教师的帮助和支持，对此表示衷心感谢！

限于编者水平，新版一定存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2014年10月

第一版前言

本教材是根据全国高等学校工科线性代数课程教学基本要求，并兼顾经济类、农学类等专业对该课程的教学基本要求而编写的。在编写的过程中注重读者的认知心理，遵循深入浅出、循序渐进的原则，由实际存在的问题引出相应的概念，再进行理论分析，进而使读者掌握代数学中重要的理论、方法。

本教材的前五章内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、相似矩阵、二次型；第六章介绍了线性空间与线性变换，并在附录一中介绍了 MATLAB 在线性代数中的应用。各章均配有一定数量的习题，并附有习题参考答案。其中一至五章教学时数约 48 学时，打“*”号部分及其他部分可供对数学要求较高的专业选用。本教材的第一章、第二章的一至四节由刘加妹编写，第二章的五、六节、第三章、附录三由甄苓编写，第四章、附录一由周志坚编写，第五、六章由介跃建编写，附录二由周志坚和甄苓编写，全书由王来生主审。本教材在编写过程中得到了中国农业大学教务处、应用数学系领导和教师的大力支持，在此一并表示感谢。

本教材可供高等院校各专业师生使用，也可供自学者、工程技术专业工作者和有关专业人员学习和参考。限于作者的水平和经验，错误和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2009 年 5 月

目录

第一章

行　列　式

本章首先介绍二阶行列式和三阶行列式的概念，然后将二阶和三阶行列式的定义推广到 n 阶行列式，最后介绍求解线性方程组的克莱姆法则．

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

方程组(1)的四个系数按它们在方程组(1)中的位置形成一个数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的**二阶行列式**，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

数 a_{ij}($i=1$，2；$j=1$，2)称为行列式(3)的元素．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表示该元素位于第 j 列．位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(3)的(i，j)元．

有了二阶行列式，二元线性方程组(1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

二、三阶行列式

定义 1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{4}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{5}$$

则(5)式称为数表(4)所确定的**三阶行列式**.

(5)式等号右端是 6 项的代数和，每一项是来自不同行不同列的 3 个元素的乘积，再前置正负号．如图 1.1 所示的对角线法则，前带正号的三项用实线连接起来，前带负号的三项用虚线连接起来.

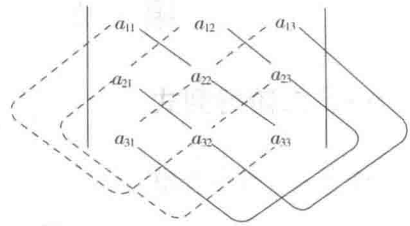

图 1.1

例 1 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 依对角线法则，有

$$D = 2\cdot 2\cdot(-5) + 1\cdot 0\cdot 3 + 4\cdot 7\cdot(-3) - 4\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 7 - (-3)\cdot 1\cdot(-5) = -143.$$

第二节 n 阶行列式

首先引进全排列及其逆序的概念，然后给出 n 阶行列式的定义．

一、全排列及其逆序

n 个不同的元素按照一定的次序排成一列，叫作这 n 个元素的一个**全排列**，简称为**排列**．n 个不同元素的所有排列的个数用 P_n 表示．容易验证，$P_n = n!$，即 n 个元素共有 $n!$ 个全排列．

例如，用 1，2，3 这三个数字，可以组成 $P_3=3!=6$ 个全排列，即可以组成 6 个没有重复数字的三位数．

对于 n 个不同元素的任一排列，我们要考虑排列中各元素之间的次序．通常规定元素间有一个**标准次序**，它对应的排列称为**标准排列**(也称**自然排列**)．对自然数 1，2，…，n，规定从小到大的次序为标准次序，因此自然数 1，2，…，n 的标准排列是 $12\cdots n$.

在 n 个不同元素的任一排列中，如果其中两个元素的先后次序和标准次序不同，那么就称这两个元素构成一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总数，叫作这个排列的**逆序数**．

显然，标准排列的逆序数等于零．

为方便讨论，不妨设排列的 n 个元素为自然数 1，2，…，n，将它们的任意一个排列记成 $p_1p_2\cdots p_n$.

下面讨论排列逆序数的求法．

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 1 到 n 的一个排列，对于元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，排在它前面比它小的元素，和 p_i 不构成逆序；排在它前面比它大的元素，和 p_i 构成逆序．设这样的逆序的数对个数为 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$，称 t_i 为元素 p_i 的逆序数．容易看出，全体元素 p_1，p_2，…，p_n 的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n$$

就是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数．

例 2 求五阶排列 43152 的逆序数．

解 排列 43152 中共有 5 个元素，各元素的逆序数为

4 排在首位，其逆序数为 0；

3 前面比 3 大的数有 4，故逆序数为 1；

1 前面比 1 大的数有 4、3，故逆序数为 2；

5 是最大数，它的逆序数总为 0；

2 前面比 2 大的数有 4、3、5，故逆序数为 3，

因此排列 43152 的逆序数为

$$t=0+1+2+0+3=6.$$

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．例如，排列43152的逆序数为 6，所以它是偶排列；排列 321 的逆序数为 3，所以它是奇排列．

二、n 阶行列式的定义

我们来观察(5)式等号右端中每一项构成的规律．

三阶行列式中每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积．除了正负号外，每一项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中，$p_1p_2p_3$ 是 1，2，3 的某个排列，这样的排列共有 3!=6 个，所以三阶行列式中共有 6 项，即三阶行列式等于所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积的代数和．

再来考察三阶行列式中每一项的正负号．(5)式等号右端前三项取正号，它们的列标排列依次是 123，231，312，这些都是偶排列；后三项取负号，它们的列标排列依次是 132，213，321，这些都是奇排列．因此各项所取的符号可写成$(-1)^t$，其中 t 是列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数．于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中和号 $\sum$ 表示对 1，2，3 这三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和，把三阶行列式这一定义形式推广到 n 阶行列式．

定义 2 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并冠以符号$(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{6}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 是这个排列的逆序数，形如(6)式的项共有 $n!$个，所有这些项的和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n **阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 是行列式 D 的$(i，j)$元．

用定义 2 所得到的二阶和三阶行列式，与第一节给出的二阶和三阶行列式的定义是一致的．当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$. 注意与 a 的绝对值区分开，需要时加以说明．

利用行列式的定义计算 n 阶行列式，当 n 较大时是十分复杂的．只有一些特殊的行列式可以利用定义计算．

例 3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，若 $p_1\neq 4$，则 $a_{1p_1}=0$，所以 p_1 只能等于 4. 同理可得 $p_2=3$，$p_3=2$，$p_4=1$，即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. 所以

$$D=(-1)^{t(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24.$$

主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫作**上(下)三角行列式**．主对角线以外的元素都为 0 的行列式叫作**对角行列式**．

例 4 (1) 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix};$$

(2) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 (1) 展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，若 $p_n\neq n$，则 $a_{np_n}=0$，所以只有 $p_n=n$. 同理可得

$$p_{n-1}=n-1,\ p_{n-2}=n-2,\ \cdots,\ p_2=2,\ p_1=1,$$

展开式中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，所以

$$D=(-1)^{t(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 从通项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中 a_{1p_1} 着手，仿照上例从 p_1 开始逐一分析 p_2，…，p_n 的取值，可得 D_n 展开式的 $n!$ 项中，除去为零的项外，仅剩一项为

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

这项列指标排列的逆序数为

$$t(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故
$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

由例 4 得对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 5 求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

解 按行列式的定义，行列式展开后只有主对角线上三个元素的乘积才能出现 x^3 项，其系数为 $2\times(-1)\times1=-2$.

第三节 行列式的性质

本节讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系，利用对换研究行列式的一些运算性质，然后利用行列式的性质给出简便计算行列式的方法.

一、对换

定义 3 在一个排列中，把两个元素的位置对调，而其他元素不动，得到一个新的排列，这种作出新排列的过程叫作**对换**. 将相邻的两个元素对换，叫作**相邻对换**.

例如，在四阶排列 3124 中，将元素 3 和 4 对换，变成新排列 4123. 在对换下，排列的奇偶性会发生变化，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设有排列 $p_1p_2\cdots p_tpqq_1q_2\cdots q_m$，对换 p 与 q 得到排列 $p_1p_2\cdots p_tqpq_1q_2\cdots q_m$. 可以看出，经相邻对换后，元素 p_1，p_2，…，p_t 和 q_1，q_2，…，q_m 的逆序数没有改变，而元素 p，q 的逆序数可能改变. 当 $p<q$ 时，p 的逆序数增加 1，q 的逆序数不变；当 $p>q$ 时，p 的逆序数不变，q 的逆序数减少 1. 所以相邻对换后的新排列的逆序数与原来排列的逆序数相差 1，它们的奇偶性相反.

再证一般对换的情形.