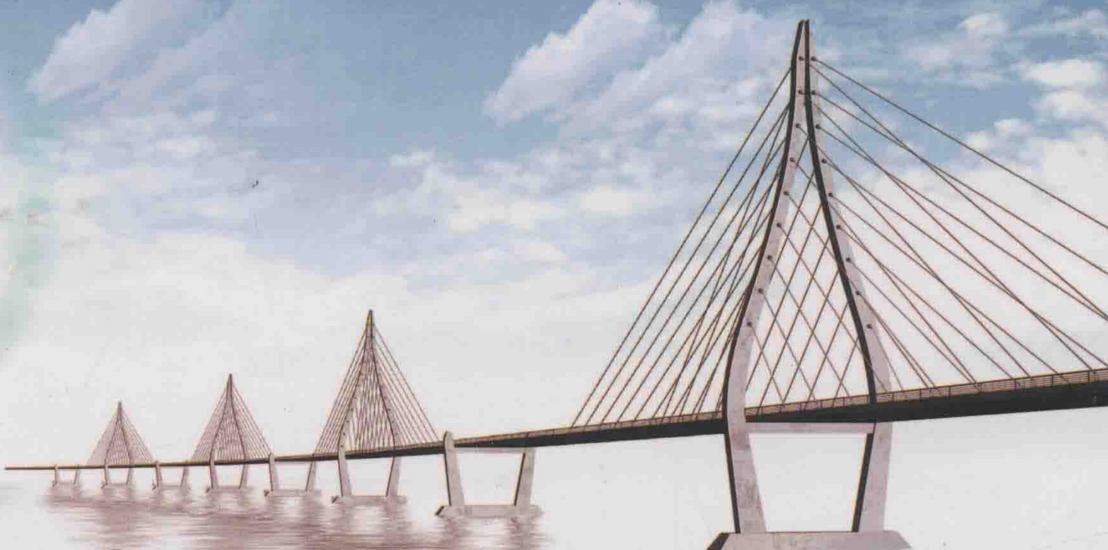
TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS
高等学校教材

工程弹性力学基础

GONGCHENG TANXING LIXUE JICHU

（第2版）

刘延强　于桂杰　编著



中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS
高等学校教材

工程弹性力学基础

（第2版）

刘延强　于桂杰　编著

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学基础/刘延强,于桂杰编著. —2版.
—东营:中国石油大学出版社,2018.5
ISBN 978-7-5636-6000-1

Ⅰ.①工… Ⅱ.①刘…②于… Ⅲ.①工程力学—弹性力学—高等学校—教材 Ⅳ.①TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 102594 号

中国石油大学(华东)规划教材

书　　名: 工程弹性力学基础(第 2 版)
作　　者: 刘延强　于桂杰

责任编辑: 岳为超(电话　0532—86981532)
封面设计: 青岛友一广告传媒有限公司

出 版 者: 中国石油大学出版社
(地址:山东省青岛市黄岛区长江西路 66 号　邮编:266580)
网　　址: http://www.uppbook.com.cn
电子邮箱: shiyoujiaoyu@126.com
排 版 者: 青岛天舒常青文化传媒有限公司
印 刷 者: 山东省东营市新华印刷厂
发 行 者: 中国石油大学出版社(电话　0532—86981531,86983437)
开　　本: 185 mm×260 mm
印　　张: 12.5
字　　数: 303 千
版 印 次: 2001 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 2 版　2018 年 7 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-5636-6000-1
定　　价: 25.00 元

内容简介

本教材秉承加强逻辑综合推理、力求简明、减少重复的原则，整体上采用以类比和演绎推理为主的叙述方式，减少了平面问题与空间问题叙述论证的重复，内容结构更加紧凑，叙述更加简明、系统，提高了综合应用水平。另外，为了方便阅读理解，在基本内容部分增加了章后阅读参考。本教材共分 11 章，前 7 章介绍弹性力学的基本理论，为基本内容；后 4 章通过对化工机械、石油机械和动力机械等一些工程结构与零部件实际问题的应用分析，介绍弹性力学问题的解法与应用，以供不同专业需求者选用。

本教材适于 50 学时以内的机械类、近机械类和土建类等相关工科专业教学使用，也可作为相关工程技术人员的参考用书。

第2版前言

PREFACE

高等教育的发展要求教学内容既要适应课程设置多元而学时缩减的特点，又要保证基本内容完整和适应专业的不断发展，因此迫切要求教材不断改善内容体系和叙述方式。作者根据教学需求和教学大纲的要求，在教学研究和实践的基础上撰写了本教材。

本教材起始于 1995 年和 1999 年两次校内印刷，又经 2001 年正式出版和 2007 年重印，经历了近 20 年的广泛应用和实践研究修订，效果良好。本教材在此基础上做了进一步的优化、修订、完善，以更加适应不断变化的教学要求。

为了使学生在较少的学时内掌握弹性力学的基本理论和应用，作者本着加强逻辑综合推理、力求简明、减少重复、精减篇幅的原则，既保留了传统教材的优势，又力求有新的发展和特色。为此，整体上采用了以类比和演绎推理为主的叙述方式，使理论论述大为简化、系统、广化和综合化，大大减少了传统讲法中平面问题和空间问题叙述论证的重复，压缩了理论篇幅，内容结构更加紧凑，叙述更加简明。同时，大幅增加例题、习题，以满足更广泛的专业应用需要。

由于基础理论部分含有大量复杂的偏微分方程、数学推导和数学表达式，易造成读者阅读、理解及掌握上的困难，为此作者增加了章后阅读参考，介绍重点、难点、规律、理解和掌握技巧、典型例题与典型习题提示或详解等，便于课后学习。

总之，这些特点充分体现了精、广、新的教材撰写宗旨，更便于在较少学时内掌握弹性力学的基本理论和应用，为弹性力学的学习打好稳固的基础。

本教材共分 11 章，前 7 章介绍弹性力学的基本理论，为基本内容；后 4 章通过对化工机械、石油机械和动力机械等一些工程结构与零部件实际问题的应用分析，介绍弹性力学问题的解法与应用。因此，本教材除可作为机械类、近机械类和土建类专业本科生的教材外，对相关工程技术人员也有一定的参考价值。

本教材第 1、第 3、第 5、第 7、第 10 章和章后阅读参考由刘延强撰写修订，第 2、第 4、第 6、第 8、第 9、第 11 章由于桂杰修订，全书由刘延强统稿。本教材初稿由北京工业大学张延庆教授作了认真仔细的审阅，并提出了许多宝贵意见，同时也得到了中国石油大学(华东)工程力学系领导和同事的大力支持，在此一并致谢。

限于作者水平，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

2017 年 6 月

第1版前言

PREFACE

根据教学的需要，按照大纲的要求，我们在教学研究和实践的基础上编写了这本教材。

为了教学使用方便，扩大使用范围，使学生在较少的学时内掌握弹性力学的基本理论和应用，以适应教育改革的需要，编写中我们本着提高起点、力求简明、精减篇幅的原则，既保留了传统教材的优势，又力求有新的发展和特色。本书从整体上采用了从一般到特殊的讨论方式，结构紧凑。本书初稿曾分别于1995年和1999年两次校内印刷，在石油大学（华东）本科生中作为教材使用了五年，效果良好。

本书共分十一章，前七章介绍了弹性力学的基本理论，为基本内容；后四章通过对化工机械、石油机械和动力机械等一些工程结构与零部件实际问题的分析，介绍了弹性力学的解法与应用。因此，该书除作为机械类、近机械类和土建类专业本科生的教材外，对相关工程技术人员也有一定的参考价值。

本书第二、四、六、八、九、十一章由胡玉林编写，第一、三、五、七、十章由刘延强编写。该书初稿由北京工业大学的张延庆教授作了认真仔细的审阅，并提出许多宝贵意见，同时也受到教研室领导和同事们的大力支持，在此一并致谢。

限于编者水平，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2001年3月

目录
CONTENTS

第1章

绪 论

1.1 弹性力学的任务

弹性体力学简称弹性力学，又称弹性理论，是固体力学的一个分支。它主要研究弹性体受外力作用、温度改变以及支座沉陷等原因而发生的应力、应变和位移。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务一样，都是分析机构和结构或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否满足所需的强度、刚度和稳定性，并寻求或改进它们的计算方法。但是，弹性力学与材料力学等又有所区别。

首先是研究问题的范围不同。材料力学基本上只研究杆状(一个方向的尺寸远大于另2个方向的尺寸)构件在拉压、剪切、弯曲、扭转变形状态下的应力和位移；结构力学主要在材料力学基础上研究杆状构件组成的结构(如桁架、刚架等杆状构件系统)的应力和位移；而弹性力学的研究范围除上述杆状构件外，还包括板、壳、块体及其组成的结构等问题，如工程中的叶轮、机壳、大轴、高压容器及管道、桥梁、堤坝、土墙、地基等，它的研究范围更加广泛。

其次是研究问题的严密程度不同。在研究杆状构件时，虽然弹性力学和材料力学都从静力、几何、物理三方面进行分析，但材料力学引用了一些关于形变状态或应力分布的假设，如平面假设，大大简化了推演过程，使解答具有很大程度的近似性；而弹性力学研究同样问题时不需引用这些假设，因而研究方法更严密，解答更精确，可以用来校核材料力学解答的近似性。

例如，研究直梁在横向载荷下的弯曲时，材料力学采用了平面假设，得出了横截面上正应力按线性分布这一近似结论；而弹性力学未采用该假设，从而其研究结果可以验证该假设的精确性和适用范围，即梁截面的高度 h 远小于梁跨度 l 时，材料力学解满足工程要求，而当 $h>l/5$ 时，该假设不再适用，这时横截面上正应力按曲线分布。

第三是解决问题的能力不同。弹性力学可以解决材料力学、结构力学无法解决的问题。例如，对于拉压构件上的孔边应力集中问题，材料力学就不能解决，只能计算净截面上的平均应力。而按弹性力学的计算结果，净截面上的应力远不是均布的，在孔边附近会发生高度

的应力集中，使孔边最大应力比平均应力大几倍。另外，虽然弹性力学通常不研究杆状构件系统，但近几十年许多人的工作使弹性力学与结构力学特别是通过有限单元法越来越密切地结合起来，弹性力学吸收了结构力学中超静定结构的分析方法（位移法、力法或混合法等），大大扩展了应用范围，提高了解决问题的能力。

总之，弹性力学研究问题的范围更广、方法更严密、结果更精确、能力更强。然而，它与材料力学、结构力学间也不是截然分开的，更不是一成不变的。我们应淡化分工，更多地发挥它们的综合应用，更好地发挥它们的作用。

1.2 弹性力学中的基本假设与研究方法

物体受力后表现出的力学性能实际上非常复杂，若精确考虑各种因素，将难以导出其力学方程，建立具有普遍意义的理论。即使导出了方程，也相当复杂，不可能求解。因此，必须根据物体性质与解题范围，既略去一些次要的、非本质的因素，使问题大为简化，方程易于建立并使求解成为可能，又能反映问题的主要方面，符合实际。为此，做如下基本假设。

1.2.1 连续性假设

连续性假设是假设物体的介质不留空隙地填满整个物体体积。这样，物体内的应力、应变和位移等物理量可视为连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上物体都是由微粒组成的，相互间有间隙，但其尺寸远小于微粒尺寸，故该假设不会引起明显误差。

1.2.2 均匀性假设

均匀性假设即假设整个物体是由同类型的均匀材料组成的。这样，物体内各点的物理性质不随坐标变换而改变。研究时可取小部分分析，然后将分析结果用于整体。像混凝土这样由 2 种或 2 种以上的材料组成的物体，只要每种材料颗粒均匀分布且远小于物体，也可视为均匀的。

1.2.3 各向同性假设

各向同性假设即假设沿任何方向物体的物理性质都相同。这样，物体内各点的物理性质不随坐标变换而改变。金属材料中的微小晶体是各向异性的，但由于晶体很小且排列杂乱无章，从统计平均意义上讲，可视为各向同性体。而木材、竹材、复合材料等则是各向异性体。

1.2.4 完全弹性假设

完全弹性假设即假设物体在引起变形的外力去除后，能完全恢复原状。这样，物体的变形与外力成正比，即服从胡克定律，求解可以使用叠加法。所以该假设又称线弹性假设。

1.2.5 小变形假设

小变形假设即假设物体位移远小于物体原尺寸,应变和转角远小于1。在研究物体平衡时,可不考虑变形引起的物体尺寸和位置变化;在建立几何方程和物理方程时,可不计形变的二次或二次以上幂项,使基本方程皆为线性方程,可应用叠加原理。

另外,除以上假设外,还有无初应力假设,即假设物体受力前处于自然状态,内部无应力。因此应力解仅为荷载或温度变化等产生的。若有初应力,则物体内实际应力等于初应力加上外力(或温度变化等)作用下用弹性力学方法求得的应力。

凡符合前4个假设的物体,可称为理想弹性体。本书仅讨论理想弹性体问题。

在研究方法上,与材料力学的截面法不同,弹性力学采用分离体法,即在物体内部取无限小平行六面体,而在物体表面取无限小四面体。由分离体的平衡写出弹性体的平衡微分方程,但数量少于未知应力总数,所以弹性力学问题是超静定的。因此解决问题必须考虑变形条件,即根据连续性假设,物体发生变形后仍为连续体,从而导出一组变形协调方程,再由胡克定律表示应力与应变关系。另外尚需知道边界条件或初始条件,才可求得问题的唯一解。实际上,弹性力学问题就是偏微分方程的边值问题。

1.3 弹性力学的基本概念

外力、应力、应变和位移是弹性力学中最基本的概念,虽然材料力学已做过讨论,在此有必要再加以说明。

1.3.1 外力

弹性力学中作用于物体上的外力分为体力和面力,这与材料力学的称谓有所不同。所谓体力,是指分布在物体体积内的力,一般用单位体积的力表示,如重力、磁力、惯性力,其单位为N/m^3。体力分量是体力在坐标轴方向的投影,通常在直角坐标系下用X,Y,Z表示;柱坐标系下用K_r,K_θ,K_z表示。而面力是分布于物体表面上的力,一般用单位表面积上的力表示,如风力、液压和接触力等,其单位为N/m^2或Pa。面力分量是面力在坐标轴方向的投影,通常在直角坐标系下用$\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$表示;柱坐标系下用$\bar{K}_r,\bar{K}_\theta,\bar{K}_z$表示。后面的讨论均认为外力是已知的。

1.3.2 应力与应力分量

物体受力后内部将产生内力。物体任何部位的内力特征可用应力来描述。为了说明应力的概念,现考察作用有平衡力系的任意形状的物体(图1.1)。

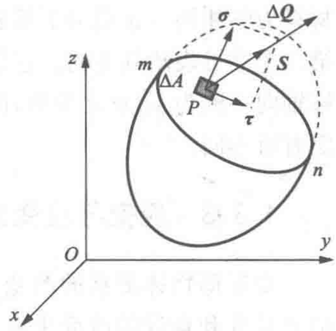


图1.1

物体受外力作用时,其内部相邻两部分之间就产生了相互作用力,即内力,假想过P点用截面mn将物体分为两部分,取一部分,该部分对剩下部分的作用可用分布在截面上的

内力来代替。在截面上任一点 P 处取一微小面积 ΔA，其上合内力矢量为 ΔQ，则内力平均分布集度为 $\Delta Q/\Delta A$。当 ΔA 无限减小趋于 P 点时，物体在该截面上 P 点全应力或应力矢量为：

$$\boldsymbol{S}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A}\quad（方向为\ \Delta \boldsymbol{Q}\ 的极限方向）$$

由以上分析可知：

(1) 应力大小反映了截面上某点内力的强度，即内力分布集度。

(2) 过同一点所取的截面方位不同，应力也不相同，即应力与所取截面的方位有关。

(3) 应力是矢量。物体变形和材料强度一般由正应力 $\boldsymbol{\sigma}$（沿截面法向）和剪应力 $\boldsymbol{\tau}$（沿截面切向）2 个分量来表示。

由于 mn 截面是任取的，实际上过 P 点可取无数个方位不同的截面，各截面上 P 点应力是不同的。为此，将物体同一点各截面上的应力状况称为一点的应力状态。分析一点的应力状态对研究物体的强度是十分重要的。

为了分析一点的应力状态，绕 P 点平行坐标面取一微小六面体（简称微元体），如图 1.2 所示。其中外法向与坐标轴正向一致的截面称为正面，反之称为负面。只要知道过一点 3 个互相垂直微面上的应力矢量，即可确定该点的应力状态。令 3 个正面上应力矢量分别为 $\boldsymbol{F}_x,\boldsymbol{F}_y,\boldsymbol{F}_z$（下标表示所在截面方位）。将每个矢量向坐标轴方向分解得 3 个应力分量，分别表示为：

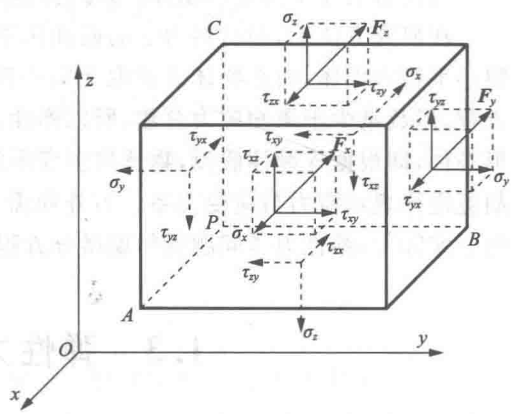


图 1.2

$$\boldsymbol{F}_x=(\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz}),\quad \boldsymbol{F}_y=(\tau_{yx},\sigma_y,\tau_{yz}),\quad \boldsymbol{F}_z=(\tau_{zx},\tau_{zy},\sigma_z)$$

当微元体无限缩小时，3 个截面即趋于过 P 点截面。9 个应力分量即该点的应力分量。这 9 个应力分量的集合称为应力张量，表示为：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\quad (i,j=x,y,z) \tag{1.1}$$

由第 2 章证明的剪应力互等定理可知，9 个应力分量中只有 6 个是独立的，即 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$。第 2 章将说明这 6 个应力分量可确定一点的应力状态。应力分量的下标含义与材料力学相同。正应力下标表示其作用面外法向，剪应力下标第一个字母表示作用面外法向，第二个字母表示其方向。它们的正、负规定为：正应力以拉为正，压为负；剪应力在正面上与坐标轴向一致为正，反之为负，而在负面上则与坐标轴向相反为正，反之为负。这与材料力学规定有所不同。

1.3.3 应变与应变分量

变形即物体形状的改变。物体形状可用各部分长度和角度来表示。因此物体的变形可由其长度和角度的改变来表示。

为了表述物体内任一点 P 的变形情况，过 P 点沿三轴正向取 3 条微小线段 PA,PB,

PC(图 1.2)。物体变形后,该 3 条线段长度及它们之间的直角必将发生改变。各线段单位长度的伸缩即相对伸缩称为正应变;各线段间直角的改变(以弧度计)称为剪应变。正应变用 ε 表示,ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变,其余类推。正应变以拉伸为正,缩短为负。剪应变用 γ 表示,γ_{xy} 表示 x 与 y 两方向的线段(即 PA 与 PB)之间直角的改变,其余类推。剪应变以直角变小为正,变大为负,正、负号规定与剪应力相适应。正应变与剪应变皆为无量纲量,共 9 个,其中 6 个是独立的,即 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$。可以证明(第 3 章),在物体内任一点如果已知这 6 个应变,则经该点的任一线段的正应变和任两线段之间直角的剪应变都可求得,即该点的应变状态可以确定,所以这 6 个应变称为该点的应变分量。

1.3.4 位移与位移分量

位移即位置的移动,其中只产生了刚体移动和转动,物体各点相对位置不变,这种位移称为刚体位移;如果各点之间相对位置发生变化使物体大小形状发生改变,则这种位移称为变形位移。弹性力学中主要讨论变形位移。

物体内任一点的位移可用其在 x,y,z 三轴上的投影 u,v,w 来表示,以沿坐标轴正向为正,沿坐标轴负向为负。u,v,w 即该点的位移分量。

应当指出,体力、面力、应力、应变、位移等各分量一般都随点的位置不同而不同,因而是坐标的函数。

习 题

1.1 举例说明均匀的各向异性体和非均匀的各向同性体以及非均匀的各向异性体各是什么。

1.2 一般的混凝土构件、钢筋混凝土构件、岩质地基、土质地基等能否作为理想弹性体?

阅读参考

基本要求:熟悉和理解弹性力学的任务、基本假设、研究方法及体力、面力、应力、应变、位移等基本概念。

重点:体力、面力、应力、应变、位移等及其分量的概念。

难点:基本假设的含义与意义,外力的表达量。

主要内容理解参考:

一、弹性力学的任务

弹性力学的任务是研究弹性体由于外力作用等原因而发生的应力、应变和位移。与材料力学任务有相同的方面,即都是分析构件在弹性阶段的应力和位移等,寻求或改进分析计算方法,校核强度、刚度和稳定性;但是弹性力学研究问题的范围更广(不仅研究杆状构件,还研究板、壳、块体等)、方法更严密(不用平面假设等)、结果更精确、功能更强(如应力集中、深梁等问题)。了解弹性力学的任务,有助于明确学习目的和应用。

二、弹性力学的基本假设

由于弹性体受力后表现出的力学性能很复杂，对于力学方程的建立，精确考虑各种因素将难以做到，即使建立起来，也难以求解，为此，需要做几点基本假设，以便简化问题，且符合实际。基本假设为：连续性假设、均匀性假设、各向同性假设、完全弹性假设、小变形假设、无初应力假设。

学习理解这几点基本假设，有助于掌握弹性理论的适用范围和推演依据，学习时要注意领会每点假设的作用、对实际的简化及依据。例如，连续性假设的作用即可使弹性体的应力、应变、位移等物理量用坐标的连续函数表示，有助于理解后面叙述的变形协调条件；其对实际的简化在于忽略了物体内微粒间隙，因为间隙尺寸远小于微粒尺寸，其影响也很小，可忽略，这也是该假设的依据，反映了问题主要方面。

符合连续性、均匀性、各向同性、完全弹性等假设的弹性体为理想弹性体。本书限于研究理想弹性体。所以，清晰领会基本假设，有助于认识欲研究弹性体是否属于本书涉及范围。

例如，举例说明哪些物质属于均匀的各向异性体和非均匀的各向同性体以及非均匀的各向异性体。回答该问题主要利用对均匀性假设、各向同性假设含义的理解。

竹材即可认为是均匀的各向异性体，因为其纵向与横向物理性质（如抗剪切能力）截然不同，是各向异性的；各点处可认为都由竹材均匀分布所组成，故是均匀的（如各点纵向和横向的物理性质分别相同）。

某些基础混凝土梁（或板）的水泥与石子组合杂乱无章，从统计平均意义看，各点可认为各向同性，即各点处各方向具有相同的物理性质；而若在预制过程中，上部水泥、石子分布较稀疏，下部较密实，就是非均匀的。这些基础混凝土梁即非均匀的各向同性体。

有些复合材料往往是由一层层不同材料叠合而成的。在层面处纵、横向物理性质不同，是各向异性的；各层材料往往不同，是不均匀的。这些复合材料即非均匀的各向异性体。

三、弹性力学的研究方法——分离体法

根据弹性体的连续性和均匀性假设，研究时可取小部分分析，将分析结果应用于整体描述，即在物体内绕研究点取微小平行六面体，研究其平衡、几何变形、物理关系，作为弹性体的基本方程；在边界上取微小四面体（斜面即边界，便于拟合不规则边界），由静力关系建立边界处内力应满足的边界条件。该研究方法称为分离体法，是弹性力学研究的基本方法。

四、弹性力学的基本概念

1）外力

外力分体力和面力 2 种。体力为分布于物体内单位体积的力，遇到最多的是重力，其次是磁力、惯性力，一般用其坐标投影表示，称为体力分量。直角坐标系下表示为 X,Y,Z，柱坐标系下表示为 K_r,K_θ,K_z。面力是分布于物体表面上单位面积的力，遇到最多的是液压和风力，其次是接触力等，一般用坐标投影表示，称为面力分量，直角坐标系下表示为 $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$。体力和面力单位分别为 $\mathrm{N/m^3}$ 和 Pa。

体力分量与面力分量为弹性力学问题的已知量。所以，解题前要充分理解题意，正确写出问题的体力分量与面力分量。注意：它们是与坐标轴向有关的代数量。

2）应力与应力分量

物体内任意截面上某点的内力分布集度或单位截面积上的内力称为全应力，是矢量，单

位为 Pa,kPa,MPa,GPa,反映该截面该点的内力强度,与截面方位有关,一般用其分量正应力和剪应力表示。

绕物体内某点做平行坐标面的六面体,其上外法向与坐标轴向一致的面为正面,外法向与坐标轴向相反的面为负面。每个面上全应力沿坐标轴有 3 个分量:1 个法向应力分量和 2 个切向剪应力分量。例如,外法向为 x 轴的截面上分量有 $\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz}$,剪应力下标中第一个字母表示应力所在截面外法向,第二个字母表示剪应力所沿轴向。由于 3 个互垂面的应力可表示一点应力状态,故取 3 个正面上 9 个应力分量,根据剪应力互等定理,9 个应力分量中实际有 6 个是独立的,是弹性力学的基本未知量。弹性力学所说的应力分量就是这 6 个独立的应力分量,即 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$(直角坐标系下)。这 6 个独立的分量可完全确定一点的应力状态,一点的应力状态分析是研究物体强度的基础。理解正面与负面的概念有助于掌握应力分量的正、负规定。

应力分量的正、负号规定:正面上剪应力与坐标轴向一致为正,相反为负;负面上剪应力与坐标轴向相反为正,一致为负。正应力与材料力学一致,拉为正,压为负。

3) 应变与应变分量

应变即物体形状的改变,由一点处线段相对长度的改变(正应变)和两正交线段夹角的改变(剪应变)表示,属于无量纲量。

与应力分量对应的也有 6 个独立的应变分量。在直角坐标系下为 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$。前 3 个量为沿 3 个坐标轴向的正应变,后 3 个量为剪应变,下标表示两坐标轴向的线段间直角的改变。例如,γ_{zx} 表示 z,x 轴向线段间直角的改变。应变分量可确定一点的应变状态,即一点处各方向的正应变和任两正交线段间夹角的改变(剪应变)的情况。

应变分量的正、负号规定:正应变伸长为正,压缩为负;剪应变使直角减小为正,增大为负。应变分量也是弹性力学的基本未知量。

4) 位移与位移分量

位移即物体内各点位置的变化,分为刚体位移和变形位移 2 种。刚体位移是指物体形状不变时各点位置的改变;变形位移是指使物体发生变形的点的位移。弹性力学主要研究变形位移。位移分量即位移在坐标轴向上的分量,沿 x,y,z 坐标轴分量分别表示为 u,v,w。与坐标轴向一致的位移为正,反之为负。位移分量也是弹性力学的基本未知量。

综上,弹性力学问题的已知量为体力分量、面力分量或某边界处的位移分量;基本未知量为应力分量、应变分量、位移分量,共 15 个。

第 2 章

应力分析

2.1 一点的应力状态

上一章曾指出，物体受外力作用后，过内部任一点不同截面上的应力一般是不同的。为了研究强度问题，必须知道任一点各截面上的应力情况，即一点的应力状态。

假设已知物体内任一点 M 的 6 个独立的应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$，研究过该点任意斜截面上的应力情况。为此，绕 M 点截取平行于坐标面的微六面体，然后，取任意斜平面 ABC，从其上截取一四面体 $MABC$，如图 2.1 所示。当斜平面 ABC 面积无限小而趋于 M 点时，其上的应力就是过 M 点任意斜截面上的应力。知道了该面上的应力，M 点的应力状态也就得以确定。

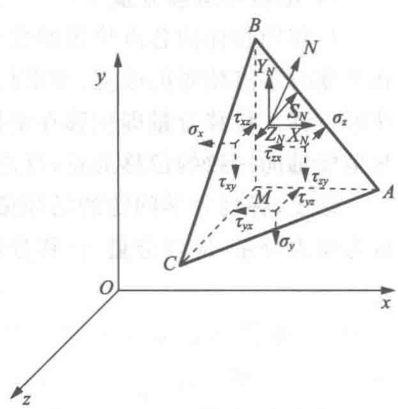


图 2.1

设斜平面 ABC 外法线 N 的方向余弦为 l,m,n，边长 MA,MB,MC 分别为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$；斜面上的全应力为 S_N，在 x,y,z 轴上的投影分别为 X_N,Y_N,Z_N，四面体体力分量为 X,Y,Z(图 2.1 中未标出)；斜平面面积为 $\mathrm{d}A$，则 MBC，MAC，MAB 面的面积分别为 $l\mathrm{d}A$，$m\mathrm{d}A$，$n\mathrm{d}A$，四面体 $MABC$ 的体积为：

$$\Delta V=\frac{1}{6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}l\mathrm{d}A\mathrm{d}x=\frac{1}{3}m\mathrm{d}A\mathrm{d}y=\frac{1}{3}n\mathrm{d}A\mathrm{d}z$$

由平衡条件 $\sum F_x=0$ 可得：

$$X_N\mathrm{d}A-\sigma_x l\mathrm{d}A-\tau_{yx}m\mathrm{d}A-\tau_{zx}n\mathrm{d}A+X\frac{l\mathrm{d}A\mathrm{d}x}{3}=0$$

上式除以 $\mathrm{d}A$，并略去高阶小量，可得到下列方程的第一式。同理，由 $\sum F_y=0$ 和 $\sum F_z=0$ 可得到下列方程的第二、三式。

$$\left.\begin{aligned}X_N&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\Y_N&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\Z_N&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\tag{2.1a}$$