俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Partially Ordered Space Functional Analysis (II)

半序空间泛函分析（下）

[苏] Л. В. 康托洛维奇 [苏] Б. З. 乌利赫 [苏] А. Г. 平斯克尔 著
何纪勤 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

半序空间泛函分析（下）

Partially Ordered Space Functional Analysis (II)

[苏] Л.В.康托洛维奇 [苏] Б.З.乌利赫 [苏] А.Г.平斯克尔 著

何纪勤 译

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分七章,分别介绍了加性算子,线性算子的解析表示,线性算子的拓展,线性算子序列,全线性泛函与共轭空间,泛函方程,K 空间的具体表现的相关知识,书中还配有相关的例题以供读者学习理解.

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

半序空间泛函分析. 下/(苏)Л. В. 康托洛维奇,(苏)Б. З. 乌利赫,(苏)А. Г. 平斯克尔著;何纪勤译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.6

ISBN 978-7-5603-7389-8

Ⅰ. ①半… Ⅱ. ①Л… ②Б… ③А… ④何… Ⅲ. ①半序线性空间-泛函分析 Ⅳ. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 095701 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 穆 青
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 21.5 字数 410 千字
版 次 2018 年 6 月第 1 版 2018 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7389-8
定 价 68.00 元

◎ 目录

第二编　半序空间内的线性算子

第二编

半序空间内的线性算子

第七章 加性算子

这一章所研究的对象是将一个空间变换到另一个空间的一些算子类. 将 K 空间变换到自身的个别算子的例子,我们已在前面见到:第二章与第三章的投影算子,第四章的元素函数.

现在我们仅研究加性算子,并且在大多数情况下都是依某种意义连续的算子. 正算子概念也占有重要的地位. 这一章的基本内容是:一些自然出现的某些重要算子类的定义,研究这些算子类之间的相互关系,以及研究构成这些类的算子本身的性质. 某些概念不仅要对 K 空间引入,而且还要对更一般的 K 线集或 K 群引入.

§1 正则算子

1.1 一般定义

设 X 与 Y 是两个 K 线集,且对于任意 $x\in X$ 定义了单值函数 $y=U(x)$,函数值 y 是 Y 的元素. 这样的函数叫作把 X 映到 Y 的算子.

若 Y 是实数空间,则算子 $y=U(x)$ 叫作泛函.

算子 $y=U(x)$ 叫作加性的,如果对任意 $x_1,x_2\in X$ 有

$$U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2) \tag{1}$$

算子叫作齐性的,如果对于任意 $x\in X$ 及任一数 α 有

$$U(\alpha x)=\alpha U(x) \tag{2}$$

算子叫作正的,如果对于任意 $x\geqslant\mathbf{0}$有 $U(x)\geqslant\mathbf{0}$.

我们指出算子的某些简单性质.

1.1.1

若 $U(x)$ 是加性的,则:

(a) $U(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

(b) 对于任意有理数 r,$U(rx)=rU(x)$;

(c) 加性算子被它与正 x 相应的值所完全决定,就是说,若 $U_1(x)$ 与 $U_2(x)$ 是加性的且对于 $x\geqslant\mathbf{0}$,$U_1(x)=U_2(x)$,则对于所有 x,$U_1(x)=U_2(x)$.

证 (a) 由加性定义立刻得出

$$U(x)=U(x+\mathbf{0})=U(x)+U(\mathbf{0})$$

即 $U(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

(b) 若 n 是正整数,则

$$U(nx)=\underbrace{U(x)+\cdots+U(x)}_{n\text{个加项}}=nU(x)$$

当 $r=\dfrac{1}{n}$时,应用等式

$$U\left(n\cdot\frac{1}{n}x\right)=nU\left(\frac{1}{n}x\right)$$

得出

$$U\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}U(x)$$

若 $r=\dfrac{p}{q}$,这里 p,q 为自然数,则依已证得的结果,有

$$U\left(\frac{p}{q}x\right)=pU\left(\frac{1}{q}x\right)=\frac{p}{q}U(x)$$

最后,若 r 是负有理数,则

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=U(\mathbf{0})=U(rx+|r|x)=U(rx)+U(|r|x)\\&=U(rx)+|r|U(x)\end{aligned}$$

由此

$$U(rx)=-|r|U(x)=rU(x)$$

若 $r=0$，则(b)是显然的.

(c)由对于任意 x 有

$$U(x)=U(x_+-x_-)=U(x_+)+U(-x_-)=U(x_+)-U(x_-)$$

而推出.

1.1.2

设对于 $x\geqslant\mathbf{0}$ 定义了对于任意 $x_1,x_2\geqslant\mathbf{0}$ 满足加性条件(1)的算子 $U(x)$. 假定，对于任意 $x\in X$ 有

$$U(x)=U(x_+)-U(x_-)$$

那么，算子 $U(x)$ 在整个 X 内是加性的.

证 首先证明，若 $x=y-z$，这里 $y,z\geqslant\mathbf{0}$，则

$$U(x)=U(y)-U(z)$$

因为 x_+ 是大于或等于 x 的最小正元素，故 $x_+\leqslant y$，因而 $y=x_++v$，这里 $v\geqslant\mathbf{0}$. 所以

$$z=y-x=x_++v-(x_+-x_-)=x_-+v$$

于是

$$U(y)=U(x_+)+U(v)$$
$$U(z)=U(x_-)+U(v)$$

所以

$$U(y)-U(z)=U(x_+)-U(x_-)=U(x)$$

利用已证等式，我们得到：对于任意 $x,y\in X$，有

$$\begin{aligned}U(x)+U(y)&=U(x_+)-U(x_-)+U(y_+)-U(y_-)\\&=U(x_++y_+)-U(x_-+y_-)\\&=U(x_++y_+-x_--y_-)=U(x+y)\end{aligned}$$

证明完毕①.

1.1.3

若算子 $U(x)$ 是正的且是加性的，于是：

(a)由 $x_1\geqslant x_2$ 得出 $U(x_1)\geqslant U(x_2)$；

(b) $U(x)$ 是齐性的；

(c) $|U(x)|\leqslant U(|x|)$.

证 (a)由等式

① 由1.1.1(c)推出，定义于正元素集合上的算子可以保持加性而唯一地扩张到整个 X 上.

$$U(x_1)=U(x_2)+U(x_1-x_2)$$

而推得. 因 $U(x_1-x_2)\geqslant\mathbf{0}$之故.

(b)根据 1.1.1(b),对于有理数 α, $U(x)$满足齐性条件(2). 对于任何 α 以及$x\geqslant\mathbf{0}$,我们选取这样的有理数 r_1 及 r_2,使 $r_1<\alpha<r_2$. 于是 $r_1x\leqslant\alpha x\leqslant r_2x$,因此

$$r_1U(x)=U(r_1x)\leqslant U(\alpha x)\leqslant U(r_2x)=r_2U(x)$$

因 $U(x)\geqslant\mathbf{0}$,故同时有

$$r_1U(x)\leqslant\alpha U(x)\leqslant r_2U(x)$$

但因 r_1 与 r_2 差的绝对值可以任意小,所以显然有

$$U(\alpha x)=\alpha U(x)$$

若 x 为任意元素,则

$$U(\alpha x)=U(\alpha x_+)-U(\alpha x_-)=\alpha[U(x_+)-U(x_-)]=\alpha U(x)$$

(c)我们有

$$|U(x)|=|U(x_+)-U(x_-)|\leqslant U(x_+)+U(x_-)=U(|x|)$$

1.2 正则算子

定义 算子 $U(x)$叫作正则的,假如它可以表为形式

$$U(x)=U_1(x)-U_2(x) \tag{3}$$

而 $U_1(x)$与 $U_2(x)$是正加性算子.

显然,正则算子是加性的,并且由 1.1.3 立刻推得正则算子是齐性的.

正则算子还可按另一方式陈述,为此再给出一个:

定义 正加性算子 $y=U_1(x)$叫作算子 $y=U(x)$的优界算子,假使对于任何 $x\geqslant\mathbf{0}$, $U_1(x)\geqslant U(x)$.

1.2.1

加性算子是正则的必要且充分的条件是它具有优界算子.

证 若 $U(x)$有优界算子 $U_1(x)$,则式子

$$U(x)=U_1(x)-[U_1(x)-U(x)]$$

说明 $U(x)$是正则的,因 $U_1(x)$与 $U_1(x)-U(x)$都是正加性算子.

反之,若 $U(x)$是正则的,那么它可表作式(3),因 $U_1(x)$与 $U_2(x)$是正加性算子,于是 $U_1(x)$显然是 $U(x)$的优界算子.

附记 若加性算子 $U(x)$具有正则"优界"算子 $U_1(x)$,即 $U_1(x)$正则且对于 $x\geqslant\mathbf{0}$, $U_1(x)\geqslant U(x)$,那么 $U(x)$是正则的.

事实上, $U_1(x)$有正优界算子,则这优界算子也是 $U(x)$的优界算子.

1.2.2

现在设 Y 是 K 空间, X 照前一样为任意 K 线集. 以 H_r 表示所有把 X 映于 Y

的正则算子 $y=U(x)$ 的集合. 今后我们常常叫正则算子为类 H_r 中的算子.

我们把 H_r 线性化. 若 $U_1,U_2\in H_r$,则和 $U=U_1+U_2$ 定义为这样的算子,对于所有 x 有

$$U(x)=U_1(x)+U_2(x)$$

若 $U_1\in H_r$,α 是一个数,乘积 $U=\alpha U_1$ 依下定义:对于任意 x 有

$$U(x)=\alpha U_1(x)$$

显然,在上面两种情况中 $U\in H_r$,故 H_r 成为线性集合. H_r 中的零元素是算子 $U(x)\equiv\mathbf{0}$①.

H_r 中的正元素($U\geqslant\mathbf{0}$)是指依 1.1 中给出的定义下是正算子. 这时,若 $U\geqslant\mathbf{0}$而 $U\neq\mathbf{0}$,U 称为纯正的($U>\mathbf{0}$). 容易看出,若 $U>\mathbf{0}$,则存在 $x>\mathbf{0}$使 $U(x)>\mathbf{0}$. 事实上,假使对任何 $x\geqslant\mathbf{0}$,$U(x)=\mathbf{0}$,则依加性会有 $U(x)\equiv\mathbf{0}$.

现在我们来证明关于集合 H_r 的基本定理.

1.2.3

关于 H_r 的定理 把 K 线集 X 映于 K 空间 Y 的正则算子的集合 H_r 是 K 空间.

证 K 空间的公理Ⅰ,Ⅱ及Ⅳ在 H_r 内显然得到满足. 公理Ⅲ由于优界算子的存在也得到满足. 尚需证明公理Ⅴ也满足.

设 $U_\xi\in H_r(\xi\in\Xi)$,且对于所有 ξ,$U_\xi\leqslant U_0\in H_r$. 对于 $x\geqslant\mathbf{0}$,我们令

$$U(x)=\sup_{\substack{x_1+\cdots+x_n=x\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant\mathbf{0}\\ \xi_1,\cdots,\xi_n\in\Xi}}\left[U_{\xi_1}(x_1)+\cdots+U_{\xi_n}(x_n)\right]\tag{4}$$

这里的上确界是对所有满足所给条件的有限组 $x_1,\cdots,x_n$ 及 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 而取的.

首先,由

$$U_{\xi_1}(x_1)+\cdots+U_{\xi_n}(x_n)\leqslant U_0(x_1)+\cdots+U_0(x_n)=U_0(x)$$

得出 $U(x)\leqslant U_0(x)$. 其次,取 $n=1$,$x_1=x$,$\xi_1=\xi$(任意的 $\xi\in\Xi$),我们得到对于所有的 $\xi\in\Xi$,$U(x)\geqslant U_\xi(x)$.

再证明对于正的 x,$U(x)$ 是加性的. 令 $x=y+z$,这里 $y,z\geqslant\mathbf{0}$,$y=y_1+\cdots+y_m$,$z=z_1+\cdots+z_n$,这里所有的 $y_i,z_i\geqslant\mathbf{0}$. 于是依定义,有

$$U(x)\geqslant\left[U_{\xi_1}(y_1)+\cdots+U_{\xi_m}(y_m)\right]+\left[U_{\xi'_1}(z_1)+\cdots+U_{\xi'_n}(z_n)\right]$$

($\xi_i,\xi'_j\in\Xi$ 是任意取的). 每个方括号中各自取上确界,则得

$$U(x)\geqslant U(y)+U(z)\tag{5}$$

反之,对于所有的 $x\geqslant\mathbf{0}$,令 $x=x_1+\cdots+x_n$ 与 $x=y+z(y,z\geqslant\mathbf{0})$. 于是由元

---

① 与通常一样,H_r 的零元素用$\mathbf{0}$表示.

素两重分解的可能性(第一章1.4.2),存在这样的 $y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_n\geqslant\mathbf{0}(y_i,z_i\in X)$,使得

$$x_i=y_i+z_i\quad(i=1,\cdots,n)$$
$$y=y_1+\cdots+y_n,z=z_1+\cdots+z_n$$

由此

$$U_{\xi_1}(x_1)+\cdots+U_{\xi_n}(x_n)=[U_{\xi_1}(y_1)+\cdots+U_{\xi_n}(y_n)]+[U_{\xi_1}(z_1)+\cdots+U_{\xi_n}(z_n)]\leqslant U(y)+U(z)$$

左边取上确界,得

$$U(x)\leqslant U(y)+U(z)$$

再与式(5)比较得出所要等式

$$U(x)=U(y)+U(z)$$

依1.1.2,算子 $U(x)$ 能保持加性扩张到整个 X 上. 因对于 $x\geqslant\mathbf{0}$,$U(x)\leqslant U_0(x)$,所以 $U(x)$ 有优界算子,因此 $U\in H_r$(参看1.2.1的附记).

可取集合 $\{U_\xi\}$ 的任一上界当作 U_0,而与以前一样 $U_\xi\leqslant U\leqslant U_0$,因此,$U=\sup U_\xi$. 定理证毕.

附记 由算子 $U(x)$ 的加性证明中推出:若 $U_\xi(x)$ 是加性的,而算子 $U(x)$(依公式(4),它对 $x\geqslant\mathbf{0}$有定义)若对于每一 x 是有限的,则 $U(x)$ 是加性的.

事实上,在这个讨论中,并没有用到 U_ξ 属于类 H_r 的事实,而 U_0 的存在仅用以肯定 $U(x)<+\infty$.

因为 H_r 是 K 空间,所以对于任一 $U\in H_r$,U_+,U_-,$|U|$ 有意义. 我们来阐明它们作为算子的意义.

1.2.4

因为 $U_+=U\vee\mathbf{0}$,于是依公式(4),对于 $x\geqslant\mathbf{0}$,我们有

$$U_+(x)=\sup_{\substack{x_1+x_2=x\\x_1,x_2\geqslant0}}[U(x_1)+\mathbf{0}]=\sup_{0\leqslant x'\leqslant x}U(x')\tag{6}$$

类似地有 $U_-=(-U)\vee\mathbf{0}$,从而对于 $x\geqslant\mathbf{0}$有

$$U_-(x)=\sup_{0\leqslant x'\leqslant x}[-U(x')]=-\inf_{0\leqslant x'\leqslant x}U(x')\tag{7}$$

最后,$|U|=U\vee(-U)$,再依公式(4),对于 $x\geqslant\mathbf{0}$,有

$$|U|(x)=\sup_{\substack{x_1+x_2=x\\x_1,x_2\geqslant0}}[U(x_1)-U(x_2)]\tag{8}$$

1.2.5

若 $U\in H_r$,则对于任何 x 有

$$|U(x)|\leqslant|U|(|x|)$$

这里的$|U|$是:对于一切x,使

$$|U(x)|\leqslant U^*(|x|) \tag{9}$$

的最小的算子$U^*(U^*\in H_r)$.

证 若$x\geqslant\mathbf{0}$,则因$U\leqslant|U|$, $-U\leqslant|U|$得

$$U(x)\leqslant|U|(x),\ -U(x)\leqslant|U|(x)$$

因此

$$|U(x)|\leqslant|U|(x)$$

首先,对于任意x,有

$$|U(x)|\leqslant|U(x_+)|+|U(x_-)|\leqslant$$
$$|U|(x_+)+|U|(x_-)=|U|(|x|)$$

其次,若$U^*\in H_r$是满足式(9)的任意算子,则对于$x\geqslant\mathbf{0}$, $|U(x)|\leqslant U^*(x)$,因此

$$U(x)\leqslant U^*(x),\ -U(x)\leqslant U^*(x)$$

即

$$U\leqslant U^*,\ -U\leqslant U^*$$

于是

$$|U|=U\vee(-U)\leqslant U^*$$

算子$|U|$除了用式(8)表示之外,还可以有别的表达式.

1.2.6

对任意$x\geqslant\mathbf{0}$有

$$|U|(x)=\sup_{|x'|\leqslant x}U(x')=\sup_{|x'|\leqslant x}|U(x')|$$

证 首先

$$\sup_{|x'|\leqslant x}U(x')=\sup_{|x'|\leqslant x}[U(x')\vee U(-x')]=$$
$$\sup_{|x'|\leqslant x}\{U(x')\vee[-U(x')]\}=\sup_{|x'|\leqslant x}|U(x')|$$

由1.2.5可知这个上确界具有有限值

$$V(x)\leqslant|U|(x)$$

我们来证明相反的不等式:

令$x=x_1+x_2$,这里$x_1,x_2\geqslant\mathbf{0}$. 于是$|x_1-x_2|\leqslant x$且

$$U(x_1)-U(x_2)=U(x_1-x_2)\leqslant V(x)$$

于是依公式(8)得$|U|(x)\leqslant V(x)$. 这样一来,$V(x)=|U|(x)$,命题证毕.

1.2.7

定理(正则性的鉴定法) 要使加性算子$U(x)$是正则的,必须且只需对于

所有的有界集 $E\subset X$,它的象在 Y 内有界. 这个条件等效于:对于任何 $x\geqslant\mathbf{0}$,成立不等式

(a) $\sup\limits_{|x'|\leqslant x}|U(x')|=\sup\limits_{|x'|\leqslant x}U(x')<+\infty$,

或者:对于任何 $x\geqslant\mathbf{0}$成立较弱的不等式:

(b) $\sup\limits_{0\leqslant x'\leqslant x}U(x')<+\infty$.

证 定理的第一个说法和不等式(a)的成立的等效性是明显的. 不等式(a)在任意 $x\geqslant\mathbf{0}$时成立的必要性已证于 1.2.6. 我们来证明不等式(b)的充分性.

我们假定对于 $x\geqslant\mathbf{0}$有

$$V(x)=\sup_{0\leqslant x'\leqslant x}U(x')$$

依条件,$V(x)<+\infty$. 但 $V(x)$和仅含 U 与$\mathbf{0}$时的公式(4)所定义的算子一致($\mathbf{0}$是 K 空间 H_r 的零元素),于是根据 1.2.3 的附记,若 $V(x)<+\infty$,则它是加性的. 由 1.2.1,$V(x)$可以保留加性而扩张到整个 X 上去. 此外,明显的,当 $x\geqslant\mathbf{0}$时

$$V(x)\geqslant U(\mathbf{0})=\mathbf{0},V(x)\geqslant U(x)$$

这样一来,$U(x)$具有优界算子,即是说 $U\in H_r$,证毕.

1.2.8

若 $U=\inf U_\xi(U_\xi\in H_r)$,则由公式(4)及关系式 $U=-\sup(-U_\xi)$出发,对于 $x\geqslant\mathbf{0}$,我们易得类似的公式

$$U(x)=\inf_{\substack{x_1+\cdots+x_n=x\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant\mathbf{0}\\ \xi_1,\cdots,\xi_n\in\Xi}}[U_{\xi_1}(x_1)+\cdots+U_{\xi_n}(x_n)] \tag{10}$$

在这一章里,我们不打算详尽地说明 H_r 中离析性概念的意义,而只指出一个充分性的鉴别法.

1.2.9

设 X 分解为两个 K 线集 X_1 与 X_2,即 X_1 与 X_2 是 X 的两个离析线性正规子集,同时,对任何 $x\in X$ 可表为形式

$$x=\mathbf{S}(x_1,x_2)=x_1+x_2$$

这里 $x_1\in X_1,x_2\in X_2$[①]. 若当 $x\in X_2$ 时,$U_1(x)=\mathbf{0}$,而当 $x\in X_1$ 时,$U_2(x)=\mathbf{0}$($U_1,U_2\in H_r$),则 $U_1\mathrm{d}U_2$.

证 由公式(8)立刻推得,当 $x\in X_2$ 时,$|U_1|(x)=\mathbf{0}$,当 $x\in X_1$ 时,$|U_2|(x)=\mathbf{0}$.

---

① 若 X 是 K 空间,则 X_1 与 X_2 是它的分支.

现再依公式(10),对于 $U=|U_1|\wedge|U_2|$ 与 $x\geqslant\mathbf{0}$,我们有

$$U(x)=\inf_{\substack{x_1+x_2=x\\x_1,x_2\geqslant\mathbf{0}}}[\,|U_1|(x_1)+|U_2|(x_2)\,]$$

特别地,当 $x_1\in X_2,x_2\in X_1$,则

$$|U_1|(x_1)=|U_2|(x_2)=\mathbf{0}$$

因而 $U(x)=\mathbf{0}$. 这样一来,$U=\mathbf{0}$,即 $U_1\mathrm{d}U_2$.

1.3 正则算子 K 空间中的(o)收敛

与所有 K 空间一样,(o)收敛概念在 H_r 中也有意义. 这时,关系式 $U_n\xrightarrow{(o)}U$ 在一般情况下并不等效于 $U_n(x)\xrightarrow{(o)}U(x)$(对于任何 $x\in X$)所表示的按点收敛(参考第八章 3.1.2). 现在我们要说明这两种收敛间的关系. 先注意一个辅助命题.

1.3.1

若 $U_n(x)$是在同一个 K 空间 Y 中取值的加性算子且若对于任一 $x\in X$ 存在用 $U(x)$表示的有限$(o)\lim U_n(x)$(或$(t)\lim U_n(x)$),则 $U(x)$是加性算子.

这个命题由极限的一般性质立刻推出

$$\begin{aligned}U(x_1+x_2)=\lim U_n(x_1+x_2)=\lim[U_n(x_1)+U_n(x_2)]=\\ \lim U_n(x_1)+\lim U_n(x_2)=U(x_1)+U(x_2)\end{aligned}$$

1.3.2

由 H_r 中的(o)收敛可推得算子序列的按点(o)收敛,即:若 $U_n\in H_r(n=1,2,\cdots)$,$U\in H_r$,$U_n\xrightarrow{(o)}U$,则对于所有 x 有

$$U_n(x)\xrightarrow{(o)}U(x)$$

证 设 $U_n\searrow U$,则对于任何 $x\geqslant\mathbf{0}$,存在这样的元素 $V(x)\in Y$ 使

$$U_n(x)\searrow V(x)\geqslant U(x)$$

但如对所有 $x\geqslant\mathbf{0}$,存在 $\lim U_n(x)$,则依 $U_n(x)$的加性,对于其余的 x,$\lim U_n(x)$也存在. 如此,$V(x)$对所有 x 有意义,对所有 x,$U_n(x)\xrightarrow{(o)}V(x)$,$V(x)$是加性的(1.3.1). 因 $V\leqslant U_n\in H_r$,所以 $V\in H_r$,此外,$V\geqslant U$.

另外,因对所有 n,$V\leqslant U_n$,故 $V\leqslant U=\inf U_n$,所以 $V=U$.

对于增序列 U_n(对于 $x\geqslant\mathbf{0}$),以上命题能类似地证明.

在一般情况下,若 $U_n\xrightarrow{(o)}U$,则存在 $V_n\searrow U$ 与 $W_n\nearrow U$ 使 $V_n\geqslant U_n\geqslant W_n$. 于是依已证,当 $x\geqslant\mathbf{0}$,我们有

$$V_n(x) \searrow U(x), W_n(x) \nearrow U(x)$$

而因

$$V_n(x) \geqslant U_n(x) \geqslant W_n(x)$$

所以

$$U_n(x) \xrightarrow{(o)} U(x)$$

而由此已经推得对于所有 x 的同一个关系,定理证毕.

逆命题在一般情况下仅对单调序列是正确的,这就是:

1.3.3

若 $U_n \in H_r$,且 U_n 组成单调序列,再若对于任何 $x \in X$ 存在有限的 $(o)\lim U_n(x) = U(x)$①,则 $U \in H_r$,$U_n \xrightarrow{(o)} U$.

证 例如,对于所有 n,令 $U_{n+1} \leqslant U_n$,于是当 $x \geqslant \mathbf{0}$ 有

$$U_n(x) \searrow U(x)$$

所以 $U \leqslant U_n$,从而 $U \in H_r$. 故存在有限的 $(o)\lim U_n = V$,而依 1.3.2,$U_n(x) \to V(x)$,即 $V = U$.

1.4 K 空间 H_r 的类型在一种特殊情况下的精确化

若 Y 属于某种特殊的 K 空间类,例如 Y 是正则空间,则 H_r 不一定是同种类型的 K 空间(参考第八章 3.1.2). 然而在某一种情况下,我们可以建立关于 H_r 与 Y 是同一种 K 空间的命题. 这即是:

1.4.1

定理 若 Y 是 K^+ 空间,则 H_r 也是 K^+ 空间.

证 令 $E = \{U_\xi\}(\xi \in \varXi)$ 是 H_r 中的 (o) 零化集合,即对于任意 $\xi_n \in \varXi$ 与 $\lambda_n \to 0$ 有

$$\lambda_n U_{\xi_n} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$$

(参考第五章 3.1.1),我们需证明 E 是有界的.

首先假定所有 $U_\xi \geqslant \mathbf{0}$. 不失一般性,可以认为 E 中含有所有它的有限子集的上确界. 假如不是这样,则可把它加到 E 中去,且证明这时集合 E 的 (o) 零化性并不消失. 令

$$U_i = U_i^{(1)} \vee \cdots \vee U_i^{(k_i)}$$

这里

① 对于 $x \geqslant \mathbf{0}$ 它是充分的,所以 $U(x)$ 保持极限关系而自然地扩张到整个 X.