

$$f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k)$$

$$\beta_k = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))}{d_k^T (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))}$$

$$f(x_k + \alpha d_k) = f(x_k) + \alpha \nabla f(x_k)^T d_k + o(\alpha)$$

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0$$

$$\beta_k = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T \nabla f(x_{k+1})}{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}$$

$$d_k = \begin{cases} -\nabla f(x_k), & k = 0 \\ -\nabla f(x_k) + \beta_{k-1} d_{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k)$$

最优化方法

基础

专祥涛 ⊙ 编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

最优化方法基础

专祥涛 编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法基础/专祥涛编. —武汉: 武汉大学出版社, 2018. 3
ISBN 978-7-307-19922-4

I. 最… II. 专… III. 最优化算法—教材 IV. O242. 23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 325168 号

责任编辑:李 晶 责任校对:邓 瑶 装帧设计:吴 极

出版发行: **武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件: whu_publish@163.com 网址: www.stmpress.cn)

印刷: 虎彩印艺股份有限公司

开本: 720 × 1000 1/16 印张: 11.5 字数: 219 千字

版次: 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-19922-4 定价: 40.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

“最优”这个词在工业生产和经济环境中经常被用到,它往往代表着“提升、先进”。从本质上来说,在工业生产和经济环境中要找到“最优”不是件容易的事情,因为实际环境具有多变性,且一般在实际环境中比较结果较为困难。但这并不是说“最优”没有意义,使用“泛滥”恰恰说明“最优化”的重要性。

最优化从本质上来说就是在多个选择方案中,选择结果最优的那个方案。最优化方法又称为数学规划,是运筹学的一个分支,主要解决最优计划、最优分配、最优决策、最优设计、最优管理等问题。

本书主要内容包括最优化问题的概念与分类、最优化问题的数学建模、最优化算法的一般过程及算法的一般特性、线性规划、非线性规划以及启发式算法的思想和常见的启发式算法。

本书强调对基本概念的理解,通过对典型算法的剖析,理解最优化算法的本质。算法之间的改进过程和比较,可以帮助理解算法的特性和适应性,了解算法的不足和改进方向,为进一步学习新的算法奠定基础。

第1章主要概述了最优化问题的本质特点,通过分析其数学特点,分类举例说明各种最优化问题的特征,为后续有针对性地理解和选用算法提供帮助。

第2章着眼于实际问题,举例说明最优化问题数学建模的过程,并介绍了最优化算法的一般思路 and 结构。

后续最优化算法介绍分为两大部分:针对凸优化问题的解析算法(第3~5章)和针对一般最优化问题的启发式算法(第6~9章)。

第3章从数学上阐述了线性规划问题的解题思路,介绍常用的单纯形法及其两类改进方法(两阶段法和大M法)。

第4章给出了非线性最优化问题解的最优性条件和求解算法的一般步骤,并对无约束非线性最优化算法的评价标准和选择给出了说明。

第5章介绍了约束非线性最优化问题解的最优性条件和两类基本方法:罚函数法和可行方向法。并针对三类特殊的约束非线性最优化问题阐述了其对应的算法:二次规划问题的两类方法、序列二次规划法、最小二乘问题的算法。

第6章在简要介绍了启发式算法的起源后,分别概述了各种启发式算法的思路。启发式算法大体可以分为轨迹法、群体法和混合启发式算法。

第7章阐述了模拟退火算法的基本原理,算法的结构和构成,算法的可行性及其改进性。

第8章从遗传算法的起源和基本概念出发,介绍了遗传算法的结构和实现思路及改进算法。

第9章在基本粒子群算法的基础上,介绍了四种改进粒子群算法。

本书的数学基础仅需要微积分基础和线性代数基础即可,可供工科类专业的本科生学习和对最优化算法有兴趣的科技工作者入门使用。

编 者

2017年10月于珞珈山

目 录

1 概论	(1)
1.1 线性规划问题	(3)
1.2 非线性最优化问题	(6)
1.3 多目标规划	(10)
1.4 目标规划	(19)
1.5 多层规划	(20)
习题	(23)
2 最优化模型	(24)
2.1 五步方法建模	(24)
2.2 灵敏性分析	(26)
2.3 灵敏性与稳健性	(29)
2.4 最优化模型的评价	(29)
2.5 最优化模型求解	(30)
2.6 常用的算法搜索结构	(34)
2.7 凸集和凸函数	(38)
习题	(41)
3 线性规划	(42)
3.1 线性规划的标准形式	(42)
3.2 基本定理	(44)
3.3 单纯形法	(46)
3.4 单纯形表	(48)
3.5 两阶段法与大 M 法	(58)
习题	(65)
4 无约束非线性最优化方法	(67)
4.1 最优化条件	(67)
4.2 非线性最优化的算法步骤	(69)
4.3 步长因子的搜索——一维搜索	(70)
4.4 下降方向的搜索——解析法	(78)

4.5	下降方向的搜索——直接法	(88)
4.6	无约束最优化方法的评价和选择	(103)
	习题	(104)
5	约束非线性最优化方法	(106)
5.1	最优化条件	(108)
5.2	罚函数法	(112)
5.3	可行方向法	(118)
5.4	二次规划	(123)
5.5	序列二次规划法	(129)
5.6	非线性最小二乘问题	(131)
	习题	(134)
6	启发式算法概述	(136)
6.1	轨迹法	(137)
6.2	群体法	(141)
6.3	混合启发式算法	(145)
	习题	(145)
7	模拟退火算法	(146)
7.1	模拟退火算法的基本原理	(146)
7.2	模拟退火算法的模型	(148)
7.3	模拟退火算法的可行性	(153)
7.4	模拟退火算法的改进	(154)
	习题	(156)
8	遗传算法	(157)
8.1	起源与发展	(157)
8.2	基本术语	(158)
8.3	基本遗传算法	(160)
8.4	改进遗传算法	(162)
	习题	(167)
9	粒子群优化算法	(168)
9.1	粒子群算法概述	(168)
9.2	基本粒子群算法	(169)
9.3	改进粒子群算法	(171)
	习题	(177)
	参考文献	(178)

1 概 论

实际工作经常会面临下面一些问题：

- ① 工程设计中怎样选择参数,使得设计既满足要求又能降低成本?
- ② 资源分配中,怎样分配既能满足各方面的基本要求,又能获得好的经济效益?
- ③ 生产计划安排中,选择怎样的生产方案才能提高产值和利润?
- ④ 原料配比问题中,如何确定各种成分的比例才能提高质量、降低成本?
- ⑤ 城建规划中,怎样安排工厂、机关、学校、商店、医院、住宅和其他单位的合理布局,才能方便群众,有利于城市各行各业的发展?

在各个领域中,诸如此类问题,不胜枚举。这一类问题的共同特点就是要在所有可能的方案中,选出最合理的、使给定目标达到最优的方案。寻找最优方案的方法称为最优化方法(或者数学规划方法),这类问题称为最优化问题(数学规划问题)。最优化问题是个古老的课题,早在 17 世纪已经提出极值问题。

当高层建筑失火时,最紧迫也是最首要的问题是把高层中被困的人们尽快地救离失火大楼并送至安全地区,这时,应当有一条长轨带可以使人踩在上面并滑到地面。人们便会自然地提出这条长轨带呈什么样的曲线,才能使人最快地逃离火海?这就是数学史上最著名的古典力学问题之一——最速降线问题(problem of brachistochrone),也称捷线问题。

其实,早在 1630 年,意大利物理学家伽利略便提出了一个分析学的基本问题:“一个质点在重力作用下,从一个给定点到不在它垂直下方的另一点,如果不计摩擦力,沿着什么曲线滑下所需时间最短?”显然,直线不可能是最速降线,但伽利略并没有得出正确的答案,直至 1638 年,他还错误地认为这条曲线应是圆弧。

1696 年,瑞士数学家约翰·伯努利(John Bernoulli)在数学杂志《教师学报》(*Aeta Eruditorum*)上再次提出该问题:“最速降线”问题,并向欧洲所有的数学家征求解答。到次年挑战期限截止(即 1697 年底),约翰一共收到了五份答案,分别来自他自己、牛顿、莱布尼兹(Gottfried Leibniz)、德·洛必达(L'Hospital)和雅可比·伯努利(Jacobi Bernoulli,约翰的哥哥)。他们都得出

正确的结论:最速降线是下凹的旋轮线。这么多解答当中,约翰·伯努利的应算是做得最漂亮的,用类比光学中的费马原理的方法一下做了出来。但是从影响来说,雅可比·伯努利的做法真正体现了变分思想,直接促进了变分学的萌芽和发展。大数学家欧拉也在 1726 年开始发表有关论著,并于 1744 年最先给出了这类问题的普遍解法,从而产生了变分法这一新的数学分支。

最速降线问题如图 1-1 所示,设点 $A(0,0)$ 和 $B(c,d)$ 不在同一铅垂线上,有一重物(质点)沿曲线路径从 A 到 B 受重力作用自由下滑,摩擦阻力忽略不计,求重物下降的最快路径(时间最省)。

设满足条件的曲线方程为 $y(x) = f(x)$, $x \in [0, c]$ 。

显然,上述函数满足边界条件: $y(0) = 0$, $y(c) = d$ 。将下滑的重物视为一质点,该质点在下滑过程中位于曲线上某一点 $P(x, y)$ 处,首先考虑质点沿曲线从 A 点下滑到 B 点所需要的时间。

设重物的质量为 m ,下滑过程中运动的速度为 v ,根据能量守恒定律(失去势能,获得动能),得

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}$$

可得

$$T(y(x)) = \int_0^c \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

这是一个泛函极值问题,至于该如何求该泛函的极小值问题,相当复杂,这里不作讨论(最速降线的解是旋轮线,旋轮线是圆沿着一条直线滚动时,圆上一点的轨迹)。

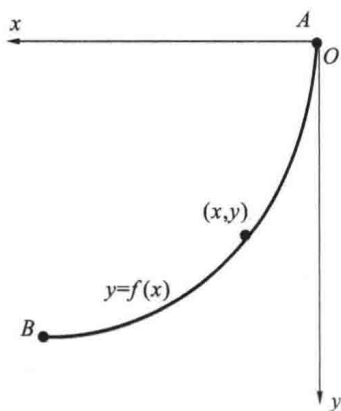


图 1-1 最速降线问题示意图

自 20 世纪 40 年代以来,由于生产和科学研究突飞猛进,最优化问题不仅成为一种迫切需要,特别是电子计算机日益广泛应用为最优化问题求解提供了有力的工具,最优化理论和算法也就迅速发展起来,在实际应用中发挥越来越大的作用。因此,有关最优化方法的基本知识已成为工程技术、管理人员所必备的基础知识之一。

常见的最优化问题有线性规划问题、非线性最优化问题、多目标规划问题、目标规划问题、动态规划问题、多层规划问题、随机规划问题、模糊规划问题、粗

糙规划问题、随机模糊规划问题等。

1.1 线性规划问题

线性规划问题指的是在一组线性约束条件下,使某个线性函数达到最大的最优化问题。一个标准的线性规划可以表示为

$$\begin{aligned} \min_{x \in D} \quad & C^T x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = B \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

式中, $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$; $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ 为常数; D 为等式约束和不等式约束构成的决策变量 x 的定义域。

x 称为可行解,如果满足 $x \geq 0$ 且 $Ax = B$ 。由所有可行解构成的集合 D 称为可行解集。

x^* 称为线性规划的最优解,如果 $x^* \geq 0$ 满足 $Ax^* = B$, 且都有 $C^T x^* \geq C^T x$, 其中 $x \in D$ 。

例 1-1 某工厂有生产甲、乙两种产品的能力,原料皆为小麦。生产 1 t 甲产品需要 2 个工日和 0.15 t 小麦;生产 1 t 乙产品需要 3 个工日和 0.20 t 小麦。该厂仅有工人 50 人,一个月只能出 1000 个工日,小麦一个月只能进 40 t。已知目前生产 1 t 甲产品利润为 5 万元,生产 1 t 乙产品利润为 6 万元。那么,工厂在一月中应如何安排这两种产品的生产,从而获得最大的利润?

解: 由以上条件可列表 1-1。

表 1-1 生产-产值关系表

项目	甲	乙	总和
工日 / 个	2	3	1000
小麦 / t	0.15	0.20	40
盈利 / 万元	5	6	—

设 x_1, x_2 分别表示一月中生产甲、乙两种产品的数量,称之为决策变量。所得利润为 $z = 5x_1 + 6x_2$, 该问题的目标是使得总利润函数有最大值。

工日的约束为:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1000$$

原料小麦的约束为:

$$0.15x_1 + 0.20x_2 \leq 40$$

于是该问题可归结为求目标函数在约束条件下的最大值问题,显然目标函

数和约束条件都是决策变量的线性函数,即可建立以下线性规划模型

$$\begin{aligned} \min z &= -(5x_1 + 6x_2) \\ \text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 &\leq 1000 \\ 0.15x_1 + 0.20x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

例 1-2 一个工厂的甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,每件产品由 4 个零件 A 和 3 个零件 B 组成。生产零件需要耗用原料 1 和原料 2 两种原材料。该厂每月购进两种原材料分别是 300 kg 和 500 kg。每个生产班的原材料的耗用量和零件产量如表 1-2 所示,则这三个车间应各开多少班数,才能使这种产品的配套数达到最大?

表 1-2 生产 - 产值关系表

车间	每班用料量 /kg		每班产量 / 个	
	原料 1	原料 2	零件 A	零件 B
甲	8	6	7	5
乙	5	9	6	9
丙	3	8	8	4

解:设 x_1, x_2, x_3 是甲、乙、丙三个车间所开的生产班数,由原材料的限制条件,得

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 300 \\ 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 &\leq 500 \end{aligned}$$

三个车间共生产 A、B 零件总数分别为 $7x_1 + 6x_2 + 8x_3, 5x_1 + 9x_2 + 4x_3$ 。因为目标函数是要使产品的配套数最大,而每个零件要 4 个 A 零件,3 个 B 零件,所以产品的最大量不超过 $\frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}$ 和 $\frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3}$ 中较小的一个。

设 S 是产品的配套数,则 $S = \min \left(\frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}, \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} \right)$ 。这个目标函数不是线性函数,但可以通过适当的变换把它化为线性的,设

$$y = \min \left(\frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}, \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} \right)$$

则上式可以等价于下面两个不等式

$$\begin{aligned} \frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4} &\geq y \\ \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} &\geq y \end{aligned}$$

故可得如下线性规划模型:

$$\begin{aligned}
& \min z = -S = -y \\
& \text{s. t. } 7x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 4y \geq 0 \\
& \quad 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 3y \geq 0 \\
& \quad 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 300 \\
& \quad 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 500 \\
& \quad x_1, x_2, x_3, y \geq 0
\end{aligned}$$

例 1-3 某投资公司目前拥有资金 1000 万元,拟在今后 5 年内考虑给下列项目投资:

项目 A: 从第一年到第四年每年年初需要投资,并于次年末收回本利 115%;

项目 B: 第三年初需要投资,到第五年末收回本利 125%,最大的投资额不超过 400 万元;

项目 C: 第二年初需要投资,到第五年末收回本利 140%,最大的投资额不超过 200 万元;

项目 D: 五年内每年初可购买国债,于当年末还本并加利息 6%。

问应如何确定这些项目的投资额,使第五年末拥有的资金总额最大?

解: 设 x_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$) 表示第 i 年年初投资于项目 j 的金额。各年资金流见表 1-3。

表 1-3 年初 / 年末资金流表

项目	第一年		第二年		第三年		第四年		第五年	
	年初 投资	年末 资金	年初 投资	年末 资金	年初 投资	年末 资金	年初 投资	年末 资金	年初 投资	年末 资金
A	x_{11}		x_{21}	$1.15x_{11}$	x_{31}	$1.15x_{21}$	x_{41}	$1.15x_{31}$	x_{51}	$1.15x_{41}$
B					x_{32}					$1.25x_{32}$
C			x_{23}							$1.4x_{23}$
D	x_{14}	$1.06x_{14}$	x_{24}	$1.06x_{24}$	x_{34}	$1.06x_{34}$	x_{44}	$1.06x_{44}$	x_{54}	$1.06x_{54}$

根据题意可得:

第一年年初: $x_{11} + x_{14} \leq 1000$;

第二年年初: $x_{21} + x_{23} + x_{24} \leq (1 + 6\%)x_{14} + (1000 - x_{11} - x_{14})$

即

$$x_{11} - 0.06x_{14} + x_{21} + x_{23} + x_{24} \leq 1000;$$

第三年年初: $x_{31} + x_{32} + x_{34} \leq 1.15x_{11} + 1.06x_{24} + [(1 + 6\%)x_{14} + (1000 - x_{11} - x_{14}) - (x_{21} + x_{23} + x_{24})]$

即

$$-0.15x_{11} - 0.06x_{14} + x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{34} \leq 1000;$$

$$\text{第四年年初: } x_{41} + x_{44} \leq 1.15x_{21} + 1.06x_{34} + [1000 - (-0.15x_{11} - 0.06x_{14} + x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{34})]$$

即

$$-0.15x_{11} - 0.06x_{14} - 0.15x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} + x_{31} + x_{32} - 0.06x_{34} + x_{41} + x_{44} \leq 1000;$$

$$\text{第五年年初: } x_{54} \leq 1.15x_{31} + 1.06x_{44} + [1000 - (-0.15x_{11} - 0.06x_{14} - 0.15x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} + x_{31} + x_{32} - 0.06x_{34} + x_{41} + x_{44})]$$

即

$$-0.15x_{11} - 0.06x_{14} - 0.15x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} - 0.15x_{31} + x_{32} - 0.06x_{34} + x_{41} - 0.06x_{44} + x_{54} \leq 1000。$$

项目 C、D 的投资有限额的规定,有 $x_{32} \leq 400, x_{23} \leq 200$ 。

第五年末该部门拥有的资金本利总额为:

$$S = 1.40x_{23} + 1.25x_{32} + 1.15x_{41} + 1.06x_{54}$$

建立线性规划模型

$$\max S = 1.40x_{23} + 1.25x_{32} + 1.15x_{41} + 1.06x_{54}$$

$$\text{s. t. } x_{11} + x_{14} \leq 1000$$

$$x_{11} - 0.06x_{14} + x_{21} + x_{23} + x_{24} \leq 1000$$

$$-0.15x_{11} - 0.06x_{14} + x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{34} \leq 1000$$

$$-0.15x_{11} - 0.06x_{14} - 0.15x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} + x_{31} + x_{32} - 0.06x_{34} + x_{41} + x_{44} \leq 1000$$

$$-0.15x_{11} - 0.06x_{14} - 0.15x_{21} + x_{23} - 0.06x_{24} - 0.15x_{31} + x_{32} - 0.06x_{34} + x_{41} - 0.06x_{44} + x_{54} \leq 1000$$

$$x_{32} \leq 400,$$

$$x_{23} \leq 200,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 4$$

1.2 非线性最优化问题

在现实生活中,很多优化决策问题中的变量之间并不完全是线性关系,更多的情况是在目标函数及约束条件中包含着一些非线性因素,也就是说,最优化问题的可行域是由一组非线性不等式来描述的,这种情况下的最优化问题就称为非线性最优化问题。

标准的非线性最优化问题形式如下:

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \\ & j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

即在一组非线性等式或不等式约束条件下,极小化一实值函数。如果把非线性最优化问题中的约束条件去掉,则该问题为无约束规划;如果函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g_j(\mathbf{x}) (j = 1, 2, \dots, m)$ 均为凸函数,则该问题为凸规划;如果 $f(\mathbf{x})$ 可以表示为 $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, 则该问题为可分离规划;如果函数 $f(\mathbf{x})$ 是二次的,且所有函数 $g_j(\mathbf{x})$ 都是线性的,则该问题为二次规划。

在非线性最优化问题中,向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 称为决策向量,其中 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为决策分量。决策向量 $\mathbf{x}$ 的函数 f 称为目标函数。

例 1-4 拟建一形如图 1-2 的猪舍,要求围墙与隔墙的总长不能超过 40 m,则长、宽各多少时,该猪舍的面积最大?

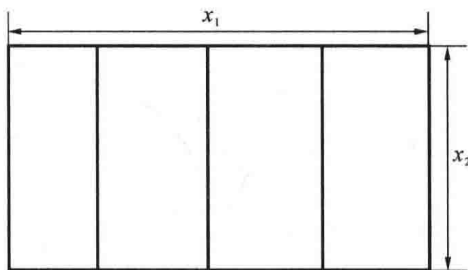


图 1-2 猪舍形状示意图

解: 设长、宽分别是 x_1, x_2 , 问题即为下述优化问题:

$$\begin{aligned} & \max x_1 x_2 \\ & \text{s. t. } 2x_1 + 5x_2 \leq 40, x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

易知,本问题的最优解是 $x_1 = 10 \text{ m}, x_2 = 4 \text{ m}$ 。

例 1-5 油厂圆柱状油罐车向电厂送燃料油: $5000 \text{ m}^3/\text{月}$ 。已知油罐的制造成本为:上、下底板为 $40 \text{ 元}/\text{m}^2$,侧面板为 $30 \text{ 元}/\text{m}^2$ 。油罐车一次往返运费为 50 元。试确定使月度总费用最小的油罐尺寸及运送次数。

解: 设油罐的底半径为 x_1 , 高为 x_2 , 月运送次数为 x_3 。假设该油罐车的使用寿命为 12 个月,则根据题意可得该问题的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min f &= (40 \times 2\pi x_1^2 + 30 \times 2\pi x_1 x_2)/12 + 50x_3 \\ \pi x_1^2 x_2 x_3 &\geq 5000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \text{ 且 } x_3 \text{ 为整数} \end{aligned}$$

例 1-6 确定经验公式——非线性回归分析。已知变量 x, y 之间有关系式 $y = a + be^{-cx}$, 系数 a, b, c 未知。通过一系列实验获得数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。

求参数 a, b, c 的最佳估计值。

解: 定义最佳估计参数估计值使得拟合曲线和实验曲线在试验点之间的差值的平方和最小, 即

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a} + \hat{b}e^{-\hat{c}x_i})]^2$$

例 1-7 (投资决策问题) 某投资公司有 n 个项目可供选择投资, 并且至少要对其中一个项目投资。已知该企业拥有总资金 A 元, 投资于第 i ($i = 1, \dots, n$) 个项目需花资金 a_i 元, 并预计可收益 b_i 元。试选择最佳投资方案。

解: 设投资决策变量为

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{决定投资项目 } i \\ 0, & \text{决定不投资项目 } i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则可得投资总额为 $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, 投资总收益为 $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ 。由于至少要对一个项目投资, 并且总的投资金额不能超过总资金 A , 转换为约束条件即是

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \in (0, A]$$

另外, 由于 x_i 取值只能为 0 或 1, 可用如下约束条件表示

$$x_i(1 - x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

假设最佳投资方案定义为投资额最小而总收益最大的方案, 所以这个最佳投资决策问题进一步表示为总资金以及决策变量(取 0 或 1)的限制条件下, 极大化总收益和总投资之比。该问题的数学模型表示为:

$$\max z = \frac{\sum_{i=1}^n b_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i x_i}$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^n a_i x_i \in (0, A)$$

$$x_i(1 - x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

本例是在一组等式或不等式的约束下, 求一个函数的最大值(或最小值)问题, 其中至少有一个非线性函数, 这类问题称之为非线性最优化问题。此外由于决策变量仅能取值 0 或 1, 故也是一个 0-1 规划问题。

例 1-8 (最优控制器设计) 考虑图 1-3 中所示的二阶倒立摆系统, 设其小信号线性模型为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

其中 $\theta_1(t)$ 、 $\theta_2(t)$ 分别为倒立摆的偏角, $u(t)$ 为外部施加的控制力, $\mathbf{A}$ 为系统参

数矩阵,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统的控制目标为对小车 M 施加合适的控制力,从而补偿偏角使得倒立摆垂直,即 $\theta_1(t) = 0, \theta_2(t) = 0$ 。

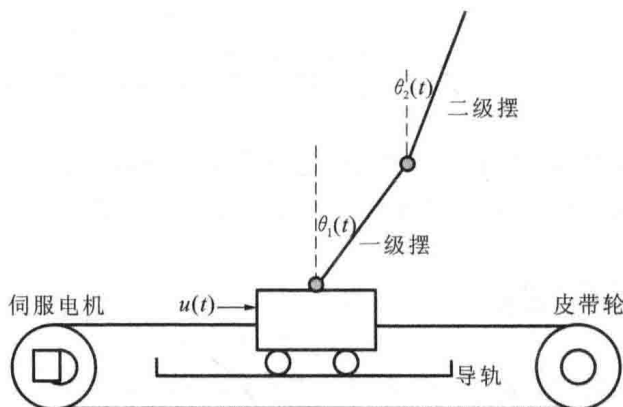


图 1-3 二级倒立摆系统

解:假设在 $t = 0$ 时,倒立摆出现偏角即 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$,从而需要确定控制力 $u(t)$,使得系统能够在 $t = T_0$ 时返回平衡态 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 。为了设计控制器,首先将系统方程离散化,可以得到

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \mathbf{g} u_k$$

其中 $\Phi = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}$, $\mathbf{g} = \Delta t \mathbf{b}$, Δt 为采样周期, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。假设 T_0 为采样周期 Δt 的整数倍,即 $T_0 = K \Delta t$,则控制器的设计目标可以表示为寻找控制量序列 $u_k, k = 1, \dots, K-1$,使得系统在 $t = T_0$ 时,有 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 。将控制量序列所消耗的能量表示为

$$J = \sum_{k=1}^{K-1} u_k^2$$

从而上述控制器的设计问题可用如下公式描述

$$\begin{aligned} \min J &= \sum_{k=1}^{K-1} u_k^2 \\ \text{s. t. } \mathbf{x}_K &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

由状态转移方程可得

$$\mathbf{x}_K = \Phi^K \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \Phi^{K-(k+1)} \mathbf{g} u_k = -\mathbf{h} + \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{g}_k u_k$$

其中 $h = -\Phi^K x_0, g_k = \Phi^{K-(k+1)} g$, 从而最小化问题中的约束条件 $x_K = 0$ 与下式等价

$$\sum_{k=1}^{K-1} g_k u_k = h$$

考虑实际应用中, 控制量 u_k 不可能无限大, 从而其需要满足额外的约束条件 $|u_k| \leq U$, 控制器设计问题最终可以表示为

$$\begin{aligned} \min J &= \sum_{i=1}^{K-1} u_k^2 \\ \text{s. t. } &\sum_{k=1}^{K-1} g_k u_k = h \\ &|u_k| \leq U \end{aligned}$$

可见, 本例中的控制器的设计问题被转化为简单的优化问题, 而且具有明确的数学模型, 经由传统的最优化算法计算后即可完成控制器的设计。

1.3 多目标规划

前述最优化问题是在一组约束条件下, 极大(小) 化一个目标函数。然而, 在很多实际决策问题中, 通常包含多个需要同时考虑的不相容目标。作为单目标规划推广, 多目标规划定义为在一组约束条件下, 优化多个不同的目标函数, 一般形式为

$$\begin{aligned} \max & [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x)] \\ \text{s. t. } & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

式中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为一个 n 维决策向量; $f_i(x)$ 为目标函数; $g_j(x)$ 为系统约束条件。

当目标函数相互冲突时, 通常不存在最优解使得所有的目标函数同时达最优。在这种情况下, 引入有效解这一概念, 它表示在不牺牲其他目标函数的前提下, 不可能再改进任何一个目标函数值的可行解。即, 一个解 x^* 称为有效解, 如果不存在 $x \in D$ 使得 $f_i(x) \geq f_i(x^*), i = 1, 2, \dots, m$ 且不等号至少对一个序号 j 成立。在连续的情况下, 所有有效解构成的集合实际上是个有效前沿面。一个有效解也称为非支配解、非劣解或 Pareto 解。

例 1-9 某工厂在一个计划期内生产甲、乙两种产品, 各产品都要消耗 A、B、C 三种不同的资源。每件产品对资源的单位消耗、各种资源的限量以及各产品的单位价格、单位利润和所造成的单位污染如表 1-4 所示。假定产品能全部销售出去, 则每期怎样安排生产, 才能使利润和产值都最大, 且造成的污染最小?