



中学数学拓展丛书

数学欣赏拾趣

SHUXUE XINSHANG SHIQU

沈文选 杨清桃 著



数学欣赏，引起心灵震撼！真善美在欣赏中得到认同与升华！从数学欣赏中领略数学智慧的美妙！从数学欣赏走向数学鉴赏！从数学文化欣赏走向文化数学研究！



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本册书是湖南省教育厅科研课题“教育数学的研究”(编号06C510)成果之十二

数学欣赏拾趣

SHUXUE XINSHANG SHIQU

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书共分七章,包括:数学欣赏的含义;欣赏数学的“真”;欣赏数学的“善”;欣赏数学的“美”;欣赏数学文化;从数学欣赏走向数学鉴赏;从数学文化欣赏走向文化数学研究.

本书可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书,是广大中学数学教师及数学爱好者的数学视野拓展读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学欣赏拾趣/沈文选,杨清桃著. —哈尔滨:

哈尔滨工业大学出版社,2018.5

(中学数学拓展丛书)

ISBN 978-7-5603-6845-0

I. ①数… II. ①沈… ②杨… III. ①中学数学课—
教学参考资料 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 191435 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 李 欣

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 19 字数 475 千字

版 次 2018 年 5 月第 1 版 2018 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6845-0

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序

我和沈文选教授有过合作,彼此相熟.不久前,他发来一套数学普及读物的丛书目录,包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等,洋洋大观.从论述的数学课题来看,该丛书的视角新颖,内容充实,思想深刻,在数学科普出版物中当属上乘之作.

阅读之余,忽然觉得公众对数学的认识很不相同,有些甚至是彼此矛盾的.例如:

一方面,数学是学校的主要基础课,从小学到高中,12年都有数学;另一方面,许多名人在说“自己数学很差”的时候,似乎理直气壮,连脸也不红,好像在宣示:数学不好,照样出名.

一方面,说数学是科学的女王,“大哉数学之为用”,数学无处不在,数学是人类文明的火车头;另一方面,许多学生说数学没用,一辈子也碰不到一个函数,解不了一个方程,连相声也在讽刺“一边向水池注水,一边放水”的算术题是瞎折腾.

一方面,说“数学好玩”,数学具有和谐美、对称美、奇异美,歌颂数学家的“美丽的心灵”;另一方面,许多人又说,数学枯燥、抽象、难学,看见数学就头疼.

数学,我怎样才能走近你,欣赏你,拥抱你?说起来也很简单,就是不要仅仅埋头做题,要多多品味数学的奥秘,理解数学的智慧,抛却过分的功利,当你把数学当作一种文化来看待的时候,数学就在你心中了.

我把学习数学比作登山,一步步地爬,很累,很苦.但是如果你能欣赏山林的风景,那么登山就是一种乐趣了.

登山有三种意境。

首先是初识阶段。走入山林，爬得微微出汗，坐拥山色风光。体会“明月松间照，清泉石上流”的意境。当你会做算术，会记账，能够应付日常生活中的数学的时候，你会享受数学给你带来的便捷，感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰，大汗淋漓，歇足小坐。环顾四周，云雾环绕，满目苍翠，心旷神怡。正如苏轼名句：“横看成岭侧成峰，远近高低各不同。不识庐山真面目，只缘身在此山中。”数学理解到一定程度，你会感觉到数学的博大精深，数学思维的缜密周全，数学的简捷之美，使你对符号运算能够有爱不释手的感觉。不过，理解了，还不能创造。“采药山中去，云深不知处。”对于数学的伟大，还莫测高深。

第三则是登顶阶段。攀岩涉水，越过艰难险阻，到达顶峰的时候，终于出现了“会当凌绝顶，一览众山小”的局面。这时，一切疲乏劳顿、危难困苦，全都抛到九霄云外。“雄关漫道真如铁”，欣赏数学之美，是需要代价的。当你破解了一道数学难题，“蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处”的意境，是语言无法形容的快乐。

好了，说了这些，还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读，它会帮助你一步步攀登数学的高山，领略数学的美景，最终登上数学的顶峰。于是劳顿着，但快乐着。

信手写来，权作为序。

张莫宙

2016年11月13日

于沪上苏州河边

附 文

（文选先生编著的丛书，是一种对数学的欣赏。因此，再次想起数学思想往往和文学意境相通，2007年年初曾在《文汇报》发表一短文，附录于此，算是一种呼应。）

数学和诗词的意境

张莫宙

数学和诗词，历来有许多可供谈助的材料。例如：

一去二三里，烟村四五家。

亭台六七座，八九十枝花。

把十个数字嵌进诗里，读来朗朗上口。郑板桥也有题为《咏雪》的诗云：

一片二片三四片，五六七八九十片。

千片万片无数片，飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受.不过,以上两诗中尽管嵌入了数字,却实在和数学没有什么关系.

数学和诗词的内在联系,在于意境.李白的题为《送孟浩然之广陵》的诗云:

故人西辞黄鹤楼,烟花三月下扬州.

孤帆远影碧空尽,唯见长江天际流.

数学名家徐利治先生在讲极限的时候,总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句,让大家体会一个变量趋向于0的动态意境,煞是传神.

近日与友人谈几何,不禁联想到初唐诗人陈子昂的题为《登幽州台歌》的诗中的名句:

前不见古人,后不见来者.

念天地之悠悠,独怆然而涕下.

一般的语文解释说:上两句俯仰古今,写出时间绵长;第三句登楼眺望,写出空间辽阔;在广阔无垠的背景中,第四句描绘了诗人孤单寂寞、悲哀苦闷的情绪,两相映照,分外动人.然而,从数学上看来,这是一首阐发时间和空间感知的佳句.前两句表示时间可以看成是一条直线(一维空间).陈老先生以自己为原点,前不见古人指时间可以延伸到负无穷大,后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大.后两句则描写三维的现实空间:天是平面,地是平面,悠悠地张成三维的立体几何环境.全诗将时间和空间放在一起思考,感到自然之伟大,产生了敬畏之心,以至怆然涕下.这样的意境,数学家和文学家是可以彼此相通的.进一步说,爱因斯坦的四维时空学说,也能和此诗的意境相衔接.

贵州省六盘水师专的杨老师告诉我,他的一则经验.他在微积分教学中讲到无界变量时,用了宋朝叶绍翁的题为《游园不值》中的诗句:

春色满园关不住,一枝红杏出墙来.

学生每每会意而笑.实际上,无界变量是说,无论你设置怎样大的正数 M ,变量总要超出你的范围,即有一个变量的绝对值会超过 M .于是, M 可以比喻成无论怎样大的园子,变量相当于红杏,结果是总有一枝红杏越出园子的范围.诗的比喻如此恰切,其意境把枯燥的数学语言形象化了.

数学研究和学习需要解题,而解题过程需要反复思索,终于在某一时刻出现顿悟.例如,做一道几何题,百思不得其解,突然添了一条辅助线,问题豁然开朗,欣喜万分.这样的意境,想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境:“众里寻他千百度.蓦然回首,那人却在,灯火阑珊处.”一个学生,如果没有经历过这样的意境,数学大概是学不好的了.

◎

前

言

音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学就是对于模式的研究。

——A. N. 怀特海

甚至一个粗糙的数学模型也能帮助我们更好地理解一个实际的情况,因为我们在试图建立数学模型时被迫考虑了各种逻辑可能性,不含混地定义了所有的概念,并且区分了重要的和次要的因素。一个数学模型即使导出了与事实不符合的结果,它也还是有价值的,因为一个模型的失败可以帮助我们去寻找更好的模型。应用数学和战争是相似的,有时一次失败比一次胜利更有价值,因为它帮助我们认识到我们的武器或战略的不适当之处。

——A. Renyi

人们喜爱音乐,因为它不仅有神奇的乐谱,而且有悦耳的优美旋律!

人们喜爱画卷,因为它不仅描绘出自然界的壮丽,而且可以描绘人间美景!

人们喜爱诗歌,因为它不仅是字词的巧妙组合,而且有抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩,而且使人更加聪明!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者或桥梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!你看,不是吗?

数学精神,科学与人文融合的精神,它是一种理性精神!一种求简、求统、求实、求美的精神!数学精神似一座光辉的灯塔,指引数学发展的航向!数学精神似雨露阳光滋润人们的心田!

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍!让我们在思疑中启悟,在思辨中省悟,在体验中领悟!

数学方法,它是人类智慧的结晶,也是人类的思想武器!它像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象,令人目不暇接!它的源头又是那样地寻常!

数学解题,它是人类学习与掌握数学的主要活动,它是数学活动的一个兴奋中心!数学解题理论博大精深,提高其理论水平是永远的话题!

数学技能,它是人类在数学知识的学习过程中逐步形成并发展的一种大脑操作方式,它是一种智慧!它是数学能力的一种标志!操握数学技能是追求的一种基础性目标!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,它在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景!特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学竞赛,许多青少年喜爱的一种活动,这种数学活动有着深远的教育价值!它是选拔和培养数学英才的重要方式之一.这种活动可以激励青少年对数学学习的兴趣,可以扩大他们的数学视野,促进创新意识的发展!数学竞赛中的专题培训内容展示了竞赛数学亮丽的风景!

数学测评,检验并促进数学学习效果的重要手段.测评数学的研究是教育数学研究中的一朵奇葩!测评数学的深入研究正期待着我们!

数学史话,充满了前辈们创造与再创造的诱人的心血机智.让我们可以从中汲取丰富的营养!

数学欣赏,对数学喜爱的情感的流淌.这是一种数学思维活动的崇高表情!数学欣赏,引起心灵震撼!真、善、美在欣赏中得到认同与升华!从数学欣赏中领略数学智慧的美妙!从数学欣赏走向数学鉴赏!从数学文化欣赏走向文化数学研究!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学.

从而,提高我国每一个人的数学文化水平及数学素养,是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标.为此,笔者构思了《中学数学拓展丛书》.

这套丛书是笔者学习张景中院士的教育数学思想,对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,试图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:建构符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生的书籍.

不积小流,无以成江河;不积跬步,无以至千里.没有积累便没有丰富的素材,没有整合

创新便没有鲜明的特色,这套丛书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的.因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文献,在此,衷心地感谢这些文献的作者.

这套丛书,作者试图以专题的形式,对中小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作的.

这一本是《数学欣赏拾趣》.

欣赏,就是怀着愉悦的心态对待面临的美满对象,就是用观赏的目光看待眼前事物的美好形态,就是用赞赏的情怀透视事物外表的喜悦,就是用领略的眼光发现事物内部深处的美妙.

数学欣赏是一种佩服数学理性的心理倾向,是数学素养中某种意识的流淌,数学欣赏是学习数学的一种情趣表露.

数学欣赏,就要欣赏数学的“真”;欣赏数学的“真”,就是震撼于数学之理性精神,震撼于数学的两重性,震撼于数学的特殊属性.

数学欣赏,就要欣赏数学的“善”;欣赏数学的“善”,就是震撼于数学认知之深刻,震撼于数学育人价值之独特,震撼于数学应用之广泛.

数学欣赏,就要欣赏数学的“美”;欣赏数学的“美”,就是震撼于简捷之特征,震撼于和谐之特征,震撼于奇异之特征.

数学欣赏,就要欣赏数学文化;欣赏数学文化,就是震撼于数学学科的融合性,震撼于数学人文的意境性,震撼于数学历史的生成性,震撼于数学文化的价值性.

从数学欣赏走向数学鉴赏是更高级的数学欣赏.

从数学文化欣赏走向文化数学研究是为了更好地进行数学文化欣赏.

文化数学研究也是教育数学研究的重要组成部分,这也是作者在多年的教育数学研究中才逐步认识到的.20世纪90年代初,作者开始接触到张景中院士的教育数学思想,深为这种理念所吸引,就开始了从事教育数学研究,分析了教育数学思想的根由及组成的主要内容,得到了“从数学基础的研究发展而形成基础数学,数学计算的大量需要而发展形成计算数学,数学应用的广泛深入而发展形成应用数学”,数学教育发展的必然结果而需研究教育数学,这均是水到渠成的事.为了数学教育的需要而研究教育数学,显然教材数学、竞赛数学、测评数学应是教育数学研究的重要组成部分.这是经过几年研究后逐步认识到的.随着教育数学研究的不断深入,认识到这三个方面涉及的主要是学校数学教育.现代的教育观应该是终身教育,因而社会的数学教育也应提到议事日程,特别是当今的数字化时代,高新技术其实就是数学技术的时代,文化数学的研究也就成为必然.如何进行文化数学研究是我们应当努力探讨的工作.在该书中,介绍了作者的一些浅见,也望得到读者的斧正.

最后,衷心感谢张奠宙教授在百忙中为本套丛书作序!

衷心感谢刘培杰数学工作室,感谢刘培杰老师、张永芹老师、李欣老师等诸位老师,是他们的大力支持,精心编辑,使得本书以这样的面目展现在读者面前!

衷心感谢我的同事邓汉文教授,我的朋友赵雄辉、欧阳新龙、黄仁寿,我的研究生们:羊明亮、吴仁芳、谢圣英、彭熹、谢立红、陈丽芳、谢美丽、陈森君、孔璐璐、邹宇、谢罗庚、彭云飞等对我写作工作的大力协助,还要感谢我的家人对我们写作的大力支持!

沈文选 杨清桃
2017年3月
于岳麓山下

第一章 数学欣赏的含义

1.1 什么是数学欣赏？	1
1.2 数学欣赏要欣赏什么？	5
1.3 欣赏数学真、善、美的一些途径	7
1.4 数学欣赏的意义	34
1.4.1 数学欣赏承载着完成数学教育功能的使命	34
1.4.2 数学欣赏有着普遍的教育价值	34
1.4.3 数学欣赏有助于学习者从一个新的视角认识和理解	
数学内容	37
1.4.4 数学欣赏是实践数学文化教育的示范性亮点	41

第二章 欣赏数学的“真”

2.1 欣赏数学的“真”，震撼于数学之理性精神	42
2.1.1 欣赏数学的“真”，崇尚理性需要证明	42
2.1.2 欣赏数学的“真”，领悟公理化思想，学会理性思维	43
2.2 欣赏数学的“真”，震撼于数学的两重特性	52
2.2.1 欣赏数学的“真”，认识数学是演绎的，也是归纳的	52
2.2.2 欣赏数学的“真”，认识数学的真理观与可误观	61
2.2.3 欣赏数学的“真”，认识数学是发现的，也是发明的	69
2.2.4 欣赏数学的“真”，认识数学是抽象的，也是直观的	76
2.3 欣赏数学的“真”，震撼于数学的特殊属性	82
2.3.1 欣赏数学的“真”，看到数学中的“变”与“不变”	82
2.3.2 欣赏数学的“真”，认识数学中的“不变量”与“不变性”	86
2.3.3 欣赏数学的“真”，理解数学中的“有限”与“无限”	90

第三章 欣赏数学的“善”

3.1 欣赏数学的“善”，震撼于数学认知之深刻	101
3.1.1 欣赏数学的“善”，认识数学是认识自然的中介	101
3.1.2 欣赏数学的“善”，理解数学的消耗量是科技含量的标志	103

目录 CONTENTS



目 录CONTENTS

3.2 欣赏数学的“善”,震撼于数学育人价值之独特	104
3.2.1 欣赏数学的“善”,看到数学有利于正确的认知	
与世界观的形成	104
3.2.2 欣赏数学的“善”,认识数学有助于人的思维能力	
与创造能力的培养	104
3.2.3 欣赏数学的“善”,理解数学有益于人的心灵净化	105
3.3 欣赏数学的“善”,震撼于数学应用之广泛	107
3.3.1 欣赏数学的“善”,认识数学是一种新兴技术	107
3.3.2 欣赏数学的“善”,理解数学模型之深刻	113
3.3.3 欣赏数学的“善”,体验数学丰富了我们的“阳光”	
生活内涵	116

第四章 欣赏数学的“美”

4.1 欣赏数学的“美”,震撼于简捷之特征	122
4.1.1 欣赏数学的“美”,看到符号的简单性	122
4.1.2 欣赏数学的“美”,看到抽象的简明性	125
4.1.3 欣赏数学的“美”,看到统一的简捷性	128
4.2 欣赏数学的“美”,震撼于和谐之特征	132
4.2.1 欣赏数学的“美”,认识和谐的雅致性	133
4.2.2 欣赏数学的“美”,认识对称的普遍性	144
4.2.3 欣赏数学的“美”,认识形式的美观性	150
4.3 欣赏数学的“美”,震撼于奇异之特征	160
4.3.1 欣赏数学的“美”,理解奇异中的真理性	160
4.3.2 欣赏数学的“美”,理解有限中的无限性	166
4.3.3 欣赏数学的“美”,理解神秘的情怀性	168
4.3.4 欣赏数学的“美”,理解常数的魅力性	170

第五章 欣赏数学文化

5.1 欣赏数学文化,震撼于数学学科融合性	179
5.1.1 欣赏数学文化,剖析文学中的数学	179
5.1.2 欣赏数学文化,赏析艺术中的数学	188
5.1.3 欣赏数学文化,分析生活中的数学	192
5.2 欣赏数学文化,震撼于数学人文意境性	194
5.2.1 欣赏数学文化,领悟文学中的数学意境	194
5.2.2 欣赏数学文化,领悟数学中的人文意境	195
5.3 欣赏数学文化,震撼于数学历史生成性	197
5.3.1 欣赏数学文化,了解数学的历史生成	197
5.3.2 欣赏数学文化,体验数学历史文化	201
5.4 欣赏数学文化,震撼于数学文化价值性	203
5.4.1 数学文化是人类文化的重要组成部分	203
5.4.2 数学文化在数学教育中的重要作用	206

第六章 从数学欣赏走向数学鉴赏

6.1 在数学欣赏中学会数学鉴赏	209
6.1.1 向语文教育学习善于进行欣赏	209
6.1.2 在数学教育中多方位进行数学欣赏	210
6.1.3 从具体概念欣赏走向系统价值鉴赏	211
6.1.4 从赏析解题到鉴赏问题	213
6.2 进行数学鉴赏给我们提出了新的挑战	219
6.2.1 进行数学鉴赏需要的有关储备	219
6.2.2 对数学鉴赏进行必要的探究	223
6.3 逐步提高鉴赏水平	239
6.3.1 加强教学引导,提高鉴赏水平	239
6.3.2 真理观与可误观的结合,使鉴赏水平更上一个层次	242

第七章 从数学文化欣赏走向文化数学研究

7.1 数学文化与文化数学	243
7.2 探讨研究文化数学的着眼点	245
7.2.1 着眼于史料发掘	245
7.2.2 着眼于科普创作	246
7.2.3 着眼于文学修饰	247
7.2.4 着眼于艺术渲染	257
7.2.5 着眼于生活现实解惑	262
7.2.6 着眼于高新技术解读	263
主要参考文献	267
作者出版的相关书籍与发表的相关文章目录	269
编后语	272

第一章 数学欣赏的含义

1.1 什么是数学欣赏

先来看看何谓欣赏?欣赏的中文含义是领略、赞赏、观赏、喜欢,还有佩服.英语是 to admire或 to enjoy,都包含着一种在喜好、倾慕的前提下愉快、积极地接受、沉浸并享受某种客体(或对象)的情感.可见欣赏是一个与主体意识和心理倾向紧密相关的概念.

从我们自己的体验来说,欣赏,就是怀着愉悦的心态对待面临的美满对象,就是用观赏的目光看待眼前事物的美好形态,就是用赞赏的情怀注视事物外表的美观,就是用领略的眼光发现事物内部深处的美妙.这里,愉悦的心态、观赏的目光、赞赏的情怀、领略的眼光都是一种积极的心理倾向与主体意识,这又与一个人的知识水平有着密切的关系.因此,欣赏,作为一种伴随着较为积极的心理倾向的活动,它是一个值得深入研究的课题.

许多人都有体验:随着欣赏对象的不同,要求也不一样.对于较为复杂和高级的欣赏活动,有时候要求欣赏者具有较高的知识素养或艺术素养.即使是欣赏同一件事物或对象,也是有层次之分的.比如,欣赏一件艺术品,欣赏者之间的欣赏水平可能相距万里,有的人是鉴宝专家,有的人是一无所知的外行.俗话说,“外行看热闹,内行看门道”,意思就是说对同一事物,不同的知识层次和观赏力会出现不同的效果.这也就是说,即使是对于同一对象,由于审视者个人修养的不同,会出现完全不同的欣赏感受和欣赏效果.

下面,我们讨论什么是数学欣赏?若认为就把数学加在欣赏前面,即把数学作为欣赏对象,则这是对数学欣赏的一般理解.对数学欣赏的深入理解,这是我们要研究的问题了.这正如黄秦安先生等所说的:^①对于数学欣赏,细细想来,感觉“数学欣赏”的概念在实际语境中远比想象的要复杂些,特别是当这个概念与数学教学联系在一起的时候更是如此.初步看来,可以把数学的欣赏理解为个体认同,喜欢数学的一种心理趋向,一种对于数学的美好情感和认知.在最初的数学欣赏中,一个人懂不懂数学或者懂得多少,其实都没有什么关系,正如许多五音不全和一点五线谱知识都没有的人也可以很喜欢音乐一样.在数学的受众中,不懂数学但仍喜欢数学的人数量是不多的.其中,有些人并不是很懂数学,但在长期的社会文化与科学文化氛围中,感受到了数学计算之精确,形式结构之严密和论证推理之充分有力,因此,对数学有一种崇敬之情,也是在情理之中的.一个社会对数学的文化评价越高,就越容易获得公众对数学的喜爱和认可.这些都可以看作是一种较为朴素的对数学的欣赏.而我们在数学教育中所倡导的“数学欣赏”,应该是高于朴素的大众数学文化层面的,即需要建立在必要的数学认知基础之上.也就是说,数学欣赏是要以一定深度的数学理解,数学习得和

^① 黄秦安,刘达卓,聂晓颖.论数学欣赏的“含义”“对象”与“功能”——数学教育中的数学欣赏问题[J].数学教育学报,2013(1):8-12.

数学认知作为前提的. 这种理解、习得、认知也与了解数学的精神、数学眼光、数学思想、数学方法、数学解题、数学应用、数学史观, 等等密切相关. 作者的这套丛书就是为广大数学爱好者以及数学工作者提供参考的.

数学欣赏, 古已有之, 中外皆然. 特别是近几年在张奠宙教授的倡导下, 数学欣赏是谈论得比较多的一个话题了. 张教授于 2010 年分别在《中学数学教学参考》《中学数学月刊》上发表了《欣赏数学的真善美》《谈课堂教学中如何进行数学欣赏》的指导性论文, 接着陕西师范大学的教育刊《中学数学教学参考》专门开辟“数学欣赏”的专栏, 并邀请张奠宙教授作为主持人, 在开篇栏目中还写了编者按, 并指出: 数学欣赏是一种数学情怀, 是一门学问, 是一种学习, 是一种精神, 是一个鲜活的研究课题. 学会数学欣赏, 研究数学欣赏, 大力挖掘数学欣赏, 有助于我们从一个新的视角去认识和理解数学内容, 给课堂教学注入新的活力; 有助于促进中学教师以欣赏的激情去从事数学教学, 数学课堂或许变得更加有趣味, 数学教学或许给予学生更多的数学精神和力量, 数学或许会让更多的学生迷恋和欣赏. 这为我们深入研究数学欣赏开辟了新的阵地. 近几年来在这块阵地上已刊载了一系列佳作.

作者通过对这套数学欣赏丛书的写作以及近期文献的学习, 认为对数学欣赏的理解可从一些侧面做如下的描述:

数学欣赏是一种对数学的喜爱情感, 是一种对数学的崇敬情怀, 是一种佩服数学理性的心理倾向, 是数学素养中某种意识的流淌, 是一种数学思维活动的展现, 是学习数学的一种情趣表露. 前三者是较低层次的欣赏, 后三者是较高层次的欣赏. 下面, 我们试举 6 例以说明之.

例 1 一条辅助线使一道几何题求解豁然开朗.

每个喜爱数学的人, 都曾感受到那样的时刻: 一条辅助线使不好着手的几何题求解豁然开朗. 如图 1-1, 在折五边形 $ABCDE$ 中, 求五个折角和 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ 的度数.

解析 联结 CE , 设 AE 与 BC 交于点 O , 由三角形内角和定理及 $\angle AOB = \angle COE$, 可得

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle OEC + \angle OCE$$

所以

$$\begin{aligned} & \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 \\ &= \angle OEC + \angle OCE + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 \\ &= (\angle OCE + \angle 3) + (\angle OEC + \angle 4) + \angle 5 \\ &= \angle DCE + \angle DEC + \angle CDE \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

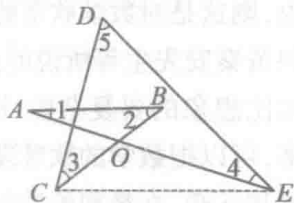


图 1-1

这道简单数学问题的处理也训练了解题者的思维, 当我们处理某些事情时, 也要善于发现对象间的内在联系, 也要善于找到适当的处理手段. 数学就是这样让人喜爱!

例 2 用数学符号表达一种世界观.

数学符号就是数学语言的词汇, 它是数学先辈们长期创作的数学语言中的精华, 是最通用的一种语言, 又比世界上任何一种母语更精练、更准确. 用数学符号语言来表达, 丰富和发展了人类语言. 例如可用数学符号表达一种世界观:

“+”号用在学习上,“-”号用在闲聊上,“×”号用在工作上;

“÷”号用在专业上,“,”号用在委屈上,“!”号用在情怀上;

“?”号用在成绩上,“=”号用在群众上,“()”号用在自省上;

“……”号用在事业上,“→”号用在未来上,“f”号用在创新上.

数学符号语言就是这样的闪烁着人类的智慧,数学就是这样让人崇敬!

例3 求下列组合数的平方和

$$S = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$$

解析 处理这个问题需要有点理性和悟性.

先注意到下列二项展开式(此组合数与二项展开式有关)

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

类似地(理性思维)有

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{x} + C_n^2 \frac{1}{x^2} + \cdots + C_n^n \frac{1}{x^n}$$

当上述两个式子两边相乘时,显然乘积右端的常数项正好是

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$$

而乘积左端是

$$(1+x)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} (1+x)^{2n}$$

因此,所要求的和即是 $\frac{1}{x^n} (1+x)^{2n}$ 中的常数项,也就是展开式 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数,那

当然便是 C_{2n}^n . 于是便得

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

由上可知,这个组合恒等式的发现,是数学理性与思维悟性(心理倾向思维)共同作用的结晶. 数学就是这样让人佩服其理性的心理倾向!

例4 观察 $34^2 = 1\ 156$, $334^2 = 111\ 556$, $3\ 334^2 = 11\ 115\ 556$, ..., 请写出 $\underbrace{3 \cdots 3}_{R \text{ 个}} 4^2 = ?$

解析 这是对有一个特色的问题的探求,这个特色呈现出规律,因而可猜测为

$$\underbrace{3 \cdots 3}_{R \text{ 个}} 4^2 = \underbrace{1 \cdots 1}_{R+1 \text{ 个}} \underbrace{5 \cdots 5}_{R \text{ 个}} 6$$

这个猜测能证实吗?

数学的某种意识启引我们用字母与数字表示这些式子的左端,有

$$[3(10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10 + 1)n + 1]^2, k=1, 2, \cdots \text{ 且 } n=1$$

将上式利用平方和公式展开,有

$$\text{上式} = n^2(10^{2k+1} + 10^{2k} + \cdots + 10^{k+1}) + (6n - n^2)(10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10 + 1) + 1$$

故当 $n=1$ 时, $\underbrace{3 \cdots 3}_{R \text{ 个}} 4^2 = \underbrace{1 \cdots 1}_{R+1 \text{ 个}} \underbrace{5 \cdots 5}_{R \text{ 个}} 6$.

这样,我们不但求得了结果,而且还引发我们推导类似的问题:

例如:当 $n=2$ 时,则当 $k=1, 2, \cdots$ 时,有

$$67^2 = 4\,489, 667^2 = 444\,889, 6\,667^2 = 44\,448\,889, \dots, \underbrace{6\dots67}_{R\text{个}} = \underbrace{4\dots48\dots89}_{R+1\text{个}} \underbrace{}_{R\text{个}}$$

由上可知,数学素养中的这种意识(参见本套丛书中的《数学精神巡礼》第八章有8种意识)使某些规律明显呈现.数学就是这样流淌出某种意识,让人在欣赏中获得问题解决的方法.

例5 解方程 $x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 2x - \sqrt{2} + 1 = 0$.

解析 这给出的不仅是一个3次方程,而且系数中含有无理数,直接求解显然困难不小.

观察事物,立场不同,观察到的结果也会不同.处理问题,若从某一角度用某种方法解决难以奏效时,数学思维的灵活性品质,引导我们不妨换一个角度去观察,换一种方法去处理便有可能“柳暗花明”,而“迎刃而解”.

此时可将 x 看作“已知量”,将 $\sqrt{2}$ 看作“未知量”,于是原方程可整理为

$$x(\sqrt{2})^2 - (2x^2 + 1)\sqrt{2} + x^3 + 1 = 0$$

由一元二次方程的求根公式得

$$\sqrt{2} = x + 1 \text{ 或 } \sqrt{2} = \frac{x^2 - x + 1}{x} \quad (x \neq 0)$$

否则原方程无意义,故得 $x_1 = \sqrt{2} - 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1})$ 为所求.

由上可知,此问题的求解展现出来了数学思维的优良品质.数学思维让人震撼!震撼油然而产生欣赏.数学欣赏,是一种数学思维活动的展现.

例6 设实数 x, y, z 满足 $x + y + z = xyz$.

$$\text{求证: } \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

解析 这是一道有趣的代数问题.

我们先看这个等式的左端,分母显然是

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$$

通分

$$\begin{aligned} \text{左式的分子} &= 2x(1-y^2)(1-z^2) + 2y(1-x^2)(1-z^2) + 2z(1-x^2)(1-y^2) \\ &= 2x(1-y^2-z^2+y^2z^2) + 2y(1-x^2-z^2+x^2z^2) + 2z(1-x^2-y^2+x^2y^2) \\ &= 2(x+y+z) - 2x^2y - 2xy^2 - 2yz^2 - 2y^2z - 2z^2x - 2x^2z + 2xyz(yz+zx+xy) \end{aligned} \quad (*)$$

整理到此步,令人目眩神摇,眼花缭乱,怎样才能拨开迷雾?

注意到题设条件 $x + y + z = xyz$,我们来一个“双向替换”,即看到 $x + y + z$ 就用 xyz 代替,反之,看到 xyz 就用 $x + y + z$ 代替.于是,我们便由式(*)有

$$\begin{aligned} &2xyz - 2x^2y - 2xy^2 - 2y^2z - 2yz^2 - 2z^2x - 2x^2z + 2(x+y+z)(yz+zx+xy) \\ &= 2xyz - 2x^2y - 2xy^2 - 2y^2z - 2yz^2 - 2x^2z - 2z^2x + 2xyz + 2x^2z + 2x^2y + 2y^2z + 2xyz + \\ &\quad 2xy^2 + 2yz^2 + 2z^2x + 2xyz \\ &= 8xyz = \text{右边的分子} \end{aligned}$$

从上述证明过程可知,代数式的恒等变形是处理问题的关键之所在.其实,此题也可以用三角知识来证:

令 $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$, 由 $x + y + z = xyz$, 有

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

由三角知识,我们便可推断有 $A + B + C = k\pi$ (k 为整数).

从而 $2A + 2B + 2C = 2k\pi$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} \\ &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} + \frac{2\tan C}{1-\tan^2 C} \\ &= \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C \\ &= \tan 2A \cdot \tan 2B \cdot \tan 2C \\ &= \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) \left(\frac{2y}{1-y^2} \right) \left(\frac{2z}{1-z^2} \right) \\ &= \frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \end{aligned}$$

逐步推演,都是题中应有之义,显得多么自然、轻松,烦琐的计算一概省略了.

以上两种证法,充分体现了数学的和谐统一性,不得不让人油然而生欣赏之情趣.数学欣赏是学习数学的一种情趣表露.

从上述诸例也可以看出,数学欣赏有多种角度,可从数学自身的美感,可从独立的审美情趣,也可从特有的价值观等.

1.2 数学欣赏要欣赏什么?

在数学中,哪些内容可以成为欣赏的对象呢?著名数学家丘成桐曾接受《光明日报》记者采访时说:“数学是一门很有意义、很美丽,同时也是很重要的科学,从实用角度讲,数学遍及物理、工程、生物、化学和经济,甚至与社会科学也有很密切的关系.文学的最高境界是美的境界,而数学也具有诗歌和散文的内在气质,达到文学性的方面,达到一定境界后,也能体会和享受到数学之美.数学既有文学性的方面,也有应用性的方面,我对这些都感兴趣,探讨它们之间妙趣横生的关系,让我真正享受到了研究数学的乐趣.”^①著名数学家陈省身先生曾有“我们欣赏数学,我们需要数学”和“数学好玩”等题词,强调了数学的真、美与善等不同层面.^②可见,在陈先生和丘先生看来,数学具有真、善、美三个层次的表现力.这里,我们对数学的真善美的概念略加说明.所谓数学的真,就是数学的真理属性,全部的数学知识都是以数学的真理为依归的.而数学的善,则是衡量数学功用价值的一个重要尺度.至于数

① 沈耀峰,齐芳.丘成桐:享受数学之美[N].光明日报,2005-11-15(2).

② 丁石孙,张祖贵.数学与教育(《数学·我们·数学》丛书)[M].长沙:湖南教育出版社,1991.