"十三五"江苏省高等学校重点教材

国家特色专业、江苏省品牌专业自动化精品教材

全国普通高校自动化类专业规划教材

Modern Control Theory

现代控制理论

丁 锋 ◎著

Ding Feng

清华大学出版社

“十三五”江苏省高等学校重点教材（编号：2016-2-096）
国家特色专业、江苏省品牌专业自动化精品教材

全国普通高校自动化类专业规划教材

Modern Control Theory

现代控制理论

丁　锋　◎著
Ding Feng

清華大學出版社
北　京

内容简介

现代控制理论是自动化专业的一门基础课程. 本书是作者在清华大学、江南大学从事现代控制理论相关课程的教学和科研创新经验的结晶, 介绍现代控制理论的基础知识: 动态系统的状态空间描述、线性系统的运动分析、能控性、能观测性、状态反馈和观测器等, 以及非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析, 还介绍作者在现代控制理论方面的一些最新研究成果: 连续系统离散化、Z-S 变换、卡尔曼滤波和连续系统重构.

本书不仅传授知识, 而且还传授科学研究与创新的新思想和新方法, 特别是提出了一系列值得深入研究的课题, 将引导读者走上科学研究的道路. 书中一些 MATLAB 仿真例子为初学者快速上手提供了学习蓝本. 本书既可作为大学本科自动化专业“现代控制理论”课程的教材, 也可作为硕士和博士研究生“线性系统”课程的参考书, 还可供自动控制、电气自动化类及相关电类专业高校教师和科技人员选用.

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论/丁锋著. —北京：清华大学出版社, 2018
(全国普通高校自动化类专业规划教材)
ISBN 978-7-302-48695-4

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①丁… Ⅲ. ①现代控制理论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 271392 号

责任编辑: 梁 颖 王冰飞
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 梁 毅
责任印制: 宋 林
出版发行: 清华大学出版社
网 址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载: http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者: 三河市金元印装有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 185mm×260mm 印 张: 26.75 字 数: 651 千字
版 次: 2018 年 8 月第 1 版 印 次: 2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价: 59.00 元

产品编号: 076827-01

作者简介
ABOUT THE AUTHOR

丁锋, 男, 系统辨识专家、控制科学家、数学家. 湖北广水人 (应山县人), 清华大学博士、University of Alberta 博士后、教授、博士生导师.

教育与工作经历如下：

- 自 2004 年 10 月至今, 江南大学 "太湖学者" 特聘教授, 博士生导师、学科带头人.
- 1980 年 9 月 —1988 年 8 月, 湖北工业大学学士学位、湖北制药厂变配电技术员.
- 1988 年 9 月 —2002 年 6 月, 清华大学硕士学位、博士学位 (优秀博士学位论文)、讲师、副教授, 系统工程研究所副所长.
- 2002 年 7 月 —2005 年 10 月，加拿大阿尔伯塔大学 (University of Alberta, 埃德蒙顿) 博士后、研究员.
- 2006 年 3—5 月，香港科技大学研究员.
- 2006 年 12 月 —2007 年 2 月、2008 年 5—12 月，加拿大卡尔顿大学 (Carleton University, 渥太华) 访问教授.
- 2009 年 1—10 月，加拿大瑞尔森大学 (Ryerson University，多伦多) 研究员 (包括国家公派访问学者半年).

主要学术成就如下：

- 《系统辨识——系统辨识新论》. 北京: 科学出版社，2013. 65.3 万字.
- 《系统辨识——辨识方法性能分析》. 北京: 科学出版社，2014. 80 万字.
- 《系统辨识——辅助模型辨识思想与方法》. 北京: 科学出版社, 2017. 60 万字.
- 《系统辨识——多新息辨识理论与方法》. 北京: 科学出版社, 2016. 65 万字.
- 发表学术论文 512 篇，其中 SCI 收录论文 256 篇，*Automatica* 和 *IEEE Transactions* 23 篇、*SIAM Journals* 2 篇, 被 SCI 期刊他引 7000 余次.
- 44 篇 SCI 论文入选 2006—2016 年 11 年期间 ESI (Essential Science Indicators) 高被引论文全球前 1%, 其中作为第一作者发表 24 篇.
- 入选汤森路透 (Thomson Reuters) 2014 年全球高被引科学家 (工程与计算机科学两个领域).
- 入选汤森路透 (Thomson Reuters) 2015 年全球高被引科学家 (工程与计算机科学两个领域).
- 入选汤森路透 (Thomson Reuters) 2016 年全球高被引科学家 (工程与数学两个领域).
- 2 篇第一作者 SCI 论文入选 "2011 年中国百篇最具影响国际学术论文".
- 1 篇第一作者 SCI 论文入选 "2012 年中国百篇最具影响国际学术论文".

- 1 篇第一作者 SCI 论文入选 “2013 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第一作者 SCI 论文入选 “2014 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第二作者 SCI 论文入选 “2011 年中国百篇最具影响国际学术论文” 和 “2014 年欧洲信号处理协会 3 篇最佳论文奖之一”.
- 发表在 *IET Control Theory and Applications* 2013 年第 2 期上的 SCI 论文 “Gradient-based and least-squares-based iterative algorithms for Hammerstein systems using the hierarchical identification principle” 获得 2015 年 IET Journals 杂志的最佳论文奖 “Premium (Best Paper) Awards”. 该奖是 *IET Control Theory and Applications* 杂志每年从前两年发表论文中评选出的唯一一篇最佳论文.
- 2008 年入选江苏省 “青蓝工程” 中青年学术带头人培养对象 (2012 年 12 月考核颁发证书).
- 2012 年 5 月被授予 “无锡市有突出贡献中青年专家” 称号.

他是 Z–S 变换、鞅超收敛定理、辅助模型辨识思想、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念等的缔造者. 在现代控制理论、辅助模型辨识、多新息辨识、递阶辨识、耦合辨识、迭代辨识、滤波辨识领域做出了杰出贡献, 提出了连续时间系统与离散时间系统间的 Z–S 变换、时变增益最优观测器设计方法、鲁棒观测器—控制器设计方法、连续时间系统重构方法、非均匀采样数据系统参数与状态递阶估计方法, 提出了用于时变离散时间系统递推辨识方法与自适应控制方法有界收敛性判定工具——“鞅超收敛定理”, 研究和提出了一系列辨识新方法. 尤其在 Z–S 变换、辨识新方法、辨识方法性能分析等方面所作的贡献, 具有前瞻性和开创性, 在国内外都处于领先地位. 正在出版《系统辨识学术专著丛书》8 部, 每部 60 万字以上, 各分册名称如下.

第 1 分册《系统辨识——系统辨识新论》(已出版)
第 2 分册《系统辨识——系统辨识方法论》
第 3 分册《系统辨识——辨识方法性能分析》(已出版)
第 4 分册《系统辨识——辅助模型辨识思想与方法》(已出版)
第 5 分册《系统辨识——迭代搜索原理与辨识方法》
第 6 分册《系统辨识——多新息辨识理论与方法》(已出版)
第 7 分册《系统辨识——递阶辨识原理与方法》
第 8 分册《系统辨识——耦合辨识概念与方法》

前 言
PREFACE

江南大学自动化专业是国家特色专业, 也是江苏省品牌专业. "现代控制理论" 是自动化专业的主干课程, 经过多年的建设, 现代控制理论作为自动化专业精品教材, 得到 "十三五" 江苏省高等学校重点教材立项资助.

现代控制理论是自动控制理论的一个重要组成部分. 相对于经典控制理论, 现代控制理论所能处理的控制问题要广泛得多, 如非线性系统、时变系统等. 现代控制理论方法是自适应控制、最优控制、鲁棒控制、预测控制等先进控制的理论基础. 鉴于现代控制理论的特点, 我们针对自动化特色专业和品牌专业编写一部具有研究特色的精品教材.

本书是 20 多年来作者给清华大学、江南大学自动化专业本科生讲授现代控制理论相关课程教学经验、科学研究经验, 以及 5 年海外研究经历的结晶. 《现代控制理论》是在作者讲稿、讲义的基础上, 根据教学过程中学生的反馈以及作者的思考, 针对特色专业、品牌专业的特点, 对课堂讲义进行逐年修改、补充、完善写成, 同时汇集了作者在现代控制理论领域的一些最新研究成果.

在教学过程中, 鉴于学生的理解能力, 在教材中融入了一些知识点的总结、方法和步骤的运用, 增加了一些创新思维模式的启发、一些有针对性的例题和值得深入思考的习题, 特别是纳入了现代控制理论的一些最新优秀成果, 如我们提出的连续时间系统与离散时间系统间的 Z–S 变换、时变增益最优观测器设计、鲁棒观测器—控制器设计、连续时间系统重构、非均匀采样数据系统参数与状态递阶估计, 形成了富有特色专业、品牌专业气息的研究型教材. 该教材在江南大学 10 余年几十个班级试用, 反应效果良好. 本教材得到湖北工业大学、青岛科技大学、北京石油化工学院、北京工商大学、内蒙古科技大学、南京工业大学、常州工学院、上海海事大学、南通大学、南京邮电大学、青岛大学、青岛农业大学等兄弟院校授课教师的肯定和好评. 与国内外同类教材比较, 本书主要特色与创新如下.

(1) 该书组织结构清晰, 写作方法独特. 该书吸收了国内外许多教材的写作优点, 从控制论的产生, 到控制科学的形成, 揭示了控制方法与控制问题的机制特征.

(2) 该书内容新颖、创新性强. 该书吸纳了现代控制理论在国内外的一些最新研究成果, 如 Z–S 变换、时变增益最优观测器、鲁棒观测器—控制器、连续时间系统重构等.

(3) 本书不仅传授知识, 而且传授科学研究与创新的新思想和方法. 除重点介绍一些基础知识和基本方法外, 还提出了一系列开放性的研究课题, 使读者知晓现代控制理论中的研究难点和未来发展趋势.

(4) 本书出版是及时的, 使我国 "现代控制理论" 教材向研究型教材迈进了一大步.

本书既可作为我国自动化专业教材, 也可供电类专业、控制科学与工程学科教学与科研用书, 还可作为有关技术人员、工程师的参考书.

丁　锋

2018 年 5 月 19 日 2:15 于江南大学 C415 Office

主要符号说明
DESCRIPTION OF MAIN SYMBOLS

数集和数域

$\mathbb{N}$	自然数集: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$.
$\mathbb{N}_0$	包括 0 的自然数集: $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\cdots\}$.
$\mathbb{Z}$	整数集: $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.
$\mathbb{Q}$	有理数集或有理数域.
$\mathbb{R}$	实数集或实数域, $\mathbb{R}:=\mathbb{R}^1$.
$\mathbb{R}^n$	n 维实欧几里得 (Euclidean) 空间, $\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}^{n\times 1}$, 或 n 维实数列向量集或实系数函数列向量集 (列向量空间).
$\mathbb{R}^{m\times n}$	所有 m 行 n 列矩阵构成的实空间或实系数函数空间.
$\mathbb{R}^{1\times n}$	n 维实数行向量集或实系数函数行向量集 (行向量空间).
$\mathbb{C}$	复数集或复数域; $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 复矩阵集或复系数函数矩阵集; $\mathbb{F}^{m\times n}$ 代表 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 或 $\mathbb{C}^{m\times n}$.
$\mathbb{C}^n$	n 维复数列向量集或复系数函数列向量集, $\mathbb{C}^n:=\mathbb{C}^{n\times 1}$; $\mathbb{F}^{n\times 1}=:\mathbb{F}^n$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$.
$\mathbb{C}^{1\times n}$	n 维复数行向量集或复系数函数行向量集.
$\mathbb{F}$	代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

数向量和数矩阵

$\mathbf{0}$	适当维数的零向量或零矩阵.
$\mathbf{0}_{m\times n}$	$m\times n$ 零矩阵.
$\mathbf{1}$	元均为 1 的适当维数矩阵.
$\mathbf{1}_{m\times n}$	元均为 1 的 $m\times n$ 矩阵.
$\mathbf{1}_n$	元均为 1 的 n 维列向量, $\mathbf{1}_n:=\mathbf{1}_{n\times 1}$.
$\boldsymbol{I}$	适当维数的单位阵, 其对角元均为 1, 其余元均为零.
$\boldsymbol{I}_n$	n 阶单位阵 $\boldsymbol{I}_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其对角元均为 1, 其余元均为零.

基本数学符号

$\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]=\det[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A}^{-1}$.
$\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$	将矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的列按次序排成的向量. 如 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^m$, $i=1,2,\cdots,n$, 那么 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{mn}$. 有的资料上用 vecX 代替 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$.

const	常数.
cov	$\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ 表示随机向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵, 定义为 $\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] := \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}]$, $\bar{\boldsymbol{x}} := \mathrm{E}[\boldsymbol{x}]$.
$\mathrm{D}[*]$	$\mathrm{D}[x(t)] := \mathrm{var}[x(t)]$ 表示随机变量 (过程) $x(t)$ 的方差.
$\det[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式, 即 $\det[\boldsymbol{X}] := \|\boldsymbol{X}\|$.
$\mathrm{diag}[*,*,\cdots,*]$	对角矩阵.
$\dim\boldsymbol{\varphi}(t)$	表示向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的维数, 如 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^n$, 则 $\dim\boldsymbol{\varphi}(t)=n$.
$\mathrm{E}[*]$	数学期望 (均值).
$\mathrm{E}[*\|\mathcal{F}_t]$	对 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望 (条件均值).
$\exp(x)$	指数函数, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.
for all	for all $t\geqslant 0$ 表示对所有 $t\geqslant 0$, 即 $t=0,1,2,\cdots$
for any	for any $t>0$ 表示对每一个 $t>0$, 即 $t=1,2,3,\cdots$
for large	for large t 表示对大 t.
for some	for some $t>0$ 表示对某个 $t>0$, 如 $t=1,2,3,\cdots$ 中的一个.
$\mathrm{grad}[f(\boldsymbol{x})]$	标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对向量自变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的梯度 (列向量).
$\mathrm{Im}[s]$	s 的虚部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, σ 和 ω 均为实数, 则 $\mathrm{Im}[s]=\omega$.
$\inf[*]$	下界. 例如, $f(x)=\exp(-x^2)$, 则 $\inf[f(x)]=0$.
j	虚数单位, 即 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$.
lim	极限符号.
lim sup	上界极限符号.
$\ln[*]$	以 $\mathrm{e}=2.718281828459\cdots$ 为底的自然对数.
$\max[*,*,\cdots,*]$	$(*,*,\cdots,*)$ 中最大者.
$\min[*,*,\cdots,*]$	$(*,*,\cdots,*)$ 中最小者.
$\mathrm{Re}[s]$	s 的实部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, σ 和 ω 均为实数, 则 $\mathrm{Re}[s]=\sigma$.
$\mathrm{sgn}(x)$	符号函数, 即 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$
star ($\star$)	Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积). 例如, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}\star\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{pmatrix}\star\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\boldsymbol{Y}_p\end{pmatrix}$.
sup	上界. 例如, $f(x)=1-\exp(-x^2)$, 则 $\sup[f(x)]=1$.
T	上标 T 表示矩阵转置.
$\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的迹, 即矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的对角元之和 (也等于 $\boldsymbol{X}$ 的特征值之和).
$\mathrm{var}[x(t)]$	随机过程 (变量) $x(t)$ 的方差, 即 $\mathrm{var}[x(t)]=\mathrm{E}\{[x(t)-\mathrm{E}(x(t))]^2\}$.
$\|x\|$	$\|x\| := \mathrm{abs}(x)$ 表示 x 的绝对值.
$\|\boldsymbol{X}\|$	$\|\boldsymbol{X}\| := \det[\boldsymbol{X}]$ 表示方阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式.

变量和函数定义

$A =: X$	A 定义为 X.

$X := A$	A 定义为 X.
$1(t)$	单位阶跃函数: $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$
$\|\boldsymbol{X}\|$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的范数, 如定义为 $\|\boldsymbol{X}\|^2 := \mathrm{tr}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$ 或 $\|\boldsymbol{X}\|^2 := \lambda_{\max}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$.
$\boldsymbol{X}^{-1}$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的逆矩阵, 定义为 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 或 $\boldsymbol{X}^{-1} \doteq \mathrm{adj}[\boldsymbol{X}]/\det[\boldsymbol{X}]$.
$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的转置.
$\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 逆的转置: $\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}^{-1}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^{-1}$.
$\boldsymbol{X}^*$	(复) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的共轭转置.
z^{-1}	单位后移算子, 如 $z^{-1}y(t) = y(t-1)$.
$f(t) = o(g(t))$	表示 $g(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$.
$f(t) = O(g(t))$	表示 $g(t) \geqslant 0$, 存在常数 $\delta_1 > 0$ 和 t_1 满足 $\|f(t)\| \leqslant \delta_1 g(t)$, $t \geqslant t_1$.
$\boldsymbol{P}(t)$	协方差矩阵.
δ	相对参数估计误差 $\delta := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\|/\|\boldsymbol{\theta}\|$ 或 $\delta := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)\|/\|\boldsymbol{\theta}(t)\|$.
δ_a	绝对参数估计误差 $\delta_a := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\|$ 或 $\delta_a := \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)\|$.
δ_0	均方参数估计初值偏差 $\delta_0 := \mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) - \boldsymbol{\theta}\|^2]$, 或 $\delta_0 := \mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) - \boldsymbol{\theta}(0)\|^2]$.
δ_{ij}	Kronecker delta 函数, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$
$\boldsymbol{\theta}$ 或 $\boldsymbol{\theta}(t)$	时不变或时变参数向量 (或参数矩阵).
$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$	参数向量 (矩阵) $\boldsymbol{\theta}$ 或 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 在时刻 t 的估计.
$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$	参数估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) := \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) := \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t)$.
λ	遗忘因子: $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
$\lambda[\boldsymbol{X}]$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的特征值.
$\lambda_i[\boldsymbol{X}]$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个特征值.
$\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}]$	对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最大特征值.
$\lambda_{\min}[\boldsymbol{X}]$	对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最小特征值.
$\sigma[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的非零奇异值 (不要求为方阵), 它定义为 $\sigma[\boldsymbol{X}] := \sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]}$ 或 $\sigma[\boldsymbol{X}] := \sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}]}$.
$\sigma_i[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个非零奇异值.
$\sigma_v^2(t)$ 或 σ_v^2	噪声 $\{v(t)\}$ 的方差.
$\otimes$	Kronecker 积或直积, 若 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p\times q}$, 则 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = [a_{ij}\boldsymbol{B}] \in \mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$, 一般 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$.
$\star$	Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积), 定义见上.

$\circ$ Hadamard 积, 定义为两个矩阵对应元素相乘. 若 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = [a_{ij}] \circ [b_{ij}] = [a_{ij}b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
Hadamard 积要求两个矩阵的维数相同.
两个矩阵的 Hadamard 积的例子如下,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} \end{pmatrix}.$$

目录 CONTENTS