



普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校创新思维训练教材
普通高等院校少数民族预科教材

高等数学基础

主 编 王立冬 奉黎静 齐淑华 林屏峰
主 审 刘 满



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校创新思维训练教材
普通高等院校少数民族预科教材

高等数学基础

主 编 王立冬 奉黎静
齐淑华 林屏峰
副主编 李福霞 刘延涛 楚振艳
主 审 刘 满

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书着眼素质教育,注重数学内容、思维之间内在的联系,条理、结构、脉络清晰,能培养学生数学思维能力,便于教学与学习.在教材内容选取和讲述上,本着从简单到复杂、从特殊到一般的原则,力求深入浅出,“预、补结合”,难易结合,易教易学,主要包括:函数、极限、连续函数、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分以及定积分的应用.为了增加可读性与趣味性,同时还增加了一些数学思想方法简介和数学家简介,兼顾各个层次民族预科学生学习状况,还分层次提供多种程度的习题.

本书主要供普通高等院校少数民族预科班和高职高专院校的学生学习使用,也可供相关学生自学使用和教师教学参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/王立冬等主编. —北京:科学出版社, 2018.9
普通高等教育“十三五”规划教材·普通高等院校创新思维训练教材·
普通高等院校少数民族预科教材

ISBN 978-7-03-058601-8

I. ①高… II. ①王… ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 195597 号

责任编辑:张中兴 梁 清 孙翠勤/责任校对:彭珍珍

责任印制:师艳茹/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 9 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2018 年 9 月第一次印刷 印张:26

字数:524 000

定价:59.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

当今时代,知识的重要性不言而喻.知识是“方”,是人类的精神成果,而思维是“法”,是知识背后的成因,是人脑思维方式的结果.如果人类没有知识和智慧思维,就不可能创造出高层次的知识和解决复杂问题的方法.

因此,到大学学习,如果我们只死记硬背“方”,而不去探究其背后成因的“法”,我们就不能掌握解决复杂问题的方法,只能按照死记的“方”解决一些重复发生的简单问题,遇到复杂问题时,就会不得真法、茫然无序、不知所措.所以,大学教育的核心任务不只是简单地传授更多的知识,更重要的是,应给受教育者的头脑“安装上”高阶的思维方式,这样才能提升他们创新、创造和解决复杂问题的能力.

数学作为人类受教育阶段学习时间最长的课程之一,历来有着训练思维体操的美誉.数学的研究成果也都是其创造的“产品”,因此数学教育,尤其是高等数学教育应该担负起创新思维方法启迪的功能,但目前的高等数学教材中这方面的内容不足,这不能不说是数学教育的一种缺憾.在本书的编写中,我们试图来弥补这种缺憾,或明或隐地增加知识背后成因的内容及探究,借以达到以高等数学知识为载体,提升受教育者创新、创造思维及解决复杂问题能力的目的.

本书是以《高等学校数学课程教学大纲》和《少数民族本科预科教育一年制数学教学大纲》为依据,以高等数学中的重点、焦点概念、性质分析为基础,以启发学生创新、创造思维为任务,以开阔学生视野、丰富学生的知识结构、培养学生的科学精神为目的,以提升数学专业英语词汇为辅助编写而成的.

本书编写过程中,力求突出以下特色.

1. 把创新、创造思维方法和数学专业相关英语词汇融入本书,在学习高等数学且不增加课时的情况下,培养学生创新、创造意识,掌握创新、创造思维方法,丰富数学专业英语词汇.

2. 明确指明本课程研究的主要对象,研究问题使用的主要工具和主要方法.

3. 通过数学研究问题的规律性,在概念、性质、运算的学习中注重数学思想的熏陶,培养学生数学思维能力,即抓住主要特征,抽象数学概念,建立数学模型;利用联想、判断、类比、归纳、推理做出猜测,然后通过分析、证明、计算来揭示事物内在规律;找到简单与复杂之间的过渡媒介和桥梁,达到用数学思维独特的眼光观察带有数学印记的奇妙规律;领悟数学科学思想的目的.

4. 着眼素质教育,用微积分的主导思想——函数思想方法和微积分中所体现的哲学思想贯穿全书,同时介绍有关数学家的数学贡献、事迹等,弘扬数学文化,让学生学习和吸取先辈大师创建人造宇宙的精神食粮;用数学运算法则培养学生遵纪守法、按章办事的素养.

5. 在内容安排与表述上,本着从简单到复杂、从特殊到一般的原则,力求深入浅出,注重讲清数学的基本概念、基本性质,兼顾预科学生多层次的特点,“预、补结合”,难易结合,易教易学,有较强的可读性.

6. 在方法上,体现具体到抽象再由抽象解决更复杂的具体问题,把复杂问题拆成简单问题的方法.

7. 在习题的安排、选择上, 兼顾各层次民族预科学生学习状况, 提供不同程度的习题供不同层次学生选择练习.

本书可作为少数民族本科预科高等数学教材和本科创新思维训练教材.

参加本书编写的有吉林大学珠海学院王立冬老师、李福霞老师, 大连民族大学齐淑华老师、楚振艳老师、刘延涛老师, 中南民族大学奉黎静老师, 西南民族大学林屏峰老师. 本书出版得到了吉林大学珠海学院、大连民族大学、中南民族大学、西南民族大学的大力支持, 一并致谢!

由于时间仓促, 以及民族预科数学教育的特殊性, 编写中难免有疏漏和不妥, 恳请读者见谅.

凡有生命力的教材, 总是需要不断地听取读者的意见、建议进行改进和完善, 以适应教学、学习的要求, 本书也不例外, 所以我们诚挚地希望读者和使用者提出宝贵意见和建议.

编 者

2018年6月

目 录

前言

第一章 函数	1
第一节 集合——微积分的基础, 数学大厦的基石	1
第二节 函数——微积分的研究对象, 变量依赖关系的数学模型	5
第三节 初等函数	17
第四节 隐函数、参数方程确定的函数与极坐标方程确定的函数	34
第五节* 常用经济函数	41
复习题一	44
附录一 一些常用初等代数公式及结论	45
附录二 一些常用的曲线及其方程	48
课外阅读一 数学思想方法简介	54
课外阅读二 数学家简介	55
第二章 极限	58
第一节 数列极限	58
第二节 数列极限运算法则 数列极限存在准则	72
第三节 函数极限——微积分研究问题使用的工具, 变量无限变化的数学模型	83
第四节 函数极限的性质和运算	98
第五节 两个重要极限	108
第六节 无穷小的比较	118
复习题二	126
课外阅读一 数学思想方法简介	127
课外阅读二 数学家简介	129
第三章 连续函数	131
第一节 连续函数——具有特殊极限的函数类, 变量连续变化的数学模型	131
第二节 连续函数的运算与初等函数的连续性	137
第三节 闭区间上连续函数的性质	141
复习题三	146
课外阅读一 数学思想方法简介	147
课外阅读二 数学家简介	149
第四章 导数与微分	151
第一节 导数的概念	151
第二节 求导法则与导数公式	166

第三节 高阶导数	176
第四节 隐函数与由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	183
第五节 函数的微分	190
复习题四	198
课外阅读一 数学思想方法简介	199
课外阅读二 数学家简介	201
第五章 微分中值定理与导数的应用	206
第一节 微分中值定理——导数的性质及应用	206
第二节 洛必达法则	217
第三节* 泰勒公式	227
第四节 函数的单调性与极值	236
第五节 函数的最大值与最小值	245
第六节 函数曲线的凹凸性与拐点	248
第七节 渐近线、函数图形的描绘	254
第八节* 曲率	260
第九节* 导数与微分在经济中的简单应用	265
复习题五	275
课外阅读一 数学思想方法简介	277
课外阅读二 数学家简介	279
第六章 不定积分	283
第一节 不定积分——微分法则的逆运算	283
第二节 不定积分的换元积分法	289
第三节 分部积分法	307
第四节 有理函数的不定积分	313
复习题六	322
课外阅读一 数学思想方法简介	324
课外阅读二 数学家简介	326
第七章 定积分	329
第一节 定积分——求总量的数学模型	329
第二节 定积分的性质	336
第三节 积分上限函数与微积分基本公式	343
第四节 定积分的换元积分法和分部积分法	352
第五节* 反常积分	360
复习题七	366

课外阅读一 数学思想方法简介·····	369
课外阅读二 数学家简介·····	370
第八章 定积分的应用·····	373
第一节 建立求总量模型的简便方法——微元法·····	373
第二节 定积分在几何学上的应用·····	374
第三节* 定积分在物理学上的应用·····	385
第四节* 定积分在经济学中的应用·····	390
复习题八·····	394
课外阅读一 数学思想方法简介·····	395
课外阅读二 数学家简介·····	397
参考文献·····	399
附录 积分表·····	400

微积分研究的主要对象是函数,使用的主要工具是极限,研究问题所使用的主要方法是分类、类比,具体的内容就是通过极限这个工具把函数进行分类(无穷小类、无穷大类、连续类、可导类、可积类等).它与初等数学所研究函数的重要区别是:初等数学研究的大多都是具体函数的具体性质,如研究函数的单调性、奇偶性、周期性等,而微积分所研究的大多都是抽象函数的抽象性质,如连续性、可导性、可积性等.

古典数学与现代数学讨论问题的重要区别之一是,古典数学讨论主要是在数集上讨论问题,而现代数学主要是在一般的集合上讨论问题,所以为了方便把古典数学的思想方法推广到现代数学上去,并且准确而深刻地理解函数概念,集合知识是不可缺少的.本章将简要地介绍集合的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数的概念.

第一节 集合——微积分的基础,数学大厦的基石

一、集合

1. 集合的概念

集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性.集合论的基础是由德国数学家康托尔(Cantor, 1845—1918)在19世纪70年代奠定的,经过一大批卓越的数学家半个世纪的努力,到20世纪20年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位.可以说,当今数学各个分支的几乎所有结果都构筑在严格的集合论理论上.所以,学习高等数学,应首先从集合入手.

所谓**集合(set)**(简称**集**)是指具有某种确定性性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的**元素(element)**.

习惯上,用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素,读作“ a 属于 A ”;用 $a \notin A$ (或 $a \notin A$)表示 a 不是集合 A 中的元素,读作“ a 不属于 A ”.

例1 某学校全体男同学组成一个集合 A ,而该学校的每个男同学是集合 A 的元素.

例2 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的所有实根构成一个集合 B ,而方程的每个实根是集合 B 的元素.

例3 全体偶数组成一个集合 E ,而每个偶数是集合 E 的元素.

例4 圆周 $x^2 + y^2 = 9$ 上所有的点构成一个集合 C ,而圆周上的点是集合 C 的元素.

含有有限多个元素的集合称为**有限集**(finite set), 如上述例题中的集合 A, B ; 含有无限多个元素的集合称为**无限集**(infinite set), 如上述例题中的集合 C, E . 不含有任何元素的集合称为**空集**(empty set), 记作 $\emptyset$.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法通常有两种. 一种是列举法, 即将集合的元素一一列举出来, 写在一个花括号内. 例如, 所有自然数组成的集合可以表示为 $\mathbf{N}$, 则 $\mathbf{N}$ 可以表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

另一种是描述法, 这种方法是用集合元素所具有的共同性质来刻画这个集合, 即将具有性质 P 的元素 x 所组成的集合 A 表示为

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如, 自然数集 $\mathbf{N}$ 也可表示成

$$\mathbf{N} = \{n | n \text{ 是自然数}\};$$

所有实数组成的集合可表示成

$$\mathbf{R} = \{x | x \text{ 为实数}\}.$$

又如例 4 中集合 C 可以表示为

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 9, x, y \text{ 为实数}\}.$$

二、集合的运算

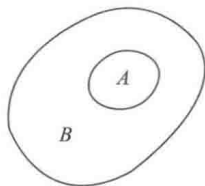


图 1-1

1. 集合的运算

1) 子集

对于集合 A 和 B , 若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素, 即若 $a \in A$, 则 $a \in B$, 这时就称 A 是 B 的一个**子集**(subset), 记作 $A \subseteq B$, 读作“ A 包含于 B ”(或“ B 包含 A ”). 若 $A \subseteq B$, 且存在^① $b \in B$, 使得 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的一个**真子集**(proper subset), 记作 $A \subset B$ (图 1-1).

规定: $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$.

全体自然数的集合, 全体整数的集合, 全体有理数的集合, 全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合, 我们约定分别用粗体字母 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 来表示这些集合, 即

$\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合;

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合;

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合;

^① 本书将用符号 $\forall$ 表示“任意的”, 符号 $\exists$ 表示“存在”. 例如, 集合 A 中任意的元素 a , 可以表示为 $\forall a \in A$; 集合 B 中存在一个元素 b , 可以表示为 $\exists b \in B$.

$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合;

$\mathbf{C}$ 表示全体复数的集合.

我们还把正整数、正有理数和正实数的集合分别记为 $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Q}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$, 显然有

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

和

$$\mathbf{Z}_+ \subset \mathbf{Q}_+ \subset \mathbf{R}_+.$$

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A, B 相等 (equality of sets), 记作 $A = B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素, 反过来, B 中的元素也都是 A 中的元素, 即 A, B 中的元素完全一样.

2) 并集

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集 (union set), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合 (图 1-2).

3) 交集

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集 (intersection set), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合 (图 1-3).

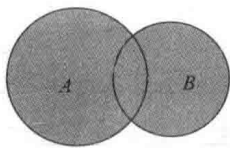


图 1-2

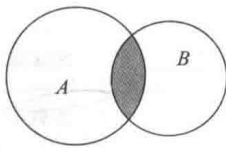


图 1-3

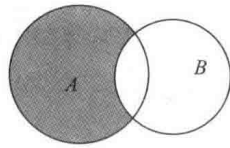


图 1-4

4) 差集

设 A, B 是两个集合, 称 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集 (difference set), 记作 $A - B$, 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合 (图 1-4).

例 5 设 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

解 $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$, $A - B = \{x | -1 < x \leq 1\}$.

2. 集合运算的性质

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) 幂等律 $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

(5) 吸收律 $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.
特别地, 由于 $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, 所以有

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

三、区间与邻域

1. 区间 (interval)

在本书中经常遇到以下形式的实数集的子集——区间. 为了书写简练, 将各种区间的符号、名称、定义列表如下(表 1) ($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$).

表 1 区间的符号、名称及定义

符号	名称		定义
(a, b)	有限区间	开区间	$\{x a < x < b\}$
$[a, b]$		闭区间	$\{x a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$		半开半闭区间	$\{x a < x \leq b\}$
$[a, b)$		半闭半开区间	$\{x a \leq x < b\}$
$(a, +\infty)$	无限区间	开区间	$\{x a < x\}$
$[a, +\infty)$		闭区间	$\{x a \leq x\}$
$(-\infty, a)$		开区间	$\{x x < a\}$
$(-\infty, a]$		闭区间	$\{x x \leq a\}$
$(-\infty, +\infty)$		实数集	$\mathbf{R}$

2. 邻域 (neighborhood)

设 $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$. 数集 $\{x||x - a| < \delta\}$ 表示为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x||x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

称为 a 的 δ 邻域, a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 当不需要注明邻域的半径 δ 时, 常把它表示为 $U(a)$, 简称为 a 的邻域.

数集 $\{x|0 < |x - a| < \delta\}$ 表示为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x|0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) - \{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉中心 a , 称为 a 的 δ 去心邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时, 常将它表示为 $\overset{\circ}{U}(a)$, 简称为 a 的去心邻域. $\overset{\circ}{U}(a)$ 的子集开区间 $(a, a + \delta)$ 称为 a 的右半邻域, 开区间 $(a - \delta, a)$ 称为 a 的左半邻域.

习 题 一

1. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, 下列式子中正确的是().

- (A) $\emptyset \in A$ (B) $A \subseteq A$ (C) $b \subset A$ (D) $\{a\} \subset A$

2. 数集 $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, x \neq 1\right\}$ 还可表示为().

- (A) 去心邻域 $\overset{\circ}{U}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (B) 邻域 $U\left(1, \frac{1}{2}\right)$
 (C) 开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (D) 开区间 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3. 下列集合是空集的是().

- (A) $\{x \mid x+5=0\}$ (B) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x^2 + y^2 = 0\}$
 (C) $\{x \mid x > 0 \text{ 且 } x^2 + 5 = 0\}$ (D) $\{x \mid x^2 + y^2 = 0, \text{ 且 } x, y \in \mathbf{R}\}$

4. 设集合 $M = \{x \mid x^2 > 4\}$, $N = \{x \mid x < 3\}$, 下列式子中正确的是().

- (A) $M \cup N = N$ (B) $M - N = \emptyset$
 (C) $M \cap N = \{x \mid 2 < x < 3\}$ (D) $N - M = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

5. 用区间表示下列不等式的解:

- (1) $x^2 \leq 9$; (2) $|x-1| > 1$; (3) $(x-1)(x+2) < 0$; (4) $0 < |x+1| < 0.01$.

第二节 函数——微积分的研究对象, 变量依赖关系的数学模型

在一个自然现象或技术过程中, 常常有几个量同时变化, 它们的变化并非彼此无关, 而是互相联系的, 这是物质世界的一个普遍规律. 17 世纪初, 数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了“函数”这个基本概念. 在那以后的二百多年里, 这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置.

一、函数的概念

1. 函数定义

定义 1 设非空数集 $D \subseteq \mathbf{R}$, 若对任意的 $x \in D$, 按照某种确定的法则 f , 有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的函数(function), 记作

$$f: D \rightarrow \mathbf{R} \text{ 或 } f: x \mapsto y = f(x), x \in D.$$

其中 x 称为自变量(independent variable), y 称为因变量(dependent variable), D 称为函数 f 的定义域(domain of definition), 函数 f 的定义域常记作 D_f (或 $D(f)$). 对于任意的 $x \in D_f$, 称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值(functional value), 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 全体函数值构成的集合称为函数 f 的值域(domain of value), 常记作 R_f (或 $f(D)$), 即

$$R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

关于函数概念的几点说明:

(1) 用符号“ $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ”表示 f 是定义在数集 D 上的函数, 十分清楚、明确. 在本书中, 为方便起见, 我们约定, 将“ f 是定义在数集 D 上的函数”用符号“ $y = f(x), x \in D_f$ ”表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时, 又可简写为“ $y = f(x)$ ”, 有时甚至笼统地说“ $f(x)$ 是 x 的函数(值)”.

(2) 根据函数定义, 虽然函数都存在定义域, 但常常并不明确指出函数 $y = f(x)$ 的定义域, 这时认为函数的定义域是自明的, 即定义域是使函数 $y = f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $D = \{x | f(x) \in \mathbf{R}\}$. 例如函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 没有指出它的定义域, 那么它的定义域就是使函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合, 即闭区间

$$[-1, 1] = \{x | \sqrt{1-x^2} \in \mathbf{R}\}.$$

具有实际意义的函数, 它的定义域要受实际意义的约束.

(3) 函数定义指出: 对于任意的 $x \in D$, 按照对应法则 f , 对应唯一的一个 $y \in \mathbf{R}$, 这样的对应就是所谓的单值对应. 反过来, 一个 $y \in R_f$ 就不一定只有一个 $x \in D$, 使 $y = f(x)$. 例如函数 $y = \sin x$. 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 对应唯一的一个 $y = \sin x \in \mathbf{R}$, 反之, 对于 $y = 1$, 有无限多个 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}$, 按照对应关系 $y = \sin x$ 都对应 1, 即

$$\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

(4) 在函数 $y = f(x)$ 的定义中, 要求与 x 值对应的 y 值是唯一确定的, 这种函数也称为**单值函数(single valued function)**. 如果取消唯一这个要求, 即对应于 x 值, 可以有两个以上确定的 y 值与之对应, 那么函数 $y = f(x)$ 称为**多值函数(multiple valued function)**. 例如函数 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ 是多(双)值函数.

为了讨论的方便起见, 我们总设法避免函数的多值性. 在一定条件下, 多值函数可以分裂为若干单值分支. 例如, 双值函数 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ 就可以分成两个单值支: 一支是不小于零的 $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, 另一支是不大于零的 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. 我们知道方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 的图形是中心在原点、半径为 r 的圆周, 这同时也就是双值函数 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ 的图形. 两个单值支就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周. 所以只要把各个分支弄清楚, 由各个分支合起来的多值函数也就了如指掌了. 本书若无特别声明, 所讨论的函数都限于单值函数.

必须注意, 定义域和对应法则是确定函数的两大要素. 在数学中, 两个函数相同是指它们的定义域和对应法则分别相同, 至于自变量和因变量用什么字母来表示, 则是无关紧要的. 例如, 函数 $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$ 不是同一函数, 这是因为, $f(x) = \ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = 2\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 它们定义域不同. 而函数 $y = 2x$ 与 $s = 2t$ 表示同一函数, 因为这两个函数的定义域和对应法则都相同.

从函数的定义我们可以看出函数概念最重要的要素是对应法则, 这种对应法则包含着建立已知与未知的对应关系、简单与复杂的对应关系. 所以说函数概念本身也蕴含解决问题的思想方法.

2. 函数的表示法

函数的表示法一般有三种: 表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点, 表格法一目了然; 图像法形象直观; 解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

在高等数学中, 主要是研究使用解析法表示的函数, 但常常也借助于函数的图形使研究的问题更形象, 更便于理解. 值得注意的是, 使用解析法表示函数时, 有些函数在整个定义域上不能用同一个解析式表示, 而需将定义域分成若干个不相重叠的真子集, 用不同的解析式表示, 这类函数称为分段函数 (piecewise function).

例 1 绝对值函数 (absolute value function)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

这是一个分段函数, 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是区间 $[0, +\infty)$ (图 1-5).

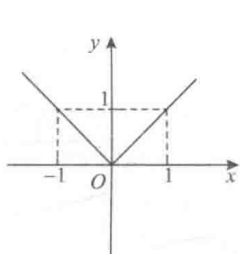


图 1-5

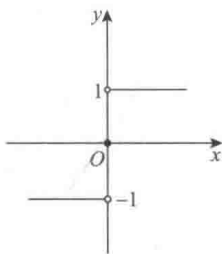


图 1-6

例 2 符号函数 (sign function)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

这是一个分段函数, 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为集合 $\{-1, 0, 1\}$ (图 1-6). 对于任何实数 x , 下列关系成立: $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

例 3 取整函数 (integer-valued function) $y = [x]$.

在数学上常用 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 例如 $[2.5] = 2$, $[3] = 3$, $[0.1] = 0$, $[-\pi] = -4$ 等等. 函数

$$y = [x]$$

的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为整数集 $\mathbf{Z}$ (图 1-7).

例 4 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为集合 $\{0, 1\}$. 由于任何两个有理数之间都有无理数, 并且任何两个无理数之间也都有有理数, 因此我们无法作出它的图形.

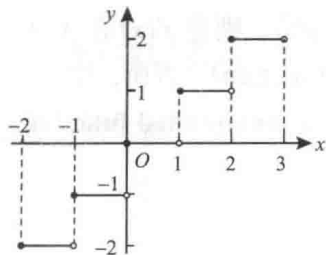


图 1-7

例 5 设

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

求 $f(x+1)$ 的表达式.

解 f 是对应法则, $f(x+1)$ 表示对 $x+1$ 进行如同 $f(x)$ 中对 x 进行同样的运算, 因此

$$f(x+1) = \begin{cases} [(x+1)-1]^2, & 0 \leq x+1 \leq 1, \\ 2(x+1), & 1 < x+1 \leq 2. \end{cases}$$

即

$$f(x+1) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2x+2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

二、几种具有特殊性质的函数

我们都知道“从特殊到一般”与“由一般到特殊”乃是人类认识客观世界的一个普遍规律. 人类在探索世界奥秘的过程中, 都将受到这一规律的制约, 数学科学的探索也不例外. 相对于“一般抽象函数”而言, 具体的特殊函数往往变得简单、直观和容易掌握. 而事物往往具有特殊性包含普遍性的特征, 因而当我们处理问题时, 若能注意到问题的普遍性往往存在于特殊性之中, 就能较容易地掌握“一般到特殊”抽象化具体的方法. 故本节我们将在具体函数^①的基础上, 把函数进行分类, 总结概括出几种特殊的函数类.

1. 有界函数

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$, 若存在正数 M , 使得对任意的 $x \in X$, 恒有不等式

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上(内)有界(bounded), 或称 $f(x)$ 是 X 上(内)的有界函数(bounded function). 否则, 称 $f(x)$ 在 X 上(内)无界(unbounded), 或称 $f(x)$ 是 X 上(内)的无界函数(unbounded function).

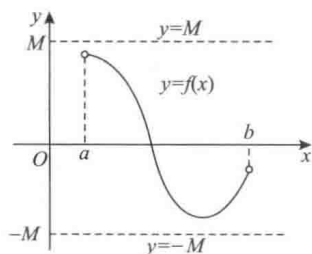


图 1-8

例如, 对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, $|\sin x| \leq 1$, 所以 $y = \sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的有界函数.

有界函数的几何意义: 设 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界, 即存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in (a, b)$, 有 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$. 注意到 $f(x)$ 表示函数 $y = f(x)$ 的图形上点 $(x, f(x))$ 的纵坐标, 因此, $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界在几何上表示 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内的函数图形必夹在两平行于 x 轴的直线 $y = -M$ 与

① 具体函数类的概括将在第三节呈现.

$y=M$ 之间. 反之亦然(图 1-8).

例 6 求证: 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界; 在 $(1,2)$ 内有界.

证明 不论正数 M 多么大(不妨设 $M > \frac{1}{2}$), 总存在点 $x_0 = \frac{1}{2M} \in (0,1)$, 但是

$$|f(x_0)| = \left| \frac{1}{x_0} \right| = 2M > M.$$

所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

当 $1 < x < 2$ 时, $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$, 对于 $(1,2)$ 内任意点 x 有不等式 $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} < 1$ 成立, 所以

$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界.

从这一例题可以看出, 函数是否有界, 与其所在区间有关. 函数 $f(x)$ 若在定义域上有界, 则它在定义域内的任一部分区间上有界.

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$, 若存在数 A , 使得对任意的 $x \in X$, 都有

$$f(x) \leq A \quad (\text{或 } f(x) \geq A)$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上(内)有上界(或有下界), 也称 $f(x)$ 是 X 上(内)有上界(或有下界)的函数. A 称为 $f(x)$ 在 X 上(内)的一个上界(upper bound)(或下界(lower bound)).

显然, 有界函数必有上界和下界; 反之, 既有上界又有下界的函数必是有界函数. 即函数在 X 上(内)有界的充要条件是该函数在 X 上(内)既有上界又有下界.

若 $f(x)$ 在 X 上(内)有一个上界(或下界) A , 则对任何 $C > 0$, $A+C$ (或 $A-C$) 都是 $f(x)$ 在 X 上(内)的上界(或下界), 可见, $f(x)$ 在 X 上(内)的上界(或下界)有无穷多个.

例如, 由于 $|\sin x| \leq 1$, 故 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. 而 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 这是因为虽然 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内有一个下界 0 , 但在 $(0, +\infty)$ 内无上界, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界. 从几何意义上来看, 因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的函数图形不能夹在任何两条平行于 x 轴的直线之间, 所以, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界.

2. 单调函数

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$, 若对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(strictly monotone increasing)(或严格单调减少