高等数学

主　编◎胡金梅 何纪 周长华

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等数学

主　编　胡金梅　何　纪　周长华
副主编　高喜凤

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

《高等数学》一书内容充实、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显，易于教学。

本书内容包括：函数的极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、线性代数初步、多元函数及其微分法、无穷级数、重积分。

本书可作为理工、经营类专业及其相关专业和爱好数学的读者使用的学习读物。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/胡金梅，何纪，周长华主编. —西安：西安交通大学出版社，2018.6

ISBN 978－7－5605－7984－9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①胡… ②何… ③周… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 231945 号

书　　名 高等数学
主　　编 胡金梅　何　纪　周长华
责任编辑 郭鹏飞

出版发行 西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029) 82668357　82667874（发行中心）
(029) 82668315　82669096（总编办）
传　　真 (029) 82668280
印　　刷 三河市宏顺兴印刷有限公司

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张**　14.75　**字数**　359 千字
版次印次 2018年6月第1版　2018年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5605－7984－9/O·521
定　　价 68.00元

前　言

本书依据教育部制定的《高等学校教育专业人才培养目标及规格》和《高等学校教育数学课程教学基本要求》，并结合高等学校教育特点、发展趋势及我们多年的教学实践经验编写，力求发挥高等数学的文化育人、知识基础和技术应用这三大功能，在选择教学内容和要求时坚持必需、够用和适用”的原则，突出用数学建模的方法，培养读者提出问题、分析问题和解决问题的能力。

本书有以下特点：

（1）在读者已有知识经验的基础上提供专业学习必需的数学基础知识、数学方法和计算工具。

（2）对概念、命题多作描述性说明，适当降低数学学习难度和严谨性要求。例如，一般从几何意义、物理意义和生活背景等实际问题引入数学概念，对部分难以理解的概念不严格定义，只作定性描述，对部分较难的定理，只从实例中抽象概括出来，而不给严谨的证明。

（3）本书逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多，有相应配套练习册和网上项目资源，便于自学。

（4）本书扩大了适用面，在保证学习基本要求的前提下，视专业差异给学习内容选择留有一定的弹性。

（5）突出会用会算的技能，使读者通过各专题的学习形成数学观念，养成数学的应用意识，学会应用数学解决实际问题的一些基本方法。

（6）本书在解决数学问题时，比较突出数学软件的工具作用，尽量训练读者使用数学软件和数学工具书，为日后利用数学知识解决实际问题培养一些基本素养。

由于编审人员水平有限，不足之处在所难免，恳请有关专家和同仁使用本书时进行批评和指正，并将在使用本书过程巾遇到的问题、改进意见及时反馈给我们，以利于我们再版此书时作改进。

编　者

2018年5月

目　　录

第 1 章　函数的极限与连续

章节导读

函数概念是全部数学概念中最重要的概念之一，纵观 300 年来函数概念的发展，众多数学家从集合、代数，直至对应、集合的角度不断赋予函数概念以新的思想，从而推动了整个数学的发展.

函数概念的定义经过 300 多年的锤炼、变革，形成了函数的现代定义形式，但这并不意味着函数概念发展的历史终结. 20 世纪 40 年代，物理学研究的需要发现了一种叫做 Dirac $-\delta$ 的函数，它只在一点处不为零，而它在全直线上的积分却等于 1，这在原来的函数和积分的定义下是不可思议的，但由于广义函数概念的引入，把函数、测度及以上所述的 Dirac $-\delta$ 函数等概念统一了起来，因此，随着以数学为基础的其他学科的发展，函数的概念还会继续扩展.

章节要点

- 函数
- 极限的概念
- 极限的运算
- 两个重要极限
- 无穷小与无穷大
- 函数的连续性

1.1　函　　数

一只青蛙一张嘴，两只眼睛四条腿；两只青蛙两张嘴，四只眼睛八条腿；……往下既可以按序说下去，也可以跳过几个突然发问，比如七只青蛙多少张嘴？多少只眼睛？多少条腿？由此可以看到，只要青蛙数一定，眼睛数就完全确定了，这就是函数的基本思想.

函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 高等数学以函数为研究对象，以极限方法为研究手段. 本章将在中学数学的基础上，先对函数、反函数、复合函数及初等函数进行学习，然后重点研究函数的极限与连续，为微积分的学习打下基础.

1.1.1 一元函数

17 世纪初，数学首先从对运动（如航海、天文等问题）的研究中引出了函数这个概念，从此这个概念在科学研究中占据了中心地位. 下面给出函数的定义.

1. 一元函数的概念

定义 1－1 对于一个给定集合 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的对应规则，总有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=y(x)$$

称 x 为自变量，y 为因变量，集合 D 为定义域，变量 y 的取值集合 Y 称为函数的值域，即：$Y=\{f(x)\mid x\in D\}$.

理解函数的概念，读者应注意以下两点：

(1) 两个函数相等，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(2) 同一个函数可以用不同的字母表示，习惯上我们用 x 表示自变量，但只要是同一个函数就可用不同字母表示自变量，例如 $f(x)=x^2$ 还可表示为 $g(t)=t^2$ 等.

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有唯一的 $y\in M$ 与之对应，那么这种函数就称为单值函数，否则就称为多值函数.

例如，由方程 $x^2+y^2=r^2$ 所确定的以 x 为自变量的函数为 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，对于区间 $(-r,r)$ 上的每一个 x 值，都有两个 y 值与之对应，所以 y 是多值函数.

今后若无特殊说明，所研究的函数都指单值函数.

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于每一个自变量 $x\in D$，都有确定的 $y\in M$ 与之对应. 因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in \mathrm{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C.

2. 函数与函数值的记号

已知 y 是 x 的函数，可记为 $y=f(x)$. 但在同一个问题中，如需讨论几个不同的函数，为区别起见，就要用不同的函数记号来表示. 例如，以 x 为自变量的函数也可表示为 $y(x)$，$\varphi(x)$，$S(x)$，$F(x)$ 和 $G(x)$ 等.

当 $x=x_0\in D$ 时，函数 $y=f(x)$ 对应的函数值可记为 $f(x_0)$.

【例 1－1】 设

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$$

求 $f(-2)$，$f(2)$，$f(0)$，$f(a)$ 和 $f(a+b)$.

解 $f(-2)=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$，$f(2)=0$，$f(0)=\dfrac{|-2|}{1}=2$

$$f(a)=\frac{|a-2|}{a+1},\quad f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1}$$

3. 函数的定义域

函数的定义域是指使函数解析表达式有意义的自变量 x 的变化范围.

求解函数的定义域就是求解使函数表达式中各简单函数有意义的 x 的全体，因此，读者应牢记下列简单函数的定义域：

①$y=\frac{1}{x}$　　定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

②$y=\sqrt[2n]{x}$　　定义域为$[0,+\infty)$；

③$y=\log_a x$　　定义域为$(0,+\infty)$；

④$y=\tan x$　　定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$；

⑤$y=\cot x$　　定义域为$x\neq k\pi,k\in Z$；

⑥$y=\arcsin x$（或 $\arccos x$）　　定义域为$|x|\leqslant 1,[-1,1]$.

【例 1－2】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg\frac{x}{x-1}$　　(2) $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$　　(3) $y=\arcsin\frac{x+1}{3}$

解 (1) 因为$\frac{x}{x-1}>0$,所以 $x>1$ 或 $x<0$. 故函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

(2) 因为 $4-x^2\neq 0$,所以 $x\neq\pm 2$;因为 $x+2\geqslant 0$,所以 $x\geqslant -2$. 故函数的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) 因为$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant 1$,所以$-3\leqslant x+1\leqslant 3$,即$-4\leqslant x\leqslant 2$. 故函数的定义域为$[-4,2]$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,才认为它们是相同的.

例如,函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$,它们的定义域和对应关系都相同,所以它们是相同的函数.

又如,函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$,它们的定义域不同,所以它们是不同的函数.

4. 函数的三种表示法

表示函数的方法,常用的有三种:公式法、表格法和图形法. 本书所讨论的函数常用公式法表示.

有时,会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的情况.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数. 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\sqrt{x}$;当 $x<0$ 时,$f(x)=-x$. 它的图形如图 1－1 所示.

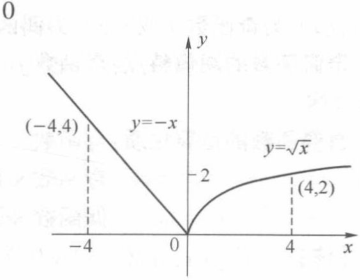


图 1－1

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**. 求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

例如,在上面的分段函数中,

$f(4)=\sqrt{4}=2$,　$f(-4)=-(-4)=4$

5. 反函数

定义 1－2 设函数 $y=f(x)$ 的值域为 R,如果对于 R 中任一 y 值,由关系式 $y=f(x)$ 可确定唯一的一个 x 值与之对应,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为

$$x=\varphi(y),$$

$\varphi(y)$称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

【注】 (1)$y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)只有一一对应的函数才有反函数.

题型6. 反函数的求法

思路:① 从 $y=f(x)$ 中反解出 $x=\varphi(y)$;②将 $x=\varphi(y)$ 中 x 与 y 对换,即求得原函数的反函数 $y=\varphi(x)$;③ 原函数的值域是反函数的定义域.

【例1-10】 设 $y=f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$, 求 $f^{-1}(x)$.

[**解题提示**] 求 $y=f(x)$ 的反函数只需解关于 x 的方程;求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段的反函数及值域即可.

【解】 由 $y=x,-\infty<x<1 \Rightarrow x=y,-\infty<y<1$

于是,反函数为: $y=x,-\infty<x<1$

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4 \Rightarrow x=\sqrt{y},\ 1\leqslant y\leqslant 16$

于是,反函数为: $y=\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16$

由 $y=2^x,4<x<+\infty \Rightarrow x=\log_2 y,\ 16<y<+\infty$

于是,反函数为: $y=\log_2 x,\quad 16<x<+\infty$

综上所述,$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty \end{cases}$.

1.1.2 函数的几种特性

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义且 D 关于原点对称,如果对于任意 $x\in D$ 恒有

$$f(x)=-f(-x)\quad (\text{或} f(x)=f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为奇函数 (或 $f(x)$ 为偶函数).

奇偶函数的图像特点:奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称,偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

奇偶函数的运算性质:奇函数+奇函数=奇函数, 偶函数+偶函数=偶函数,
奇函数×奇函数=偶函数, 偶函数×偶函数=奇函数,
偶函数×偶函数=偶函数.

【注】 (1) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2)函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇函数或偶函数.

题型2. 函数奇偶性的判定

思路:① $f(x)+f(-x)=0$ 奇函数;② 定义域关于原点对称;若非,则函数非奇非偶.

例如,$f(x)=\sin x$ 是奇函数. 因为,对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$$

$f(x)=\cos x$ 是偶函数. 因为,对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$$

$f(x)=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数. 因为

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$$

对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,它既不恒等于 $f(x)$,也不恒等于 $-f(x)$.

奇函数的图形关于原点对称,如图 1－2 所示. 偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1－3 所示.

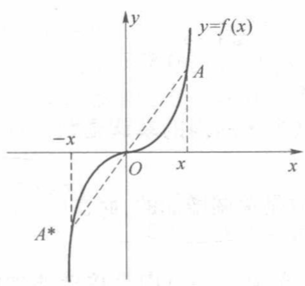


图 1－2

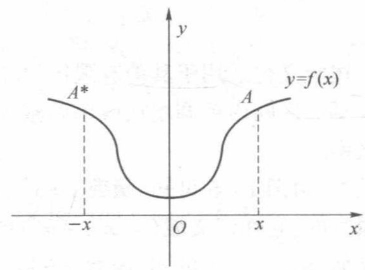


图 1－3

【例 1－4】 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+\mathrm{sgn}(\sin x)$;

(2) 设 $f(x)$ 在包含原点的区间上可积,由 $f(x)$ 的奇偶性,讨论函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的奇偶性.

【解】 (1) a^x+a^{-x} 为偶函数,而 a^x-a^{-x} 为奇函数,$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 为奇函数,$\sin x$ 为奇函数,$\mathrm{sgn}x$ 也为奇函数,所以 $\mathrm{sgn}(\sin x)$ 为奇函数. 从而 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+\mathrm{sgn}(\sin x)$ 为奇函数.

(2) 先设 $f(x)$ 为偶函数,则

$$\begin{aligned}\Phi(-x)&=\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{令\ t=-z}\int_0^x f(-z)\,\mathrm{d}(-z)\\&=-\int_0^x f(-z)\,\mathrm{d}z=-\int_0^x f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\Phi(x),\end{aligned}$$

因此,当 $f(x)$ 为偶函数时,$\Phi(x)$ 是奇函数.

同理可证,当 $f(x)$ 为奇函数时,$\Phi(x)$ 是偶函数.

【注】 若 $f(x)$ 连续,则 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 任一个原函数都可写成 $\Phi(x)+c$,c 为任意取定的常数. 当 $f(x)$ 为偶函数时,$\Phi(x)$ 是奇函数,但 $\Phi(x)+c(c\neq 0)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

2. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 的增大而增大,即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调增加**,区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间. 单调增加的函数,它的图形沿 x 轴的正向而上升,如图 1－4 所示.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 的增大而减小,即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当

$x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调减少**,区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间. 单调减少的函数,它的图形沿 x 轴的正向而下降,如图 1-5所示.

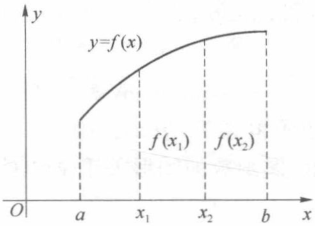


图 1-4

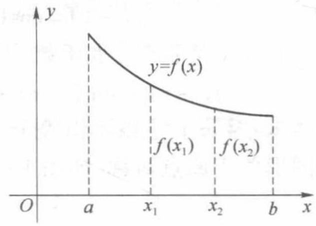


图 1-5

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

在某一区间内单调增加或单调减少的函数都称为这个区间内的**单调函数**,该区间称为**单调区间**.

例如,由图 1-6 可知,函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的,而在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的,它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

又如,由图 1-7 可知,函数 $y=\log_a x\,(a>1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的,函数 $y=\log_a x\,(0<a<1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的. 所以,它们在定义域 $(0,+\infty)$ 内都是单调函数.

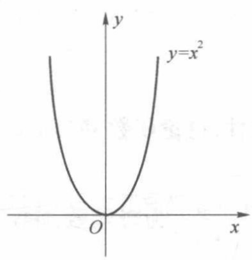


图 1-6

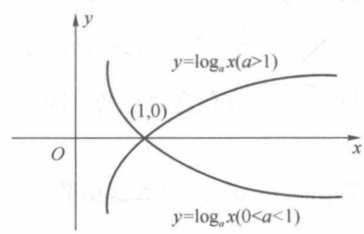


图 1-7

【例 1-5】 设 $f(x)\neq 0$ 是连续函数,又

$$F(x)=\int_0^x [x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]\cdot f(t)\,dt$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数. 试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

[解题提示] 因为 $F(x)$ 是变上限的积分,且 $f(x)$ 连续,所以可用 $F(x)$ 的导数来讨论.

【解】 $F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\,dt-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\,dt$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\,dt+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)$$
$$=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\,dt-2nx^{2n}f(x)$$

解法一

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\,dt-2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x dt$$
$$=2nx^{2n-1}\int_0^x [f(t)-f(x)]\,dt$$

(1)若 $f(x)$ 单调下降,当 $x\geqslant 0$ 时 $(0\leqslant t\leqslant x)$, $f(t)-f(x)\geqslant 0$,于是 $F'(x)\geqslant 0$;当 $x<0$ 时 $(x\leqslant t\leqslant 0)$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_x^0 [f(x)-f(t)]\,dt,$$

此时, $f(x)-f(t)\geqslant 0$, 又 $x^{2n-1}<0$, 于是 $F'(x)\leqslant 0$.

因此,若 $f(x)$ 单调下降,则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升;在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

(2)若 $f(x)$ 单调上升,则类似地讨论可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降;在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

解法二　利用积分中值定理.

$$F'(x)=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)]$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(1)若 $f(x)$ 单调上升:当 $x>0$ 时,则 $0<\xi<x$,而 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$,于是 $F'(x)\leqslant 0$;当 $x=0$ 时,则 $F'(x)=0$;当 $x<0$ 时,则 $x<\xi<0$,而 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$,于是 $F'(x)\geqslant 0$.

因此,若 $f(x)$ 单调上升,则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降;在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

(2)若 $f(x)$ 单调下降,则类似可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升;在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

3. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个正数 T,使得对于定义域内的一切 x,等式

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**, T 称为这个函数的**周期**.

一个以 T 为周期的函数,它的图形在定义域内任意两个长度为 T 的相邻区间上具有相同的形状,如图 1-8 所示.

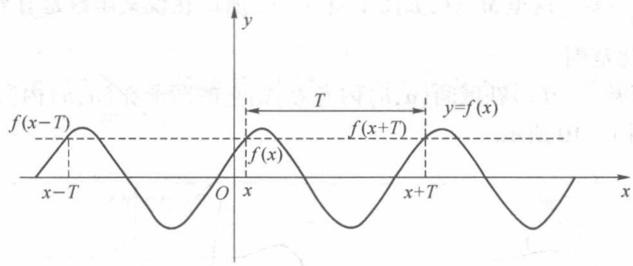


图 1-8

显然,如果函数 $f(x)$ 以正数 T 为周期,则 $2T,3T,\cdots,nT(n\in\mathbb{N})$ 也是它的周期. 通常,周期函数的周期是指其**最小正周期**.

例如,函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,函数 $\tan x$ 和 $\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数,函数 $A\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0)$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数.

【例 1-6】　设对一切实数 x ,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,求周期函数 $f(x)$ 的周期.

【解】　$$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$
$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x),\left(\text{由题设 } f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

即 $f(1+x)=f(x)$，故可知 $f(x)$ 的周期为1.

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对任意的 $x\in X$，都存在 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界.

如果对任意的 $M>0$，都存在 $x\in X$，使 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

题型4. 函数有界性的判断

思路：①利用函数极值判断性质，然后用不等式放缩法；②借助导数求最大(小)值进行处理.

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in\mathbb{R}$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立，这里 $M=1$.

又如，函数 $y=\arctan x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in\mathbb{R}$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 都成立，这里 $M=\dfrac{\pi}{2}$.

再如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为对于区间 $(0,1)$ 内的一切 x，不存在正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 内是有界的，因为对于区间 $[1,2]$ 内的一切 x，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，这里 $M=1$，如图1-9所示. 所以在说某函数是有界还是无界时，应指明自变量的变化范围.

显然，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界，则它的图形在 (a,b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间，如图1-10所示.

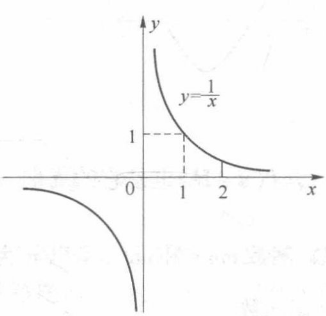


图1-9

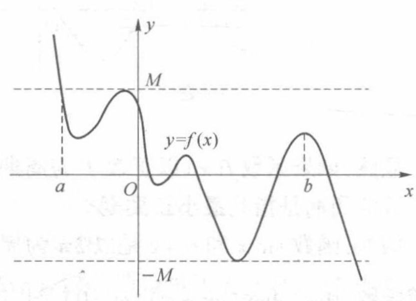


图1-10

【例1-7】 设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数　　(B) 无界函数

(C) 周期函数　　(D) 单调函数

【解】 当 $x\to(2n+1)\dfrac{\pi}{2}(n\in z)$ 时，$\tan x\to\infty$，从而 $f(x)\to\infty$，所以 $f(x)$ 是无界函数，故选(B)

【例1-8】 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上为(　　).

(A)有上界无下界　　(B)有下界无上界

(C)有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$　　(D)有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$

【解】 $f(x)=\frac{\lg x}{x}, f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$.

$\because\ x\in[\frac{1}{2},1]$, $\therefore f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 单调递增.

因此, $\frac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\lg 1}{1}$, 即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$,故答案为 C.

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

常数函数:$y=C$(C 为常数)

幂函数:$y=x^a$(a 为任意实数)

指数函数:$y=a^x$($a>0, a\neq 1$, a 为常数)

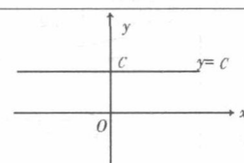
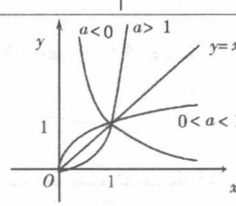
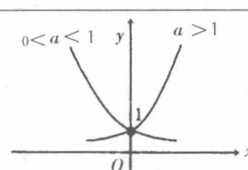
对数函数:$y=\log_a x$($a>0, a\neq 1$, a 为常数)

三角函数:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

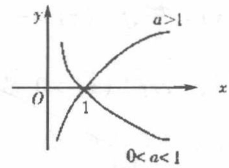
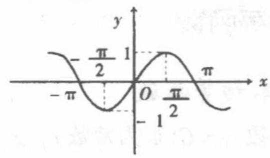
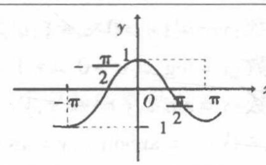
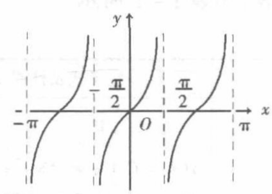
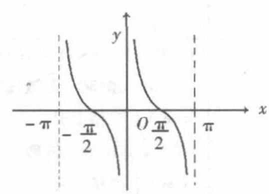
反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

上述六种函数统称为**基本初等函数**. 现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性列表,如表 1－1 所示.

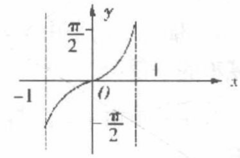
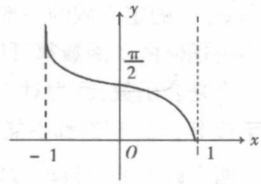
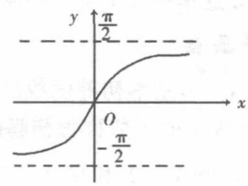
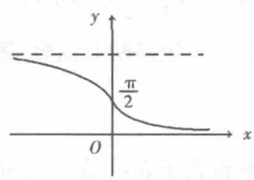
表 1－1

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C$,$(-\infty<x<+\infty)$. 平行于 x 轴,过$(0,C)$点的直线	
幂函数	$y=x^a$, $(0<x<+\infty, a\neq 0)$ $a>0$ 时, 函数 x^a 在 $(0,+\infty)$上严格上升 $a<0$ 时, 函数 x^a 在 $(0,+\infty)$上严格下降 $y=x^a$ 与 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x$($a>0, a\neq 1$) $a>1$ 时, 函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$上严格上升 $0<a<1$ 时,函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$上严格下降	

续表

名称	定义式及性质	图例
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.(若 $a=\mathrm{e}$,记 $y=\log_{\mathrm{e}} x$ 为 $y=\ln x$)	
三函角数	正弦函数 $y=\sin x,(-\infty<x<+\infty)$	
	余弦函数 $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),(-\infty<x<+\infty)$	
三函角数	正切函数 $y=\tan x\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$	
	余切函数 $y=\cot x(x\neq k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$	

续表

名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数　$y=\arcsin x$,$(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数　$y=\arccos x$,$(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$	
反三角函数	反正切函数　$y=\arctan x$,$(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$	
	反余切函数　$y=\operatorname{arccot}x$,$(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$	

2. 复合函数

在实际问题中,常会遇到由几个简单的函数组合而成为较复杂的函数. 例如,函数 $y=\sin^2 x$可以看成是由幂函数 $y=u^2$ 与正弦函数 $u=\sin x$ 组合而成. 因为对于每一个$x\in\mathbb{R}$,通过变量 u,都有确定的 y 与之对应,所以 y 是 x 的函数. 这个函数可通过把 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 而得到.

一般地,给出下面的复合函数的定义:

定义 1-3　设函数 $y=f(u)$的定义域与函数 $u=\varphi(x)$的值域的交集非空,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数. 此时我们称 x 为自变量, u 为中间变量,而 y 称为因变量.

题型 7. 复合函数的求法

思路:① 代入法:将一个函数中自变量用另一个函数表达式替代,适用于初等或抽象函数的复合;

② 分析法:从最外层函数定义域入手,借助中间变量的定义域进行分析;适用于初等函数与分段函数的复合;