智课教育

考研系列专家指导丛书

新大纲+模拟试卷

考研数学一18套模拟试卷
高分专项精解

仲毅　方浩　主编

超值赠送：

- 赠送智课网价值199元、75课时的【2018考研】数学基础班线上课程
- 扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划
- 北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

智课教育

考研系列专家指导丛书

新大纲+模拟试卷

考研数学一18套模拟试卷高分专项精解

仲毅　方浩　主编

- 赠送智课网价值199元、75课时的【2018考研】数学基础班线上课程
- 扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划
- 北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学一18套模拟试卷高分专项精解/仲毅主编. --北京:中国石化出版社,2017.3
ISBN 978-7-5114-3562-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①仲… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第046073号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市朝阳区吉市口路9号
邮编:100020 电话:(010)59964500
发行部电话:(010)59964526
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 10.75印张 262千字
2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
定价:26.00元

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学一18套模拟试卷高分专项精解》

《考研数学二18套模拟试卷高分专项精解》

《考研数学三18套模拟试卷高分专项精解》

本书的编写特点如下：

1. **18套标准模拟试卷，反映最新考试大纲变化**

本书共包含18套标准模拟试卷，试卷严格按照最新考试大纲编写，采用大纲最新题型，难度无限接近研究生入学考试试题，重点针对大纲中的重点、难点、核心考点精心编写，保证试题的高质量、高标准，提高考生复习效率。

2. **注重考试技巧，高效突破难关**

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，

引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编写。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

4. 超值赠送三重好礼

本书超值赠送三重好礼：①赠送智课网价值 199 元、75 课时的 2018 数学基础班线上课程；②扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划；③另有北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊，助广大考研学子一臂之力。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

北京大学状元考研数学备战锦囊

一、复习心得

在考研各科中，我花费了大量时间和精力在数学上。英语中得阅读者得天下，而在理工科中得数学者不一定得天下，但是失数学者绝对失天下！所以一定要在数学上下足功夫，打牢基础。在整个复习过程中，一定要重视基础知识的掌握和理解。经过努力，我数学获得了不错的成绩。

整体计划说明：高等数学教材我用的是同济大学第六版，这本教材很不错。线性代数用的是同济大学出版的第五版。我当时给自己定的做法是，先把书本老老实实过一遍，后面的习题也都做一遍；然后就开始看复习全书，做三遍；最后是猛做真题和模拟题。

大家一般可以把自己的复习分为基础复习阶段（看书本，做习题），中级阶段（做复习全书），临考模拟阶段（做真题、模拟题）。下面我说一下我在这三个阶段中的时间安排以及复习策略。

首先是基础复习阶段，因为我之前学高数的时候学得并不是非常好，于是在高数上面花费了很多时间与精力，先看引理定理和例题，然后做后面的习题，基本每题都做！线性代数对于我来说是比较简单的，在初次学的时候就已经把后面的习题基本都做了，所以基础复习阶段在线性代数上面并没有花费太多时间，只是看了看定理，做了一下例题（注意是例题，不是后面的习题）。我是七月份开始复习的，高数当时看得比较仔细，加上做习题，直到八月初才把高数看完，又花了半个月的时间把线性代数看完。

八月下旬开始中级阶段，中级阶段就一件事：复习全书（李永乐）！我觉得复习全书相当不错。前面的定理要再过一遍，针对定理的习题也一定要做，后面的习题也要做。我前前后后做了三遍，第一遍比较仔细，也比较慢，后面再做就比较快了。大致到了十一月才做完。

十一月左右开始做真题和模拟题，做一套少一套，所以要认真做，要掐时间做。然后评分，总结，记没记牢的知识点。真题和模拟题第一遍做完之后，根据自己平时的得分，你也就大致知道了自己考试中的分数了。接着就是一直不停地做真题和模拟题，一直做到考研那一天。

我在复习过程中遇到的最大困难就是：自己——果然自己才是最大的敌人。每天二事不做，就只是读书、读书，内心十分烦躁，所以一定要克服内心的浮躁。现在回想起来每天只为一个目标而奋斗，反倒是比较幸福的。

复习那么久，大家都摩拳擦掌，想要上战场一展拳脚。但是，数学是比较灵活的，遇到不会做的题目也极有可能，所以在考前一定要有心理准备，如果在考场上心理防线崩塌那就功亏一篑了。如果遇到难题做不出来，可以先跳过，做完所有题目之后，再回头来做，一定要记住一句话：不到最后一刻，决不放弃！

二、考试中的解题技巧

1. 已知 $y=f(x)$ 是由方程 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(f(\frac{2}{n})-1)=(\quad)$

(A)2　　(B)1　　(C) -1　　(D) -2

详解:将 $x=0$ 代入方程 $y=f(0)=1$,在方程两边求导,得到 $-\sin(xy)(y+xy')-\frac{y'}{y}+1=0$,代入 $x=0,y=1$,知 $y'(0)=f'(0)=1$

$$\lim_{n\to\infty}n(f(\frac{2}{n})-1)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2,\text{故应选(A)}$$

技巧分析:这类题有代表性,后边所求一般要用到前面表达式的导数。注意往导数定义或者洛必达法则上靠。

2. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵,若 $AB=C$,且 B 可逆,则(　　)

(A)矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B)矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C)矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D)矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

详解:把矩阵 A,C 列分块如下:$A=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n)$,$C=(r_1,r_2,\Lambda,r_n)$,由于 $AB=C$,则可知 $r_i=b_{i1}\alpha_1+b_{i2}\alpha_2+\Lambda+b_{in}\alpha_n(i=1,2,\Lambda,n)$,得到矩阵 C 的列向量组可用矩阵 A 的列向量组线性表示。同时由于 B 可逆,即 $A=CB^{-1}$,同理可知矩阵 A 的列向量组可用矩阵 C 的列向量组线性表示,所以矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价。应该选(B)

技巧分析:题型固定,且可以当作结论记住。

3. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$,$y_2=e^x-xe^{2x}$,$y_3=-xe^{2x}$ 是某个二阶常系数线性微分方程三个解,则满足 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的解为:______

详解:显然 $y_1-y_2=e^{3x}$ 和 $y_2-y_3=e^x$ 是对应的二阶常系数线性齐次微分方程两个线性无关的解,由解得结构定理,该方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数。把初始条件代入可得 $C_1=1,C_2=-1$。所以答案为:$e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

技巧分析:这类题,首先要理解微分方程的解的构成。还要看清题,是几阶微分方程。题型也固定,知道方法了就不难了。

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$. 记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(1)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

(2)若 α,β 正交且为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

解析:$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)(2\alpha\alpha^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)(\beta\beta^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

所以二次型f对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

(2)证明:设$A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$,由于$|\alpha|=1,\beta^T\alpha=0$

则$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha|\alpha|^2+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$,所以$\alpha$为矩阵对应特征值$\lambda_1=2$的特征向量;$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta|\beta|^2=\beta$,所以$\beta$为矩阵对应特征值$\lambda_2=1$的特征向量;而矩阵$A$的秩$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leqslant r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$,所以$\lambda_3=0$也是矩阵的一个特征值。故$f$在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$

技巧分析:第二问中化为标准形,并不只有上述一种方法,对于一些抽象矩阵,要理解标准形的性质,利用这些性质侧推,这对证明题很有用。平时多练习,才能把握所考知识点,临场不乱。

三、总结一下,赠送考生3个锦囊!

锦囊一:重视基础,大胆细心

考研数学注重对基础知识的掌握,所以复习的时候一定要把基础知识掌握牢固。基础题也很容易出错,所以在做题的过程中要细心,不然再简单,你做错了还是枉然!

锦囊二:多做真题和模拟题

真题和模拟题很重要,一定要多做,考过的知识点会反复考的。其实,数学难就难在知识点太多了,你不一定都能掌握,但是你如果知道了要考的知识点,有针对地突破,就很好办了。

锦囊三:提高做题速度

数学考试时间对于我来说总是不够,我相信对于大多数考生也是这样!所以一定要提高做题速度。提高做题速度的一个方法就是:掌握一些快速解题技巧,多做题,做到熟能生巧。

北京大学2013级城市与环境学院　姚亚飞

清华大学状元考研数学备战锦囊

一、复习心得

数学是理工经管类专业必考的公共课之一，除了某些专业选择考两门专业课而不考数学外，其他基本都需要考数学，考研总分是500分，其中政治和英语的满分都是100分，数学和专业课的满分都是150分，从分值上就可以看出，数学成绩是非常重要的，也是历届考生考研成绩存在最大差距的一门公共课，数学成绩的高低在很大程度上决定了考研的成败。一般数学都是国家统一出题，我们可以查到考点，买到历年真题，相对来说也是比较好复习的一门课，只要我们努力认真扎实地复习了，一般能考出好成绩。

我报考的专业是环境工程，我们考的是数学二，数学二包含两门科目，高等数学(78%)和线性代数(22%)。复习的第一步是选择一套合适的复习资料，考研数学并没有大家想象中的那么难，它不是数学竞赛，而是研究生入学考试，我选择的考研教材是同济大学的高等数学和线性代数，版本无所谓，内容基本没变，最好是用自己大学上课的教材，这样自己用的比较习惯，有亲切感，而且上面可能还有自己的笔记，能更好更快地理解各个知识点，进入备战状态。

选好了教材之后，接下来就是要有一个“扫盲”的过程，即对着考试大纲上面的考点，将整套教材全部看一遍，同时也要适当地看些例题，来加深对这些知识点的理解。每一个考点都必须认真复习，切记不要留下盲点，这个过程的时间可以自己把握，基础不同的同学可能花的时间也不一样，根据自己的实际情况来进行时间的把握。这是最基础的一步，无论是否报考研辅导班，都需要经历这个过程，也可以叫作初级复习阶段。

对于不报班的同学来说，当考点全部看完之后，接下来就是要培养我们对这些知识点的灵活运用的能力了，就是要掌握考研题型，将初级的基础知识升华到考研的层次上来。先梳理每一章的知识要点，然后根据每一个点来进行展开，针对历年考题中与这个知识点相关的一些考题，一定要十分注意，要吃透，融会贯通地理解考题的实质，因为很多考点都是每年必考，只是会换个形式而已，最好是做完例题，再要找一些类似的题目来巩固一下，确保自己对这个知识点真正地理解了。在整个过程中，我们需要准备一个笔记本，记录我们不会和不熟悉的考点，并把对应该考点的典型题目记录下来，这是我们的软肋，一定要反复强化记忆，否则他们将会成为我们的失分点。

而对于上考研辅导班的同学来说，最重要的是上课记笔记，有经验的老师会把重点的知识点、技巧、题型融会在课堂内容中，他们会在备课的过程博采各家之长。所以课堂上记笔记就显得尤为重要了，自己的笔记一定要反复看，切记把笔记丢在一边睡大觉，虽然你把重点记在本子上了，但它并没有进入你的大脑。同样例题也需要反复做，从而达到吃透笔记的效果，这样才能不浪费时间。不愿意反复看笔记也是我们在考研中常常遇到的一个问题，总以为抄了一遍，自己就记住了，其实不是，需要反复地强化训练。确实也有一些人，他们可能有些过目不

忘的能力，但是一般人而言，还是要反复地看，我们可以把笔记本随身携带，随时看，随时记。

接下来进入到做真题阶段。对于真题，我觉得应该是像正常考试一样，卡好时间，最好是与考试时间对应的时间点来做，一方面能训练我们的做题速度，另一方面能更好地把我们的兴奋点调到与考试时一致。做完真题，我们都要对答案，给自己判个分数，判分是对自己复习结果的一个量化展示，同时不要因为分数高而沾沾自喜，也不要因为分数低就妄自菲薄，一定要客观地对待这个分数，然后把真题中失分的题目好好地研究，在笔记本中做好记录，在后面的复习中反复强化，确保考试中不会再失分，你会发现我们的真题会越做越好，因为盲点都在被一一扫除。当我们做完了真题以后，千万不要以为万事大吉了，一定要做好最后的冲刺，那就是做模拟题。

做模拟题跟做真题一样，限时做完试题，然后自己批改，在这个过程中，刚开始可能会有点不适应，因为模拟题基本都是新题，所以需要一点时间来适应。做模拟题这个过程就是一个实战演练的过程，让我们提前适应考试的状态。我觉得无论真题做得好或者不好，最后的模拟题一定要做，这个过程也是对心态的一个训练，遇到之前没有做过的题目，该如何应对，非常重要。

在考研的过程中，我们也会迷茫和困惑甚至懈怠，在这个时候，不妨看看历届考研同学写的考研心得来鼓励自己，学习要抓紧时间，但同时要注意劳逸结合，在自己表现不错的时候，适当奖励一下自己，买点好吃的，看一部好看的电影等等。如果考研过程中能很好完成上述的几个过程，在考试过程中保持一个好的心态，那么一定会取得好成绩。

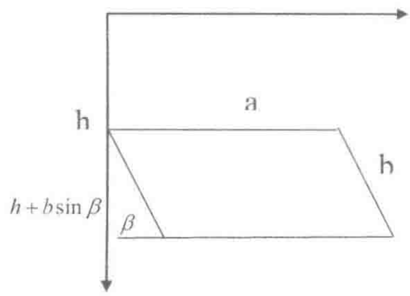
二、考试中的解题技巧

对于考试技巧，可能不同的人有不同的方法，我就简单说一下我自己的经验，一般拿到试卷，都按照题目顺序往下做，或者也可以根据自己平时做题的习惯（有人喜欢先做大题）。一般出题都是有一个难度梯度的，都是难度不断增加的一个过程，但是填空和选择题不一定完全按照这个顺序，很多时候最难的那个题不是最后的一个，而是倒数第二、三题，所以按照顺序做，一方面可以增加自己的信心（前面题目相对简单），如果你的选择题做到倒数第三个，你花了五分钟还是不会，那么就可以直接跳过往下做了，可以回头再来思考这个题目。还有就是打草稿一定要注意清楚，这样能方便我们后面有时间来检查自己的试卷。对于选择填空题，一定学会用图来解决问题，有的题目画图一眼就能看出答案，比计算来得更直接。能画图的题目一定要习惯性地在草稿纸上作图，进行分析，可以节省时间，提高效率。例如：

边长为 a 和 b 的矩形薄板与页面呈 β 角斜沉于液体中，长边平行于液面位于深 h 处，设 $a>b$，液体的比重为 γ，求薄板受到的液体压力。

这是一个典型的一元函数积分学的应用，遇到这个题目，我们首先要画出示意图，建立坐标系，为了方便，我们可以将坐标系的 X 轴铅直向下，其次，我们要迅速联想到物理学中关于物体在液体内部压力计算公式，从图中可以看出，一边长的深度为 h，另一边长的深度为 $h+b\sin\beta$，在 $[h,\ h+b\sin\beta]$ 中任取 $[x,x+\mathrm{d}x]$，相应的薄板上一小横条，长 a，宽 $\mathrm{d}x/\sin\beta$，遇事所受到的压力为 $\mathrm{d}P=\dfrac{\gamma xa}{\sin\beta}\mathrm{d}x$，则整块板受到的压力为：

$$P = \int_{h}^{h+b\sin\beta} \frac{a\gamma x}{\sin\beta} dx = ab\gamma(h + \frac{b\sin\beta}{2})$$



这种题目可能出现在选择或者填空题中,所以图文并用是一个比较好的解决问题的方法,能够快速准确地解决问题。

对于一些选项比较相似的选择题,我们可以根据选项的微小差异通过排除法加计算来快速解答。

如:设 $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\ dx, N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\ dx$, 则有( )

A. $M<1<N$. B. $M<N<1$. C. $N<1<M$ D. $1<M<N$.

对于这个题,我们对四个答案进行比较,发现 A,B 表示 M 是小于 1,C 和 D 则是 M 大于 1,我们可以先比较 M 与 1 的大小关系,就能排除掉其中的两个答案。

$\sin(\sin x)$, $\cos(\cos x)$ 均在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续,由 $\sin x \leqslant x$ 推出 $\sin(\sin x) \leqslant \sin x$ 且不恒等于 x, $(x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right])$,从而推出$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\ \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = 1$,即 $M < 1$,从而排除掉答案 C 和 D,然后我们只需要比较 N 和 1 的大小关系,$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\mathrm{d}x$ 将 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 带入得,$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)\mathrm{d}t > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \mathrm{d}t = 1$,从而 $N > 1$,因此答案选 A。

对于线性代数部分,其实是比较容易得分的地方,我们在复习时一定要对着考试大纲弄清楚每一个知识点,基本上考试拿满分是没有问题的。对于看起来无从下手的题目,例如涉及 n 次计算的题目,我们可以从一次二次,先算几个有限的次数,找找规律,例如已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}$求 A^n

看到这个题目,我们首先将这个矩阵进行分块,分块为$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$,则 $A^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$,$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$。则 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$,$B = 3E + J, J^3 = J^4 = \ldots = 0$,于是

$B^n = 3^n E + C_n^1 3^{n-1} J + C_n^2 3^{n-2} J^2$,

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}(3, -1), C^2 = 6C, \cdots, C^n = 6^{n-1}C$,

$$则\ A^n=\begin{bmatrix} 3^n & C_n^1 3^{n-1} & C_n^2\cdot 3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & C_n^1\cdot 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\cdot 6^{n-1} & -6^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -9\cdot 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1} \end{bmatrix}$$

而当我们遇到一些难题时，只要认真地思考学过的基本知识，就会有思路，例如 2010 年的考研真题的 21 题：

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{3}$.

证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。

看到这个题目，很多人可能就会有点不知道从哪儿下手，其实，很容易，仔细联想一下，一阶导数，连续，可导可能跟中值定理有关，我们就可以根据题干的意思来构造一个函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，这样构造函数，是根据已知条件 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{3}$，同时为了能与最后要证明的式子靠近，当两边同时求导数，就会出现我们要的结果。

对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上利用 $L-$ 中值定理，得 $\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right), F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi)$，

对于 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},0\right]$ 上利用 $L-$ 中值定理，得 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right), F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta)$

两式相加得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

三、赠送考生的 3 个锦囊

锦囊 1：给自己一个坚定的考研理由，找一个学习伙伴，做好破釜沉舟的准备。考研切记打酱油心态，一定要目标明确，不能三心二意，不要羡慕周围保研和找工作同学的生活，找一个跟自己目标一致的同学一起复习，互相鼓励，互相监督，效果还是很明显的。考研是一个自主性比较强的过程，不同于高考，因为所有的事情都由自己来安排，没有老师和家长的监督和跟踪。不能一边考研一边找工作，专心考完之后，再做下一步的打算，否则两者都会受到影响。

锦囊 2：数学一定要天天练习，一天不练很容易生疏才能，制订一个完善的复习计划，复习过程按照复习计划按部就班地进行，作息规律，只有静下心来复习，效率才会高。懈怠时，看一些励志的考研故事，当复习成果不错时，适当给自己一些奖励。

锦囊 3：考试过程中保持好心情和好心态。考试时用自己常用的文具，穿自己喜欢的衣服，这样一方面保持好心情，同时在遇到难题时，看着自己熟悉文具会有种亲切感，能帮助我们更好地面对难题。遇到不会的题思考一下，如果还是不会，可以暂时跳过，回头再来做，可能做后面的题目会给你一些灵感来帮助思考前面的问题。当遇到问题的时候，心里告诉自己你不会别人也未必会，然后静下心来认真思考，不能着急，人在着急的时候智商将严重降低，不利于解决问题。

清华大学环境学院（2013 级）研究生　赵云云

目　录

模拟试卷(一)

$f'(x)=0 \Rightarrow$ 极值

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则(C).

(A) x_0 必是函数 $f(x)$ 的驻点　　(B) $-x_0$ 必是函数 $-f(-x)$ 的最小值点

(C) $-x_0$ 必是函数 $-f(-x)$ 的极小值点　　(D) 对一切 x_0 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$

2. 如下图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$、$[2,3]$ 上图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$，则下列结论正确的是 (A) C.

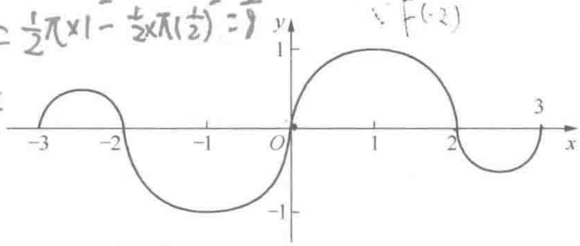
(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

$F(-3)=F(3)=\frac{1}{2}\pi\times1^2-\frac{1}{2}\times\pi(\frac{1}{2})^2=\frac{3\pi}{8}$

$F(2)=F(-2)=\frac{\pi}{2}$

$F(3)<F(2)$



3. 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$，$q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$，$n = 1,2,\cdots$，则下列命题正确的是 (B).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

4. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$，$y_2 = 2xe^{-x}$，$y_3 = 3e^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是 (B).

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$　　(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$　　(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是 (A).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关

$r(A)=n$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有(B).

~~(A)~~(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

~~(C)~~(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

7. 设二维随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为

m	-1	1	m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是(C).

(A) $X=Y$　　(B) $P\{X=Y\}=0$　　(C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{X=Y\}=1$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 不相关的充分必要条件为(B).

$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow \sigma(X)=\sigma(Y)$

(A) $E(X)=E(Y)$

(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$

(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 已知 $f(x)$ 是微分方程 $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 满足 $f(1)=0$ 的特解，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ $-\frac{\pi}{8}$.

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ 2.

11. 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_3=$ $\frac{2\pi}{3}$.

12. 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数 $z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ 0.

13. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为 2.

14. 设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布，$E(X_{ij})=2$，则行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(Y)=$ 0.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 11 分）

设 $\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geqslant 0)$. 点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为曲面 Σ 在点 P 处的切平面，$\mathrm{d}(x,y,z)$

平面π的方程:

$d(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$　$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2z}$

为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{z}{d(x,y,z)}\mathrm{d}S$. $=\iint\limits_D \frac{z}{2}\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2z}\,d\sigma$ $=\frac{1}{4}\iint\limits_D 4-x^2-y^2\,d\sigma=\frac{3}{2}\pi$

16. (本题满分 10 分)

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的立体. 旋转面方程: $x^2+y^2=2z$

$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dV=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV+\iiint z\,dV=\int_0^4 dz\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma+\int_0^4 z\,dz\iint$ $=\frac{256}{3}\pi$

17. (本题满分 10 分) 微积分的应用

某湖泊水量为 V，每年排入湖泊中内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖的水量为 $\frac{V}{3}$. 设 2010 年底湖中 A 的含量为 $5\,m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2011 年初开始，限定排入湖中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$，问至多经过多少年，湖中污染物 A 的含量降到 m_0 以内(设湖中 A 的浓度是均匀的)?

从2011年初开始，第t年湖中污染物含量为m，浓度为 $\frac{m}{V}$ 则在dt时间内流入含量为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\cdot dt$，流出为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt$ $\Rightarrow dm=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)dt \Rightarrow m=\frac{m_0}{2}+Ce^{-\frac{t}{3}}$ 将 $m(0)=5m_0$ 代入 $C=\frac{9}{2}m_0$ 将 $m=m_0$ 代入 $\Rightarrow t=6\ln 3$ 即至多经过…年

18. (本题满分 9 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

$-1<x<3$

$=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](x-1)^n$

19. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x) = A$ (A 为常数).

$=\int_{-a}^{a}f(x)g(x)=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx \overset{x=-t}{=} \int_a^0 f(-x)g(x)d(-x)+\int_0^a f(x)g(x)dx$ $=\int_0^a[f(-x)+f(x)]g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$

(Ⅰ) 证明 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\mathrm{d}x$.

$A=\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}$

20. (本题满分 11 分)

已知齐次线性方程组(Ⅰ) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$ 和(Ⅱ) $\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$ 同解，求 a,b,c 的值.

$A\ \ r(A)=2$ B

$|A|=0\Rightarrow a=2,\Rightarrow k[-1,-1,1]$ $\begin{cases}-1-b+c=0\\-2-b^2+c+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1,c=2\\b=0,c=1\ (舍去)\end{cases}$ 同解方程组 $r(A)=r(B)$

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = X^TAX = ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \quad (b>0)$，其中二次矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(Ⅰ)求 a,b 的值; $|\lambda E-A|=(\lambda-2)[(\lambda-a)(\lambda-2)-b^2]=0$ $\lambda=2\Rightarrow\begin{cases}2+\lambda_1+\lambda_2=1\\2\cdot\lambda_1\lambda_2=-12\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$ 代入 $[(\lambda-a)(\lambda-2)-b^2]=0 \Rightarrow a=1,\ b=2$ (利用…)

(Ⅱ)利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换对应的正交矩阵. 当 $\lambda=2$ 时. $\xi_1=[\quad]^T,\ \xi_2=[\quad]^T$

22. (本题满分 11 分)

两台同样自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动其中一台，当其发生故障时，停用而另一台自动开动.

试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差.

$f(x)=\begin{cases}5e^{-5x} & x\geq 0\\ 0 & 其他\end{cases}$ $f(t)=\int_0^t f(x)f(t-x)dx=\begin{cases}25te^{-5t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$

$E(T_i)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5}$ $D(T_i)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{25}$ $E(T)=E(T_1+T_2)=\frac{2}{5}$

$D(T)=D(T_1+T_2)=\frac{2}{25}$