"十三五"普通高等教育本科规划教材

（上册）

高等数学

李香玲　孙宏凯　主　编
武小云　张　新　张建梅　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

"十三五"普通高等教育本科规划教材

（上册）

高等数学

主　编　李香玲　孙宏凯
副主编　武小云　张　新　张建梅
参　编　李彦红　景海斌　李彩娟　刘丽莉　孙志田
主　审　赵春兰

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育本科规划教材。

全书分上、下两册，上册内容包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程。本书注重知识点的引入方法，对部分内容进行了调整，体系结构严谨，讲解透彻，内容难度适宜，语言通俗易懂，例题、习题具有丰富性与层次性，拓展阅读使读者学习知识的同时拓宽了视野，欣赏到数学之美。

本书可作为普通高等院校理工类（非数学专业）及经管类相关专业教材，可供成教学院或专升本的专科院校学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册 / 李香玲，孙宏凯主编．—北京：中国电力出版社，2018.5

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-5198-0836-5

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…　②孙…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 030352 号

出版发行：中国电力出版社
地　　址：北京市东城区北京站西街 19 号（邮政编码 100005）
网　　址：http://www.cepp.sgcc.com.cn
责任编辑：孙　静（010-63412542）曹　慧
责任校对：李　楠
装帧设计：张　娟
责任印制：吴　迪

印　　刷：北京雁林吉兆印刷有限公司
版　　次：2018 年 5 月第一版
印　　次：2018 年 5 月北京第一次印刷
开　　本：787 毫米×1092 毫米　16 开本
印　　张：18
字　　数：434 千字
定　　价：45.00 元

前 言

高等数学的主要内容为微积分，微积分是有关运动和变化的数学，它是人类最伟大的成就之一。它对解决数学、物理学、工程科学、经济学、管理学、社会学和生物学等各领域问题具有强大威力。高等数学已经成为全世界理工类本科各专业普遍开设的一门公共基础必修课程，在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用。随着科学技术的发展对高等数学课程产生了新的需求，也由于教育部提出在全国提倡精品课建设、大力推动高等教育教学质量的提高，适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变，为满足一些高等院校新的教学形势，针对当前学生知识结构和习惯特点，根据我们多年的教学经验，在多次研讨和反复实践的基础上，编写了这部高等数学课程的教材。

本书认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，参考近几年国内出版的一些优秀教材，结合编者多年的教学实践经验，本着以学生为中心、为学生服务的思想编写。全书以严谨的知识体系，通俗易懂的语言，丰富的例题、习题，深入浅出地讲解高等数学的知识，培养学生分析问题解决问题的能力。

全书分上、下两册。上册内容包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。书内各节后均配有相应的习题，同时每章还配有综合练习，书末附有习题的参考答案及附录。

本书有以下几个主要特色：

（1）目标明确。高等数学课程的根本目的是帮助学生为进入工程各领域从事实际工作做准备，所以在满足教学基本要求的前提下，淡化理论推导过程，加强训练，强化应用，力求满足物理学、力学及各专业后继课程的数学需要。在第一章中没有介绍映射的内容，直接通过实例给出函数的定义，同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程，既简明易懂，又解决了课时少内容多的矛盾。同时，本书经过精心设计与编选，配备了相当丰富的例题、习题，目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质，掌握重要的解题方法和应用技巧。

（2）注重与新课标下的中学教材衔接。中学教材中三角函数内容的弱化为高等数学的教学带来不便，本书在第一章第一节对以上内容重点做了补充。平面极坐标与参数方程是积分中经常用到的重要内容，因此，在第一章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系，附录一给出了一些常用曲线的极坐标和参数方程，为后面的学习奠定了一定的基础。

（3）每章增加了本章导读，为学生自学时了解本章概况有一定的意义。每章后附有拓展阅读，可以开阔学生视野，让学生欣赏数学之美。

（4）注重理论联系实际，增加了数学在工程技术上应用的例子，培养学生解决实际问题的能力，注重渗透数学建模思想。

（5）注重渗透现代化教学思想及手段，将部分习题答案做成二维码扫描，让学生借助网络可以参考。

（6）带“*”号的章节可供不同学时、不同专业选用。

（7）本书编写了配套的辅导书《高等数学同步学习指导》，拓宽学生知识的广度与深度，对考研和参加数学竞赛的学生会有一定的帮助。

本书上册由李香玲、孙宏凯担任主编，武小云、张新、张建梅担任副主编。参加编写的还有李彦红、景海斌、李彩娟、刘丽莉、孙志田。具体分工如下：第一章由李彦红、景海斌编写；第二章由李彩娟编写；第三章由武小云编写；第四章由李香玲编写；第五章由张新、刘丽莉编写；第六章由孙志田、张建梅编写。附录一由孙宏凯编写，附录二由武小云、张新编写。

本书下册由孙宏凯、李香玲担任主编，冀凯、王玉兰、麻振华担任副主编。参加编写的还有闫常丽、赵书银、张洪亮。具体分工如下：第七章由孙宏凯、闫常丽编写；第八章由麻振华编写；第九章、第十章主体内容由王玉兰编写，第九章拓展阅读及第九章、第十章习题简答由赵书银编写，第十章拓展阅读由张洪亮编写；第十一章由冀凯编写；附录由孙宏凯、闫常丽编写。全书由张家口学院教授赵春兰主审。

本书在编写过程中得到了河北建筑工程学院数理系的领导、老师的大力支持，在此表示诚挚的谢意！参考了书后所列的参考文献，对参考文献的作者在此一并表示感谢！

虽然编者力求本书通俗易懂，简明流畅，便于教学，但由于水平与学识有限，虽再三审校，书中疏漏与错误之处在所难免，敬请读者多提宝贵意见并不吝赐教，我们将万分感激。本书将不断改进与完善，突出自己的特色，更好地服务于教学。

编　者

2018 年 5 月

目录

第一章 极限与连续

[本章导读]

集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性. 集合论的基础是由德国数学家康托尔（Cantor，1845—1918）在19世纪70年代奠定的. 经过一大批卓越的数学家半个世纪的努力，到20世纪20年代，已确立了集合论在现代数学理论体系中的基础地位. 可以说，当今数学各个分支的几乎所有结果都构筑在严格的集合理论上. 所以，学习现代数学，应该从集合入手.

自然界中没有绝对静止或绝对孤立的事物，函数能准确地刻画出各事物或各因素之间的相依关系，它提供了进行数量研究的方法. 公元1837年，德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805—1859）提出了现今通用的函数定义，使函数关系更加明确. 函数是现代数学的基本概念之一.

极限是微积分理论中的一个最基本、最重要的概念. 19世纪以前，人们用朴素的极限思想计算了圆的面积. 19世纪之后，柯西（Cauchy，1789—1857）以物体运动为背景，结合几何直观，引入了极限概念. 后来，魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）给出了形式化的数学语言描述. 极限概念奠定了微积分学的基础. 极限方法是微积分的基本分析方法，它是研究函数性质的有力工具，以后的微积分概念都将借助于极限来描述. 连续是函数的一个重要性态，连续函数是微积分研究的主要对象.

本章首先通过回顾集合、一元函数、基本初等函数的概念和性质，引入邻域、复合函数、分段函数及初等函数的概念；其次给出数列极限与函数极限的概念、性质及运算法则；接着讨论无穷小量与无穷大量的概念、无穷小量的比较，以及极限存在准则和两个重要极限；最后介绍连续函数的概念及其性质. 函数、极限与函数连续性是本章的主要内容，将为后面内容的学习打下必要的基础.

第一节 预备知识

一、集合、区间和邻域

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的一个概念，我们把具有某种特定性质的事物的全体称为集合（set），集合中的事物称为该集合的元素（element）. 设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 一个集合，如果其元素的个数是有限的，则称为有限集，否则就称为无限集. 不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

习惯上用 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合，$\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数的集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，$\mathbf{Q}$

表示全体有理数的集合，$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合，$\mathbf{C}$ 表示全体复数的集合．显然，$\mathbf{N}^{+}\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$．

设 A、B 是两个集合，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$．此时 A 与 B 的元素完全相同，实际上是同一个集合．

2. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种．

设 A、B 是两个集合，由 A 与 B 的全部元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集（简称并）（union），记作 $A\bigcup B$；由 A 与 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交）（intersection），记作 $A\bigcap B$；由属于 A 但不属于 B 的一切元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差）（difference set），记作 $A\backslash B$．通常在讨论一个问题时，所涉及的集合总是某个最大集合 I 的子集，此时称 I 为全集（universal set）．

如果 $A\subset I$，则称集合

$$I\setminus A=\{x|x\in I\text{且}x\notin A\}$$

为集合 A 关于全集 I 的余集或补集（complement），记作 A_I^C．在不会发生混淆的前提下，通常也简称为 A 的余集或补集，记作 A^C．关于集合的并、交、余及其联合运算，有下列规律：

（1）交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$；

（2）结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$，$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$；

（3）分配律：$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$，$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$；

（4）对偶律（De Morgan 公式）：$(A\bigcup B)^C=A^C\bigcap B^C$，$(A\bigcap B)^C=A^C\bigcup B^C$．

3. 区间和邻域

在高等数学中，经常用到的实数集 $\mathbf{R}$ 的子集有区间和邻域两种类型．

设 a 和 b 都是实数且 $a<b$，称数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 为开区间（open interval），记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

类似地有 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间（closed interval），$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$、$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ ］称为半开半闭区间．其中，a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度．

以上这几类区间的长度是有限的，称为有限区间．此外还有无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\},\quad(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},\quad(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\}.$$

上述这几类区间都称为无限区间．有限区间和无限区间统称为区间（interval）．

数的图像是数轴上的点；反过来，数轴上的点的坐标又是数．这样，实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点就建立了一一对应关系，所以数与点以后不加区别．

邻域（neighborhood）是一种常用的集合．设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

其中，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径（见图 1-1）．当不需要注明邻域半径时，也

简记作$U(a)$.

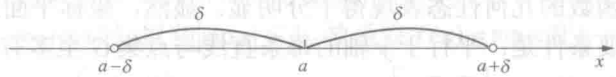

图 1-1

如果把邻域的中心去掉，所得的集合称为点a的δ去心邻域，记作$\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，把开区间$(a-\delta,a)$称为a的左δ去心邻域，把开区间$(a,a+\delta)$称为a的右δ去心邻域.

二、一元函数

（一）概念

定义　设非空数集$D\subset \mathbf{R}$，若存在某种对应法则f，使得对于数集D中的任意实数x，按照法则f都有唯一确定的实数y与之对应，则称f是定义在集合D上的函数（function），记作

$$f:D\to \mathbf{R},$$

$$f:x\mapsto y=f(x),\ x\in D.$$

当$x_0\in D$时，与x_0对应的数值y_0称为函数f在点$x=x_0$处的函数值，记作$y_0=f(x_0)$或$y_0=y|_{x=x_0}$．其中，x称为自变量（independent variable），y称为因变量（dependent variable），数集D称为函数f的定义域（definition domain），记作D_f．全体函数值的集合$\{y \mid y=f(x),$ $x\in D\}$称为函数f的值域（range），记作$f(D)$，即

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}\subset \mathbf{R}.$$

关于函数定义的几点说明：

（1）记号f和$f(x)$的含义是有区别的，前者表示自变量x和因变量y之间的对应法则，而后者表示与自变量x对应的函数值．但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在D上的函数，这时应理解为由它所确定的函数f.

（2）函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域.

（3）函数定义包含两个要素：对应法则和定义域．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．如$y=2x$与$s=2t$表示相同的函数，与所用字母符号无关.

（4）在函数定义中，并没有表明对应法则非得用公式来表达不可．也就是说，变量间有没有函数关系，在于有没有对应法则，而不在于有没有公式．所以，具体表示一个函数时，可以用解析法（或称公式法）、图示法、表格法，甚至用语言描述等.

设函数$y=f(x),x\in D$，则坐标平面上的点集

$$G(f)=\{(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 f 的图像（graph）.

函数的图像能将函数的几何性态表现得十分明显．显然，坐标平面上一个点集 G 是某个函数的图像的充分必要条件是：平行于 y 轴的每条直线与点集 G 至多有一个交点.

下面举几个函数的例子.

例 1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$. 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$.

例 2 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$. 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$．它的图形如图 1-2 所示．对任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$.

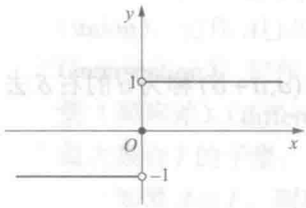

图1-2

例 3 取整函数.

设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$．函数 $y=[x]$ 称为取整函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\mathbf{Z}$．例如，$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$．取整函数的图像如图 1-3 所示.

例 4 定义在 $[0,1]$ 上的黎曼（Riemann）函数

$$R(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{当} x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbf{N}^+, \dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}\right)\text{时}, \\ 0, \text{当} x=0,1 \text{和} (0,1) \text{内的无理数时}. \end{cases}$$

如以上示例所示，有些函数在定义域的不同部分，对应法则由不同的算式表示的函数称为**分段函数**（**piecewise defined function**）．注意：分段表示的函数是一个函数，而不是两个函数.

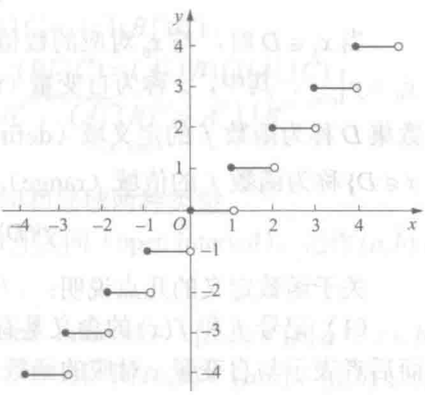

图 1-3

（二）函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$．如果存在正数 M（或 L），使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant M$（或 $f(x)\geqslant L$），则称 $f(x)$ 为数集 X 上的有上（下）界函数，亦称函数 $f(x)$ 在数集 X 上有上（下）界，M（或 L）是它的一个上（下）界；否则，称 $f(x)$ 为数集 X 上的无上（下）界函数.

显然，如果函数 $f(x)$ 在数集 D 上有上（下）界，则它必有无限多个上（下）界.

由定义可得，$f(x)$ 为 X 上的无上（下）界函数，即对于任意 M（或 L），存在 $x_0\in X$，有 $f(x_0)>M$（或 $f(x_0)<L$）.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$．如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界（bounded）；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界（unbounded）．函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何正数 M，总存在 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$.

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，通常可记作 $f(x)\in B[a,b]$.

定理 1 函数 $f(x)$ 在数集 $\boldsymbol{D}$ 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上既有上界又有下界.

例如，因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的. 又如函数 $f(x)=\tan x$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是无界的，但它在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上是有界的. 由此例可以看出，函数 $f(x)$ 在数集 X 上的有界性，不仅与函数 $f(x)$ 本身有关，而且与所给的数集 X 有关.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（减少）的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数（monotonic function）.

由定义可以看出，函数 $f(x)$ 在区间 I 上的单调性不仅与函数 $f(x)$ 本身有关，而且与所给的区间 I 有关. 例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数（even function）；如果有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数（odd function）. 不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数. 从几何上看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称.

例如，$y=x^2$、$y=\cos x$ 都是偶函数，$y=x^3$、$y=\sin x$ 都是奇函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

例如，函数 $y=x^n(n\in\mathbf{N}^+)$，当 n 为奇数时为奇函数，当 n 为偶数时为偶函数，这正是奇函数与偶函数名称的由来.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数（periodic function），T 称为 $f(x)$ 的周期.

从几何上看，周期函数的值每隔一个周期都是相同的. 所以，描绘周期函数的图像时，只要作出一个周期的图像，然后将此图像一个周期一个周期向左、右平移，即得整个函数的图像.

周期函数有无穷多个周期. 若在周期函数 $f(x)$ 的无穷多个周期中，存在最小的正周期 T，通常将这个最小正周期 T 称为函数 $f(x)$ 的基本周期，简称为周期.

例如，“非负小数部分”函数 $y=(x)=x-[x]$，$x\in\mathbf{R}$ 是周期为 1 的周期函数（见图 1-4）.

注意，并不是每一个周期函数都有基本周期.

例如，狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

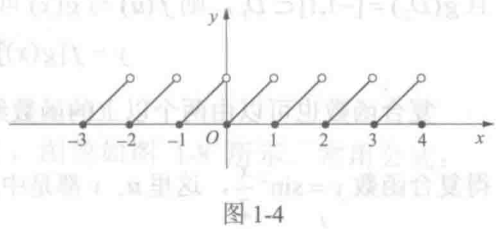

图 1-4

任何正有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期，但它没有基本周期.

事实上，因为有理数之和为有理数，无理数与有理数之和为无理数，所以 $D(x\pm r)=D(x)$.注意到有理数的稠密性，即知 $D(x)$ 没有基本周期.

（三）反函数与复合函数

1．反函数（inverse function）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $A=f(D)$．若对于每个 $y\in A$，有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，这样由对应法则 f 确定了从 A 到 D 的一种新的对应法则 f^{-1}，称 f^{-1} 为函数 f 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in A$．其定义域为 A，值域为 D．

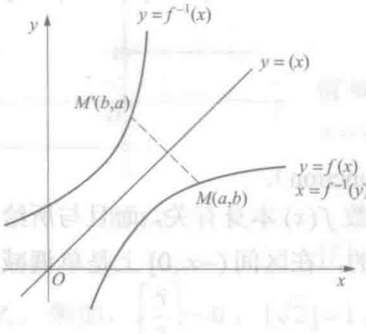

图 1-5

由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量．一般地，我们用 $y=f^{-1}(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的反函数．

从几何上看，在同一坐标平面上，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是相同的．所不同的仅仅是 $y=f(x)$ 的自变量是 x，而 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量是 y，这样观察反函数的曲线时，就要沿着 y 轴去看．若将函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，这时 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-5）．

定理 2 若函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上单调增加（单调减少），则函数 $y=f(x)$ 存在反函数，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(D)$ 上也单调增加（单调减少）．

定理 2 的条件是充分的，但不必要．例如，设函数（见图 1-6）

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}.$$

显然，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是一一对应的，存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, 0\leqslant y<1\\ 3-y, 1\leqslant y\leqslant 2\end{cases}.$$

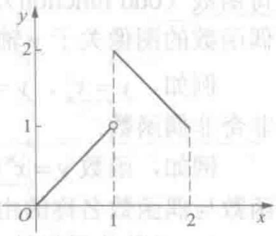

图 1-6

但 $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上不是单调函数.

2．复合函数（composite function）

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D_2 上有定义且 $g(D_2)\subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x\in D_2$$

称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_2，变量 u 称为中间变量．用 $f\circ g$ 来记这个复合函数，即对每个 $x\in D_2$，有 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$．

例如，$y=f(u)=u^2$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,+\infty)$，$u=g(x)=\sin x$ 的定义域为 $D_2=(-\infty,+\infty)$，且 $g(D_2)=[-1,1]\subset D_1$，则 $f(u)$ 与 $g(x)$ 可构成复合函数

$$y=f[g(x)]=\sin^2 x, x\in(-\infty,+\infty).$$

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成．例如，$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sin^2\dfrac{x}{2}$，这里 u、v 都是中间变量．