普通高等教育“十三五”规划教材

非线性发展方程及其孤立波解

FEIXIANXING FAZHANFANGCHENG JIQI GULIBO JIE

郭玉翠 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

非线性发展方程及其孤立波解

郭玉翠　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书主要研究有孤立波解的非线性发展方程的各种求解方法，如反散射变换方法、Bäcklund 变换方法、Darboux 变换方法、相似约化方法、Hirota 双线性方法以及若干种函数变换方法等。此外还介绍了有物理背景的非线性偏微分方程孤立波解形成的机理和非线性偏微分方程可积性的一些知识。本书可以作为应用数学、应用物理以及与非线性科学相关研究方向研究生的教材或参考书，也可作为高年级大学生、从事非线性科学研究的科研人员和教师的学习和科研参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性发展方程及其孤立波解 / 郭玉翠编著. -- 北京 : 北京邮电大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5635-5311-2

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①孤立子—非线性方程—发展方程—数值计算 Ⅳ. ①O175.26 ②O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 263800 号

书　　　名：非线性发展方程及其孤立波解
著作责任者：郭玉翠　编著
责 任 编 辑：刘　颖
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发　行　部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　　张：17.75
字　　　数：440 千字
版　　　次：2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5311-2　　　　定　价：39.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

序

本书是研究非线性偏微分方程(又称非线性发展方程或非线性数学物理方程)解法和理论的入门书，可供应用数学、应用物理以及非线性科学相关方向的研究生作为教科书和参考书，也可供从事非线性科学研究的科研人员和教师朋友作为参考用书。本书特别强调概念清楚、推导严谨、说理透彻、逻辑性强。非线性偏微分方程研究的热潮兴起于20世纪60年代，至今只有四五十年的发展时间，相应于数学的其他分支，可谓是非常年轻的学科。虽然国内外已经有一批很好的著作出版，但其中有些起点偏高，初学者不容易看懂。同时又因为非线性偏微分方程的研究属于交叉学科，物理学家、数学家和工程学科的科学家们都在研究和关注这个问题，但他们的角度不同，有些著作专业倾向性很强，初学者理解起来非常有难度。本书的目标是具有大学数学、大学物理基础的人可以看懂。本书在附录中尽可能简明地介绍一些辅助学习的内容，以帮助读者更好地理解正文内容。

在编写本书的过程中，作者对自己的要求是尽量使已有理论系统和完整，目的是使这个方向的初学者在入门时不要感到无从下手和为某一个基本概念而多次跑图书馆查找各种资料——这些都是作者和研究生们亲身经历过的。这里尽我们的努力把已有结果整理出来，与大家分享。在这里先向我所有引用资料的作者致谢和致敬，其中包括许多国外的作者。书中也包括本书作者和研究生的一些工作以及北京邮电大学其他教授和研究生的部分工作，在这里谨向他们，特别是我的历届研究生表示谢意。书稿的大部分内容作为北京邮电大学研究生学位课程“应用偏微分方程”的教材，已经使用过十余年，感谢选学这门课程的历届研究生同学，是他们的热情和求知欲激励我在这个领域不断探索，努力实践，立志为这些初入此道的学子们写一本他们需要的书。初衷和愿望是好的，时间和心血也花费了，但是由于本人水平有限，不足乃至错误可能还是存在，希望读者朋友不吝赐教，以使本书更加完善。

本书的研究对象是非线性偏微分方程，由于这些偏微分方程来源于物理和一些分支学科，具有鲜明的物理意义，因此又称为非线性数学物理方程，其中含有广义时间变量的又称为非线性发展方程。大家知道，数学物理方程就是物理学中的数学方程，包括代数方程、函数方程、常微分方程、偏微分方程、积分方程、微分积分方程、差分方程等。通常在大学里开设的数学物理方程（或称数学物理方法）研究线性偏微分方程及其解法，本书的重点是研究有物理背景的非线性偏微分方程的解法及相关理论。

含有时空变量的非线性偏微分方程（或称非线性发展方程）的数学形式通常可以表示为

$$P(x,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0$$

其中，$u=u(x,t)$是系统的目标物理量，即未知函数；x表示空间坐标，有时可能是二维(x,y)、三维(x, y, z)甚至是多维$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的；t是时间坐标（有时在建立数学模型时，经过了坐标变换，因此可能是广义的时间坐标）。u_x，u_t，u_{xx}，u_{tt}分别表示对坐标x和t的一阶和二阶偏导数。所谓非线性偏微分方程，是指在偏微分方程中含有未知函数和（或）未知函数导数的高次项，而不能写成如下线性形式（以两个自变量的二阶线性微分方程为例）

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=f(x,y)$$

的偏微分方程，目前引入的有物理意义的非线性偏微分方程有百余种，典型且具有代表性的有 KdV 方程

$$u_t+uu_x-\mu u_{xxx}=0$$

Sine-Gordon 方程

$$u_{xx}-u_{tt}=\sin u$$

非线性 Schrodinger 方程

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+\beta u|u|^2=0$$

等等。这些方程的形式虽然简单，但是本质却与线性微分方程有很大的不同，比如，对于线性方程而言的解的唯一性、单值性、有界性和解的叠加原理等性质，对非线性方程均可能不复存在。因此，非线性方程不存在一般理论和求解方法。但有许多非线性偏微分方程都具有一类很有意义的解——孤立波解。

非线性发展方程本身的物理背景和孤立波解的特殊性质使非线性发展方

程的求解和孤立波理论作为非线性科学的一个分支，成为当前科学发展的前沿和热点问题。

一个系统，如果输出与输入不成正比，则它就是非线性的。例如，弹簧的受力伸长（产生位移），当位移较小时，力与位移成正比，力与位移的关系为线性关系，即 Hooke 定律 $F=kx$，当位移很大时，胡克定律失效，弹簧变为非线性振子；又如单摆，仅当其角位移很小时，其行为才是线性的；而一个介电晶体，当其输入光强不再与输出光强成正比时，就成为非线性介电晶体。实际上，自然科学或社会科学几乎所有的已知系统，当输入足够大时，都是非线性的。因此，非线性系统远比线性系统多得多。可以说，客观世界本来就是非线性的，线性只是一种近似。描述这些非线性系统行为的方程就可能是非线性偏微分方程。认识、研究并且利用非线性现象是科学发展的必然。计算机的发展使许多过去人工不可能解决的一些问题得以解决，因此，从某种意义上说，非线性科学也是伴随着计算机科学的发展而发展起来的。

本书主要研究非线性发展方程的解法、孤立子理论及其应用。

数学上把具有下列性质的非线性偏微分方程的解称为孤立波解：

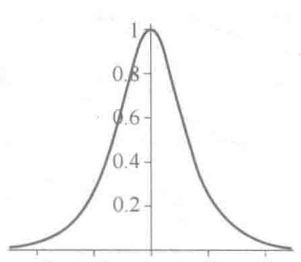
(1) 向单方向传播的行波，即形式为 $\varphi(x-at)$ 或 $\psi(x+at)$ 的解；

(2) 分布在空间的一个小区域内，即 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u\to 0$（有时是 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_x\to 0$ 及 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_{xx}\to 0$ 等）；

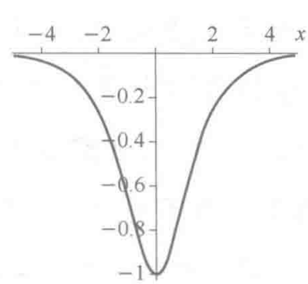
(3) 波的形状不随时间演变而发生变化；

(4) 孤立波之间的相互作用具有类似粒子一样的弹性碰撞（一般又将具有这一性质的孤立波叫孤立子）。

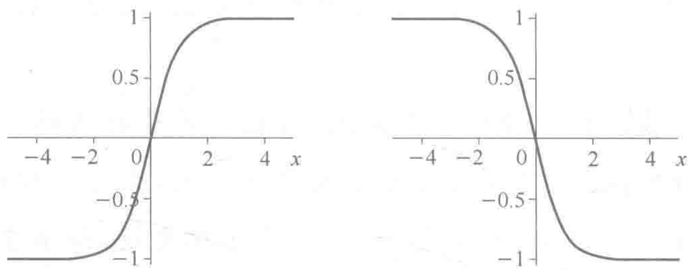
常见的孤立波有以下四种：钟型〔图(a)〕、反钟型〔图(b)〕、扭结型〔图(c)〕和反扭结型〔图(d)〕。



(a)



(b)



(c) (d)

用数学方法研究实际问题的基本步骤如下：首先将实际问题简化，形成物理模型；然后将物理模型定量化，即建立数学模型——非线性偏微分方程；再后便是求解这个偏微分方程，找出满足偏微分方程，有时还需满足某些特定条件的解；最后是对所得结果进行分析，用来解释自然现象和指导实践，即解决实际问题。

从物理模型到数学模型大致要经过以下步骤：(1)建立空间和时间坐标系，不同的问题选用不同的坐标系；(2)选择表征所研究物理过程的一个或几个物理量及其坐标，这是非常重要的一步，有时表征物理量的选择就是建立一门新学科的起点；(3)找出(包括假设、猜想和运用已有)有关物理过程遵循的定律，即物理公理，这是问题的难点，所以在大学数学物理方程(法)中建立数学模型时，只是涉及了一些简单的物理过程，通过它们来讲述将物理模型进行定量化处理的一般方法。对于复杂的物理过程，只是写出数学模型，不加推导。在本书中，我们将更加注重物理模型到数学模型的推导，因为研究数学物理问题，不能抛开物理图像去单纯考虑数学问题，物理图像和几何图像常常扮演简单明了而又能深刻认识数学问题的钥匙的角色。

一旦将物理模型建成数学模型后，就是寻求合适的方法来求解这个非线性偏微分方程，这是本书研究的重点。随着科学的不断发展，非线性偏微分方程的求解受到越来越多的重视，从天文学、物理学、力学、地球科学到生命科学和各类工程技术科学领域都出现大量的非线性偏微分方程。尤其是在物理学的各个分支领域，如流体力学、非线性光学、等离子体理论和量子场论中遇到非线性偏微分方程，有很多都有孤立波形式的解。19 世纪 30 年代英国科学家 J. S. Russel 最先注意到水波中的非线性现象。20 世纪 60 年代以来，非线性科学得到了飞速发展，在非线性偏微分方程的求解方面也取得了许多成果。本书将较

详细地讨论其中一些重要和典型的方法。由于非线性数学物理方程本身的复杂性，其求解没有一般的方法，各种方法的基本思想都是通过变换或分解，将复杂的方程简化。这些变换和分解的形式是多种多样的，有时需要从数学上和物理上加以猜想和试探。各种猜想和试探本身也许并不具有普遍意义，但每种猜想和试探的思想却具有普遍意义，在这里数学技巧和物理直观将尽可能得到完美体现。

非线性偏微分方程作为学科，发展的时间不长，但涉及的内容非常广泛，由于作者水平有限，不足乃至错误在所难免，再次肯请各位师友和读者赐教。

郭玉翠

前　言

2008 年 3 月由清华大学出版社出版的《非线性偏微分方程引论》首次与读者见面。近十年来，非线性科学在发展中确立了自己的科学地位，作为研究非线性偏微分方程及其孤立波解经典理论和方法的《非线性偏微分方程引论》仍然不可多得。当然我们必须顾及学科的最新发展，于是在北京邮电大学研究生院“2016 年研究生教育教学改革与研究项目”的支持下，由北京邮电大学出版社出版本书的新版本，书名改为《非线性发展方程及其孤立波解》。本书与清华大学出版社出版的《非线性偏微分方程引论》的不同之处在于：

(1) 根据非线性偏微分方程各种解法的使用和发展情况，我们将清华大学出版社版《非线性偏微分方程引论》中的第 6 章第 2 节“Darboux 变换方法”和第 6 章第 1 节“Hirota 双线性方法”在增加了新的内容之后，分别单独成章为“第 4 章 Darboux 变换”和“第 6 章 Hirota 双线性方法”，除了讲述两种方法的基本应用之外，还讲述了它们的拓展应用。

(2) 在本书的“第 7 章 特殊变换方法”中，增加了“Wronskian 行列式法”一节，因为求解孤子方程解析 n 孤子解时，Wronskian 行列式法克服了双线性方法和反散射变换方法在行列式微分求导时的难题，可以直接验证解。因此成为应用广泛且十分高效的求解非线性偏微分方程的方法。

(3) 删除了清华大学出版社出版的《非线性偏微分方程引论》中“群的概念及其在微分方程中的应用简介”一节，因为我们虽然在“相似约化”方法中应用了群的表示方法，但并未涉及群的概念与原理，即原来的这部分内容与其他内容联系不大，为了节省篇幅，在本书中删除了这部分内容。

(4) 将清华大学出版社出版的《非线性偏微分方程引论》中的“第 4 章 可积性与 Painlevé 性质”和“第 5 章 相似变换与相似解”合并为现在的“第 5 章 Painlevé 性质与相似约化”，使得结构更加紧凑，便于两项内容联系性地理解。

清华大学出版社出版的《非线性偏微分方程引论》一直在北京邮电大学研究生学位课“应用非线性偏微分方程”的课上作为教材使用，选修这门课的同学

们为本书修订内容的选定做出了积极的贡献，这里特别感谢杜仲、管乐阳、马腾腾、王晓坡、陈寅楠等同学。特别感谢北京邮电大学刘文军副教授对本书修订提出的宝贵意见和建议。

“深入浅出，使学生感到不难学”一直是笔者在教学过程中和教材编写中所追求的朴素目标。为了达成这一目标，对内容透彻地理解，然后用逻辑性的结构形式和语言形式把它们表示出来就成了本书的重要目标，但由于本人水平有限，可能还存在很多暂未发现的瑕疵，欢迎各位同行、读者批评指正。

郭玉翠

目　录

第1章　典型方程及其孤立波解

“非线性偏微分方程”研究作为数学模型描述出现在物理学、化学、信息科学、生命科学、空间科学、地理科学和环境科学等领域中的非线性偏微分方程的解法以及解的性质等问题，是非线性科学的重要组成部分。“非线性偏微分方程”所用方法和手段是“数学”的，因此常被称为“非线性数学物理方程或非线性发展方程”。是学科交叉性、融合性很强的一门学科。

关于非线性偏微分方程的研究在19世纪末已经开始，但由于其本身的复杂性，似乎每一个方程都有各自不同的解法，很难有共同的方法和技术来求解，所以被认为是一种个性极强，很难处理的问题。这种局面发生根本性的变化是从20世纪60年代开始的。这时发现了许多不同的偏微分方程有某些共同的性质，有共同的求解方法和性质相似的解。这就使得“非线性偏微分方程”成为研究非线性现象共性的一门新兴的交叉学科。今天，非线性偏微分方程的研究已经渗透到自然科学、工程科学、数学和社会科学的几乎每个学科门类。

目前发现的具有物理意义的非线性偏微分方程有几百种，大量新的非线性偏微分方程还在不断地从各个学科中涌现。这些方程大致分为两类：一类是可积和弱不可积的系统，这些方程都具有一些比较好的性质，比如可以用反散射法(IST)求解，具有孤立波和类孤立波解，存在Bäcklund变换、Darboux变换、Hirota双线性形式、Painlevé性质和无穷多守恒律等，其中孤立波形式的解由于得到广泛应用而备受关注；另一类是不可积系统，都存在一定的耗散结构，其解可能出现混沌现象。本书主要研究第一类方程，而本章介绍几种典型方程和它们的孤立波形式的解。

1.1　历史回顾

孤立子(Soliton)是具有弹性散射性质的孤立波(Solitary Wave)，起源于英国著名科学家、造船工程师John Scott Russel在运河河道中观察到的奇特现象。1844年9月，Russel在英国科学促进协会第十四届会议(Fourteenth Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science)上以“论波动”(On Waves)为题所作的报告中谈到自己的一次不寻常的发现，他描述道：

“I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses. When the boat suddenly stopped, not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour. preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation."

"我正在观察一条船的运动,这条船由两匹马拉着,沿着狭窄的河道迅速前进着,突然船停了下来,河道内被船体带动的水团并不停止,它们积聚在船头周围激烈地扰动着。然后水浪呈现一个滚圆而又平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰,它以很快的速度向前滚动,急速地离开了船头。在行进中它们的形状和速度并没有明显改变。我骑在马上紧跟着观察,它以每小时八九英里(1 英里=1.609 344 千米)的速度滚滚向前,并保持长约 3 英尺(1 英尺=0.304 8 米),高 1~1.5 英尺的原始形状。渐渐地它的高度下降了,当我跟踪 1~2 英里后,它终于消失在逶迤的河道之中。这就是我在 1834 年 8 月第一次偶然遇见的奇特而美丽的景象。"

Russel 当时认识到他所发现的孤立的耸起的水峰不是通常的水波。通常的水波一部分在水面之上,另一部分在水面之下。而孤立波清清楚楚地是一个完整的全部位于水面之上的波。孤立波也不同于那种在波前有奇异性的冲击波。因为它具有滚圆而光滑的波形。即孤立波处处正则,没有奇异性。此外,它与任何一种由通常的平面波组成的波包都不相同。这是由于它实际上表现为流体力学的一个稳定解。尽管 Russel 对孤立波的研究有很多真知灼见,但在当时科学界并未产生太大影响,因为没有建立具有说服力的数学模型。

直到 60 多年后的 1895 年,荷兰著名数学家 D. Korteweg 和他的学生 G. de Vries 研究浅水波的运动,在长波近似和小振幅的假定下,求得了单向运动的浅水波运动方程,即著名的 KdV 方程

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{2}\eta^2+\frac{\sigma}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) \tag{1.1.1}$$

其中,$\eta=\eta(x,t)$是高于平衡水平面的波峰高度,x 是平衡水面上沿波传播方向上的坐标,t 表示时间,l 为水深,g 为重力加速度,α 是与液体均匀运动有关的常数,σ 是由

$$\sigma=\frac{1}{3}l^3-\frac{Tl}{\rho g}$$

定义的常数,T 是毛细现象的表面张力,ρ 是流体的密度。

作数学变换 $t'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\sigma}}t$, $x'=-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}x$, $u=\pm\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{3}\alpha$, 通过运算,并去掉变量上的"′"号,得到

$$u_t\pm 6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.1.2}$$

这就是 KdV 方程的一般形式。

Korteweg 和 de Vries 从方程(1.1.1)或方程(1.1.2)中求出了具有形状不变的脉冲状孤立波解(如图 1.1.1),与 Russel 所发现的孤立波现象一致。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct+x_0)\right] \tag{1.1.3}$$

其中,$c>0$ 为孤立波的传播速度,与波动本身的性质有关(与波动有关的一些概念和性质见附录 C),x_0 为任意常数。

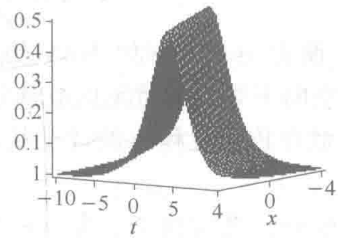


图 1.1.1

从式(1.1.3)可见,孤立波的传播速度 c 与振幅成正比,所以较大的孤立波比较小的孤立波运动得快。如果较小的孤立波在前,较大的孤立波在后,那么后者必将赶上前者。两个孤立波就不可避免地发生重叠或碰撞。当时的问题是:孤立波是不是稳定的波?两个孤立波相互碰撞的结果将会怎样呢?是否变形?这些问题长期没能得到解决。有人认为孤立波是非线性波(非线性偏微分方程的解),它们的重叠不会像线性波那样,是简单的位移相加,碰撞后两个孤立波的形状很可能会遭到破坏,甚至会四分五裂,支离破碎。另外一个问题是:除了流体力学外,其他领域还有没有孤立波?

1952 年,Enrico Fermi(原子弹之父)领导的科学家小组(John Pasta and Stan Ulam)用数值方法计算了用非线性弹簧联结的 64 个质点组成的弦(称为谐振子)的振动,其目的是从数值实验上验证统计力学中的能量均分定理。他们对少数质点进行激发,按照能量均分定理,由于弱的非线性相互作用,经过较长时间以后,初始的激发能量应该涨落均衡地分布到每个质点上。然而计算结果令人意外,发现经过几万周期的长时间实验后,几乎全部能量又回到初始分布状态,即绝大部分能量又集中到原先那几个初态能量不为零的谐振子上。这个结果预示着非线性系统可能出现孤立波。这就是著名的 FPU 实验。后来 Toda 考虑晶体的非线性振动,近似模拟这种情况,终于得到孤立波解。从而使 FPU 实验问题得到正确解答。因此可以设想其他领域也可能存在孤立波。

1965 年美国 Princeton(普林斯顿)大学两位应用数学家 M. D. Kruskal 和 N. Zabusky 通过数值模拟方法深入研究了等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程,得到了孤立波在碰撞后保持其波形和速度不变这一重要结果。于是彻底解除了从前对孤立波稳定性的怀疑。

Kruskal 和 Zabusky 根据孤立波具有类似于粒子碰撞后的弹性性质,将其称为孤立子(Soliton)。此后,科学家对孤立子的研究兴趣和热情便一发不可收。迄今为止,在许多科学领域发现了孤立子运动形态。如激光在介质中的自聚焦,等离子体中的声波和电磁波,液晶体中畴壁的运动,流体中的涡旋,晶体的位错,超导体中的磁通量,神经系统中信号的传递等。还应当指出,推动孤立子研究的重要原因之一是孤立子在大容量、高速度的光纤通信中得到的应用。有的实验室(如美国新泽西州贝尔实验室)早在 20 世纪末就使用孤立波来改进信号传输系统,提高其传输率。因为人工产生的光脉冲型孤立子具有在传输中不损失波形,不改变速度,保真度高,保密性好等特点。从那时起,光孤子通信已经发展成为一个学科。

在数学上,孤立子理论的进展体现在发现了一大批具有孤立子解的非线性偏微分方程,而且已经逐渐建立起较为系统的数学和物理的偏微分方程与孤立子理论,其主要内容概括