

**Linear  
Algebra  
and  
Its  
Applications**  
Fifth Edition

**线性代数及其应用**  
(原书第5版)

[美] 戴维·C. 雷 史蒂文·R. 雷 朱迪·J. 麦克唐纳 著  
(David C. Lay) (Steven R. Lay) (Judi J. McDonald)

刘深泉 张万芹 陈玉珍 包乐娥 陆博 译



机械工业出版社  
China Machine Press

Linear  
Algebra  
and  
Its  
Applications

Fifth Edition

线性代数及其应用

(原书第5版)

[美] 戴维·C. 雷 史蒂文·R. 雷 朱迪·J. 麦克唐纳 著  
(David C. Lay) (Steven R. Lay) (Judi J. McDonald)

刘深泉 张万芹 陈玉珍 包乐娥 陆博 译



机械工业出版社  
China Machine Press

## 图书在版编目 ( CIP ) 数据

线性代数及其应用 (原书第 5 版) / (美) 戴维·C. 雷 (David C. Lay) 等著; 刘深泉等译.  
—北京: 机械工业出版社, 2018. 6 (2018.10 重印)

(华章数学译丛)

书名原文: Linear Algebra and Its Applications, Fifth Edition

ISBN 978-7-111-60257-6

I. 线… II. ①戴… ②刘… III. 线性代数 - 高等学校 - 教材 IV. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 127612 号

本书版权登记号: 图字 01-2016-7275

Authorized translation from the English language edition, entitled *Linear Algebra and Its Applications, Fifth Edition*, 978-0-321-98238-4 by David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2016, 2012, 2006.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

Chinese simplified language edition published by China Machine Press Copyright © 2018.

本书中文简体字版由 Pearson Education (培生教育出版集团) 授权机械工业出版社在中华人民共和国境内 (不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区) 独家出版发行。未经出版者书面许可, 不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

线性代数是处理矩阵和向量空间的数学分支, 在现代科学的各个领域都有应用。本书是一本优秀的现代教材, 给出线性代数基本介绍和一些有趣应用, 目的是帮助学生掌握线性代数的基本概念及应用技巧, 为后续课程的学习和工作实践奠定基础。主要内容包括线性方程组、矩阵代数、行列式、向量空间、特征值与特征向量、正交性和最小二乘法、对称矩阵和二次型、向量空间的几何学等。此外, 本书包含大量的练习题、习题、例题等, 便于读者参考。

本书内容深入浅出, 论述清晰, 适合作为高等院校理工科线性代数课程的教材, 还可作为相关研究人员的参考书。

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 迟振春

责任校对: 殷虹

印刷: 北京诚信伟业印刷有限公司

版次: 2018 年 10 月第 1 版第 2 次印刷

开本: 186mm × 240mm 1/16

印张: 35.25

书号: ISBN 978-7-111-60257-6

定价: 79.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzjsj@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光/邹晓东

# 译者序

线性代数的应用范围覆盖自然科学和社会科学的各个方面,在处理高维问题时,向量空间和矩阵运算更是这些学科的理论基础和基本工具.在计算机和经济管理等学科,线性代数的重要性远远超过微积分.在学习传统线性代数课程时,大学生经常遇到学习抽象理论和应用矩阵方法的矛盾.在今天深化改革开放的环境下,大学生更应该了解线性代数课程的世界发展趋势和新的教学进展.

David C. Lay 的教材《Linear Algebra and Its Applications》开创了学习和应用线性代数的新局面.首先,教材面向世界著名大学的优秀本科生,内容以矩阵运算和线性空间为主线,覆盖线性代数的基本理论和典型方法,创新习题要求借助数学软件完成.其次,教材内容满足不同学科应用线性代数的需要,理论深度超过国内几乎所有线性代数教材.不仅方便读者整体了解线性代数的知识体系和新的应用,而且各章节内容相对独立,教师教学时可以根据学时需要自由选择内容.

英文第 3 版自 2005 年翻译出版以来,深受读者欢迎.很多教师将中文版作为线性代数的本科教材,也有读者将其作为学习线性代数的参考书.第 5 版的翻译修订工作由华南理工大学的刘深泉教授以及河南科技学院的张万芹、陈玉珍、包东娥、陆博老师完成.限于译者水平,书中难免存在不足之处,敬请各位同行批评指正,期望和读者一起推动线性代数课程的发展.

刘深泉

2018 年 3 月 6 日

# 前 言

学生和教师对本书前四个版本的反响十分令人满意. 第 5 版在第 4 版的基础上为课程教学和软件技术应用提供了更多支持. 像以前一样, 本书给出最新的线性代数基本介绍和一些有趣应用, 使得已完成大学两个学期数学课程(如学完微积分)的学生容易接受.

本书的主要目的是帮助学生掌握以后课程学习所需要的基本概念和基本技能. 教材的主题是根据“线性代数课程研究小组”的建议选择的, 该建议基于认真分析学生的实际需要和许多不同专业使用线性代数知识的共同点而提出. 希望这门课能够成为本科生最有用和最有趣的数学课程之一.

## 新增内容

本版的主要目的是修订习题, 进行技术上的改进, 并为概念的学习提供更多支持.

1) 对第 5 版的支持是由 MyMathLab 提供的. MyMathLab 是世界领先的数学在线资源, 以灵活、易于使用的格式将交互式作业、评估和媒体整合在一起. 学生在线提交作业, 获得即时反馈、支持和评估. 这个系统对计算技能特别有效. 许多额外的资源也是由 MyMathLab 网站提供的.

2) 第 5 版提供了交互式电子格式文本, 使用由 Wolfram 提供的一个免费数学播放器 CDF, 学生可以看到交互式图形, 可以通过查看数值例子用矩阵进行实验, 只需点一下按钮. 通过这些交互式图形, 线性代数的几何结构变得生动起来. 通过实验鼓励学生做出猜想, 然后通过相关理论和证明, 验证他们的观察是正确的. 交互资源让学生有机会去接触数学对象和思想, 就像做研究一样. Wolfram CDF 播放器也能在课堂演示中使用.

3) 第 5 版提供了对概念学习和证明学习的额外支持, 增加了概念练习题及其解答, 现在大多数章节都有一个证明或概念的例子供学生复习. 额外的指导也被加入书中一些定理的证明中.

4) 超过 25% 的习题是新增或修改的, 尤其是计算习题. 习题的设置仍然是这本书最具特色的内容之一, 并且新习题保持着与前四版一样的高标准. 精选的习题用于复习每个章节所学的内容, 激发学生的学习兴趣, 开拓新的思路, 培养他们的自信心.

## 鲜明的特色

### 提前介绍重要概念

本书前 7 章介绍了许多建立在  $\mathbb{R}^n$  上的线性代数基本概念, 然后从不同的观点逐步深入讨论. 接

下来,用第1章给出的熟悉思想的自然扩展来泛化这些概念.我们认为,本教材的主要特色是全书的难度一样.

### 矩阵乘法的现代观点

好的记号是关键,且教材反映了科学家和工程师实际应用线性代数的方式.本书在定义和证明中处理的是矩阵的列,而不是矩阵的元素,核心课题是将矩阵向量乘积  $Ax$  作为关于  $A$  的列的一个线性组合.这种现代方法简化了许多论述,且将向量空间思想和线性方程组的研究联系在一起.

### 线性变换

用线性变换作为线索贯穿整本教材,增强了本书的几何趣味.例如,在第1章,线性变换给出一个动态的、几何观点下的矩阵向量乘法.

### 特征值和动力系统

特征值的概念出现在第5章和第7章.由于这一内容分散在数周的教学,学生会比平常更容易吸收和复习这些关键概念.特征值来源并应用于离散动力系统和连续动力系统,相关内容出现在1.10节、4.8节、4.9节和第5章的五节中.在授课时可以选择不讲授第4章,而是在讲完2.8节和2.9节的内容以后直接进入第5章的学习.这两节可选的学习内容给出了第4章中出现的向量空间的概念,为第5章的学习奠定了基础.

### 正交性和最小二乘法

与普通入门教材相比,本书对这些主题的讨论更全面.“线性代数课程研究小组”强调需要正交性和最小二乘问题的内容,这是由于正交性在计算机计算和线性代数的数值计算中起着重要作用,且实际工作中经常会出现不相容的线性方程组.

## 教学的特色

### 应用

广泛选取的应用说明了线性代数的作用,线性代数可以用于在工程学、计算机科学、数学、物理学、生物学、经济学和统计学中解释基本原理和简化计算.一些应用出现在单独的章节中,其他的应用是作为例题和习题而引入的.此外,每一章的开头给出一个线性代数应用的简短介绍,由此引出数学理论的发展.然后,在该章结束的部分又回到开始提到的应用.

### 重点强调几何特点

由于许多学生更容易接受形象化的概念,所以对书中的每个主要概念都给出几何解释.本书包含较多的几何图形,且一些图形是以前的线性代数教材中没有出现过的.这些图形的交互版本出现在本书的电子版中.

## 例题

与大多数线性代数教材相比，本书有更多的例题，比平常课堂上更多。由于例题清晰，步骤详细，因此学生可以自学。

## 定理和证明

重要的结果以定理的形式给出，其他有用的事实放在方框中，便于参考。大多数定理有正式证明，写法易于理解。在少数情形中，仔细选取的例题证明中展示了基本计算过程。一些常规的验证保留在习题中，这对学生是有益的。

## 练习题

在习题之前有几个仔细选取的练习题，其解答在习题之后给出。这些练习题或者集中于习题中的潜在难点，或者给出做习题前的热身，且解答常包含有用的提示。

## 习题

提供的大量习题包含平常的计算题和需要深入思考的概念题，一些习题针对多年来我们在学生作业中发现的概念难点。每一个习题都按照课本中内容的顺序仔细排列，这样当每节的一部分内容讲授之后，就可以安排家庭作业。习题的一个显著特色是数值计算不复杂，问题很快被“展开”，学生在数值计算上花费时间很少，习题主要是为了让学生理解教学内容而不是进行机械计算。

标有符号[M]的习题说明该题需要借助“矩阵软件”（计算机软件，如 MATLAB、Maple、Mathematica、MathCad、Derive，或者有矩阵功能的可编程计算器，如那些由德州仪器制造的仪器）完成。

## 判断题

为鼓励学生阅读全部课本内容且深入思考，本书设计了 300 道简单的判断题，出现在 33 节内容之中，并放在计算题之后。可以通过阅读课本内容来回答这些问题，从而使学生可以准备好回答随后的概念题。学生在习惯了仔细阅读课本内容之后，会喜欢这类题目。基于课堂测验以及与学生进行探讨，我们决定不将答案放在课本中。（学习指导将指出在哪里有奇数号习题的答案。）补充的 150 道判断题（大部分在每章末尾）用于检验学生对内容的理解程度。对大部分这类问题，教材中提供了简单的正确/错误回答，但是省略了答案的验证（通常需要进一步思考才可完成）。

## 写作题

写出严谨的数学论述，不仅对那些希望成为数学系研究生的学生，而且对所有学习线性代数的学生都十分必要。本书包含的证明大多是习题答案的一部分。需要简短证明的概念题，常包含可以帮助学生开始解题的提示。对所有奇数的写作题，或者在课本的后面给出解答或提示，或者在后面描述的“学习指导”（Study Guide）中给出解答。

## 计算主题

本书强调计算机对科学和工程中线性代数的发展和实践的影响，书中有许多“数值计算的注解”指出数值计算中出现的问题，以及理论概念（如矩阵求逆）和计算机实现（如 LU 分解）之间的区别。

## 网上支持<sup>Ⓔ</sup>

网站 [www.pearsonhighered.com/lay](http://www.pearsonhighered.com/lay) 包含了学习本课程所需要的支持材料。

### MyMathLab——在线作业和资源

MyMathLab ([www.mymathlab.com](http://www.mymathlab.com)) 包含用数以百计的算法生成的练习，这些练习反映在书中。

### 交互式教科书

第 5 版提供了交互式电子格式的文本，可使用由 Wolfram ([www.wolfram.com/player](http://www.wolfram.com/player)) 提供的一个免费数学播放器 CDF 查阅。

## 复习资料

对学生而言，网站提供的复习资料和练习试卷（附答案）能帮助他们有效地复习书中的要点。它们直接来自于近年来我们所教授的课程。每份复习资料给出了教材指定部分中重要的定义、定理和计算技巧。

## 各章应用

网站包含的 7 个案例研究扩展了每章开始所介绍的主题，增加了现实世界的的数据，提供了进一步探索的机会。另外，20 多个应用项目或者扩展了教材中的主题，或者介绍了新的应用，例如立方体样条、飞机航线、运动比赛中的优势矩阵以及纠错码。一些新的数学应用是积分方法、多项式根的求解、圆锥曲线、二次曲面和二元函数的极值。线性代数的数值计算主题，如条件数、矩阵因式分解和求特征值的 QR 方法，也包含在内。在每个项目中都编有涉及大数据集的习题（因此需要使用计算机软件来求解）。

## 软件入门

如果课程中需要使用 MATLAB、Maple、Mathematica 或者 TI 计算器，可以参考网站上对软件使用的介绍。另外，“学习指导”中也为第一次接触上述软件的用户提供了详细说明。

Ⓔ 关于本书教辅资源，只有使用本书作为教材的教师才可以申请，需要的教师请联系机械工业出版社华章公司，电话 136 0115 6823，邮箱 [wanguang@hzbook.com](mailto:wanguang@hzbook.com)。——编辑注



## 数据文件

对教材中的 900 道数值计算题、案例研究和应用项目，网站上提供了数百个相应的数据文件。这些数据以多种格式存储，分别用于 MATLAB、Maple、Mathematica 以及 TI 计算器。对一道特定的题目，学生只需通过少量的键盘操作就可以得到矩阵和向量，从而减少了输入数据的错误，并可节省做作业的时间。这些数据文件可以从 [www.pearsonhighered.com/lay](http://www.pearsonhighered.com/lay) 和 MyMathLab 下载使用。

## 项目

对 Mathematica、Maple 和 MATLAB，探究性项目引导学生去发现线性代数中基础的数学与数值问题。它们是由有经验的教员编写的。这些项目探究的是有关基本概念，如列空间、对角化和正交投影；一些项目重点讨论数值计算问题，比如浮点计算、迭代法和 SVD；还有一些项目探究应用，如拉格朗日插值与马尔可夫链。

## 在线章节

### 第 9 章 最优化

介绍性实例 柏林空运

9.1 矩阵对策

9.2 线性规划——几何法

9.3 线性规划——单纯形法

9.4 二元性

### 第 10 章 有限态马尔可夫链

介绍性实例 Google 马尔可夫链

10.1 讲解与示范

10.2 稳态向量和 Google PageRank

10.3 通信类

10.4 状态分类和周期性

10.5 基本矩阵

10.6 马尔可夫链和棒球统计

## 补充内容

### 学习指导

平装本的“学习指导”低价即可得到，这个指导也是该课程不可或缺的一部分。它给出每第三个奇数习题的详细解答，用以帮助学生检查作业。它还为“奇数习题答案”中包含“提示”的写作题提供了完整答案。多次出现的“警告”用于提醒学生易犯的的错误以及如何避免出错。MATLAB 框中介绍了一些需要使用的命令。“学习指导”的附录内包含 Maple、Mathematica 和 TI 计算器的对照信息 (ISBN: 0-321-98257-6)。

### 教师版

为方便教师，这个特殊版本包含所有习题的简单答案，课本开始在“给教师的注释”中给出了有关课程内容设计和组织的解释，以帮助教师安排课程。该版本还提供了专为教师准备的

其他支持材料 (ISBN: 0-321-98261-4) .

## 致谢

### David C. Lay 的致谢

我真诚地感谢多年来以各种方式帮助我的许多人。

感谢 Israel Gohberg 和 Robert Ellis 长达 15 年的线性代数合作研究, 他们帮助我形成了线性代数的观点. 与 David Carlson、Charles Johnson 和 Duane Porter 一起在“线性代数课程研究小组”工作是我的荣幸, 在几个重要方面, 他们关于线性代数教学的思想影响着本教材.

最后, 感谢三位好朋友——出版商 Greg Tobin、以前的编辑 Laurie Rosatone 和现在的编辑 William Hoffman, 他们几乎从一开始就给予了明智的建议和鼓励, 真诚地感谢他们.

### Steven R. Lay 和 Judi J. McDonald 的致谢

很高兴能参与 David C. Lay 教授的《线性代数及其应用》第 5 版的编写工作. 在这一版的修订过程中, 我们尽力保持学生和教师所熟悉的之前版本的叙述方法和写作风格.

我们诚挚地感谢以下审稿人, 感谢他们细致入微的分析和创新性建议: 马里兰大学的 Kasso A. Okoudjou, 加州大学伯克利分校的 Falberto Grünbaum, 加州大学圣克鲁兹分校的 Ed Migliore, 得克萨斯南方大学的 Maurice E. Ekwo, 得克萨斯大学奥斯汀分校的 M. Cristina Caputo, 纽约大学的 Esteban G. Tabak, 西北大学的 John M. Alongi, 波士顿大学的 Martina Chirilus-Bruckner.

感谢温思罗普大学的 Thomas Polaski 对在线章节第 10 章的贡献.

感谢提供技术支持的专家, 是他们不辞劳苦地为第 5 版准备数据、给教师编写笔记、在“学习指导”中为学生编写技术笔记、将他们的项目和大家一起分享, 他们是: 泰勒大学的 Jeremy Case (MATLAB), 南卡罗来纳大学的 Douglas Meade (Maple), 西方浸信会学院的 Michael Miller (TI 计算器), 卡罗尔学院的 Marie Vanisko (Mathematica) .

感谢 Eric Schulz 在交互式电子书的制作中分享了他的专业技术知识和专业教育知识, 他对我们的帮助和鼓励是无价的.

感谢 Kristina Evans 和 Phil Oslin 对本书在线作业开发提供的专业技术帮助. 感谢对在线作业进行课堂测试的下列人员: Joan Saniuk, Robert Pierce, Doron Lubinsky, Adriana Corinaldesi. 还要感谢加州大学圣芭芭拉分校、阿尔伯塔大学、佐治亚理工大学对 MyMathLab 课程的反馈.

感谢由 Roger Lipsett、Paul Lorzak、Tom Wegleitner 和 Jennifer Blue 提供的数学支持, 他们对书中计算的准确性进行了仔细的校对.

最后, 我们由衷地感谢 Pearson Education 的工作人员在第 5 版的制作中的帮助: 组稿编辑 Kerri Consalvo, 媒体编辑 Jonathan Wooding, 销售执行经理 Jeff Weidenaar, 项目经理 Tatiana Anacki, 销售助理 Brooke Smith, 编辑助理 Salena Casha. 特别感谢现在的编辑 William Hoffman, 他在我们参与这本优秀的书籍修订工作中给予了极大的耐心和鼓励.

# 给学生的注释

这是一门最有趣、最有价值的大学数学课程。事实上，一些学生在毕业以后告诉我们他们在大公司的工作或工程研究生院的学习中还使用本教材作为参考书。下面的注释给出一些建议和**信息**，有助于你掌握课本内容并且从中得到乐趣。

在线性代数中，概念和计算同样重要。每个习题集开始的简单数值练习仅仅帮助你检查对基本步骤的理解。以后，虽然计算机将进行数值计算，但你必须选取计算方法，知道如何解释结果，并且向其他人解释结果。由于这个原因，课本中的许多习题要求你解释或验证计算。书面解释经常是习题答案的一部分，对奇数习题，会有一个期望的解释或者好的提示。在独立写出答案之前应尽量避免查阅这些答案，否则，你会认为你已理解实际上并不懂的问题。

为掌握线性代数的概念，你必须仔细地反复阅读本书。新的术语用**黑体**标示，有时写在定义框中。书的最后给出一个术语表，便于参考。重要的命题以定理的形式给出或放在方框中。最好阅读一下前言中对本书结构的介绍，以对课程的框架有初步的理解。

实际上，线性代数是一种语言，必须用学习外语的方法每天学习这种语言。理解每一节的内容并不容易，除非你已透彻地学习教材且全部做出该节前面的练习，跟上课程的进度会帮助你节约很多时间和解决很多困惑！

## 数值计算的注解

希望你阅读课本中的“数值计算的注解”，即使你现在没有在学习过程中使用计算机或图形计算器。在实际生活中，线性代数的大多数应用涉及一定数值误差限制下的数值计算，即使误差相当小。“数值计算的注解”会指出你以后工作中使用线性代数的潜在困难，如果现在学习了这些注释，你以后就会容易记起这些内容。

如果你对“数值计算的注解”有兴趣，以后可以学习一门线性代数的数值计算课程。由于对计算机处理能力的更高需求，计算机科学家和数学家需要给出更快、更可靠的线性代数的数值算法，电子工程师需要设计出更快、更小的计算机去运行这些算法。这是一个令人激动的领域，线性代数的第一堂课有助于你做好准备。

## 学习指导

为帮助你成功学习这门课程，我们写了一本配合本书的“学习指导”([www.mypearsonstore.com](http://www.mypearsonstore.com); 0-321-98257-6)，从 MyMathLab 可以得到电子版。它不仅有助于你学习线性代数，而且说明

了如何学习数学.

“学习指导”包含每第三个奇数习题的详细解答, 以及课本答案中仅有提示的奇数写作题的附加答案. 需要注意的是, 之所以将“学习指导”与教材分开, 是因为你必须在没有太多的帮助下独立完成作业. 多年的经验告诉我们, 太容易查到教材后面的解答会妨碍学生数学能力的开发. “学习指导”还给出常见错误的警告、重点习题的有用提示和潜在考试题.

“学习指导”还介绍了如何使用 MATLAB、Maple、Mathematica 和 TI 图形计算器, 使用这些技术可以节约完成作业的时间. “学习指导”是你的“实验手册”, 解释了如何使用这些矩阵程序. 你可以从 [www.pearsonhighered.com/lay](http://www.pearsonhighered.com/lay) 下载课本中 850 多道习题的数据. (几次点击, 便可以在屏幕上显示斜体数值计算作业的结果.) 可以用特殊的矩阵命令进行计算!

前几周的学习会培养出整个学期的学习习惯, 并影响到学习效果. 请先阅读“如何学习线性代数”. 许多学生认为这些建议很有帮助, 希望你也有同感.

## 关于作者

David C. Lay 在奥罗拉大学（伊利诺伊州）获得学士学位，在加利福尼亚大学洛杉矶分校获得硕士和博士学位。自 1966 年以来，Lay 一直从事数学研究和数学教育工作，大部分时间是在马里兰大学帕克学院工作。他还是阿姆斯特丹大学、阿姆斯特丹自由大学和德国凯泽斯劳滕大学的访问教授。在泛函分析和线性代数方面，他已经发表的论文超过 30 篇。

作为美国 NSF 资助项目“线性代数课程研究小组”的核心成员，目前，Lay 是线性代数课程现代化的领导者。此外，他还是几本数学教材的合著者，包括与 Angus E. Taylor 合著的《Introduction to Functional Analysis》、与 L. J. Goldstein 和 D. I. Schneider 合著的《Calculus and Its Applications》，以及与 D. Carlson、C. R. Johnson 和 A. D. Porter 合著的《Linear Algebra Gems—Assets for Undergraduate Mathematics》。

作为顶尖的教育家，Lay 教授获得过四所大学的杰出教学奖，包括 1996 年获得马里兰大学著名学者-教师称号。1994 年，他获得美国数学联盟授予的著名大学数学教学奖。他被大学生选为 Alpha-Lambda-Delta 国家荣誉专家协会和国家金钥匙荣誉协会的成员。1989 年，奥罗拉大学授予他杰出校友荣誉。Lay 是美国数学学会、加拿大数学学会、国际线性代数协会、美国数学联盟、Sigma Xi 以及美国工业和应用数学学会会员。自 1992 年以来，他成为多届数学科学基督联盟全国委员会成员。

Steven R. Lay 在加州大学洛杉矶分校获得数学硕士和博士学位后，于 1971 年在奥罗拉大学（伊利诺伊州）开始了他的教学生涯。由于在日本当传教士，所以他的职业生涯中断了八年。1998 年回到美国后，他加入了李大学（田纳西州）数学系，此后一直在那里从事教学工作。从那时起，他一直为他的哥哥 David 改进和扩展这本著名的线性代数教材提供帮助，包括撰写第 8 章和第 9 章的大部分内容。Steven 还写了三本大学本科数学教科书：《Convex Sets and Their Applications》《Analysis with an Introduction to Proof》《Principles of Algebra》。

1985 年，Steven 获得了奥罗拉大学的卓越教学奖。Steven、David 和他们的父亲 Clark Lay 博士都是杰出的数学家，1989 年他们共同获得了母校奥罗拉大学的杰出校友奖。2006 年，Steven 荣获李大学的优秀奖。他是美国数学学会会员。

Judi J. McDonald 与 David 紧密合作后在第 4 版加入了作者团队。她拥有阿尔伯塔大学的数学学士学位以及威斯康星大学的硕士和博士学位。她目前是华盛顿州立大学的教授。她还开展数学课外项目——数学中心 (<http://mathcentral.uregina.ca/>)，并且热衷于数学教育和研究，在线性代数研究期刊上发表了 35 篇出版物。

Judi 获得了三项教学奖：里贾纳大学的启发式教学奖、托马斯卢茨艺术学院的启发式教学奖以及华盛顿州立大学的科学教学奖。她一直活跃在国际线性代数协会和妇女数学协会，同时也是加拿大数学学会、美国数学学会、美国数学联盟以及美国工业和应用数学学会的会员。

# 目 录

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 译者序                     |     |
| 前言                      |     |
| 给学生的注释                  |     |
| 关于作者                    |     |
| 第 1 章 线性代数中的线性方程组       | 1   |
| 介绍性实例 经济学与工程中的线性模型      | 1   |
| 1.1 线性方程组               | 2   |
| 1.2 行化简与阶梯形矩阵           | 12  |
| 1.3 向量方程                | 23  |
| 1.4 矩阵方程 $Ax = b$       | 34  |
| 1.5 线性方程组的解集            | 42  |
| 1.6 线性方程组的应用            | 49  |
| 1.7 线性无关                | 55  |
| 1.8 线性变换介绍              | 62  |
| 1.9 线性变换的矩阵             | 71  |
| 1.10 商业、科学和工程中的线性模型     | 81  |
| 补充习题                    | 90  |
| 第 2 章 矩阵代数              | 93  |
| 介绍性实例 飞机设计中的计算机模型       | 93  |
| 2.1 矩阵运算                | 94  |
| 2.2 矩阵的逆                | 103 |
| 2.3 可逆矩阵的特征             | 112 |
| 2.4 分块矩阵                | 117 |
| 2.5 矩阵因式分解              | 123 |
| 2.6 列昂惕夫投入产出模型          | 132 |
| 2.7 计算机图形学中的应用          | 137 |
| 2.8 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 | 145 |
| 2.9 维数与秩                | 153 |
| 补充习题                    | 160 |
| 第 3 章 行列式               | 162 |
| 介绍性实例 随机过程和畸变           | 162 |
| 3.1 行列式介绍               | 163 |
| 3.2 行列式的性质              | 168 |
| 3.3 克拉默法则、体积和线性变换       | 176 |
| 补充习题                    | 184 |
| 第 4 章 向量空间              | 187 |
| 介绍性实例 空间飞行与控制系统         | 187 |
| 4.1 向量空间与子空间            | 188 |
| 4.2 零空间、列空间和线性变换        | 197 |
| 4.3 线性无关集和基             | 206 |
| 4.4 坐标系                 | 214 |
| 4.5 向量空间的维数             | 223 |
| 4.6 秩                   | 229 |
| 4.7 基的变换                | 236 |
| 4.8 差分方程中的应用            | 242 |
| 4.9 马尔可夫链中的应用           | 251 |
| 补充习题                    | 260 |
| 第 5 章 特征值与特征向量          | 263 |
| 介绍性实例 动力系统与斑点猫头鹰        | 263 |
| 5.1 特征向量与特征值            | 264 |
| 5.2 特征方程                | 271 |
| 5.3 对角化                 | 278 |
| 5.4 特征向量与线性变换           | 285 |
| 5.5 复特征值                | 292 |
| 5.6 离散动力系统              | 298 |
| 5.7 微分方程中的应用            | 307 |
| 5.8 特征值的迭代估计            | 315 |

|                      |     |                  |     |
|----------------------|-----|------------------|-----|
| 补充习题                 | 321 | 7.3 条件优化         | 404 |
| 第 6 章 正交性和最小二乘法      | 325 | 7.4 奇异值分解        | 411 |
| 介绍性实例 北美地质资料和 GPS 导航 | 325 | 7.5 图像处理和统计学中的应用 | 421 |
| 6.1 内积、长度和正交性        | 326 | 补充习题             | 428 |
| 6.2 正交集              | 334 | 第 8 章 向量空间的几何学   | 430 |
| 6.3 正交投影             | 343 | 介绍性实例 柏拉图多面体     | 430 |
| 6.4 格拉姆-施密特方法        | 350 | 8.1 仿射组合         | 431 |
| 6.5 最小二乘问题           | 356 | 8.2 仿射无关性        | 438 |
| 6.6 线性模型中的应用         | 365 | 8.3 凸组合          | 448 |
| 6.7 内积空间             | 373 | 8.4 超平面          | 454 |
| 6.8 内积空间的应用          | 381 | 8.5 多面体          | 462 |
| 补充习题                 | 387 | 8.6 曲线与曲面        | 474 |
| 第 7 章 对称矩阵和二次型       | 390 | 附录 A 简化阶梯形矩阵的唯一性 | 485 |
| 介绍性实例 多波段的图像处理       | 390 | 附录 B 复数          | 486 |
| 7.1 对称矩阵的对角化         | 391 | 术语表              | 491 |
| 7.2 二次型              | 397 | 奇数习题答案           | 506 |

# 第 1 章 线性代数中的线性方程组

## 介绍性实例 经济学与工程中的线性模型

1949 年夏末, 哈佛大学教授列昂惕夫 (Wassily Leontief) 正在小心地将最后一部分穿孔卡片插入大学的 Mark II 计算机. 这些卡片包含了美国经济的信息, 包括美国劳动统计局两年紧张工作所得到的总共 25 万多条信息. 列昂惕夫把美国经济分解为 500 个部门, 例如煤炭工业、汽车工业、交通系统, 等等. 对每个部门, 他写出了描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程. 由于当时最大的计算机之一的 Mark II 还不能处理所得到的包含 500 个未知数的 500 个方程的方程组, 列昂惕夫只好把问题简化为包含 42 个未知数的 42 个方程的方程组.

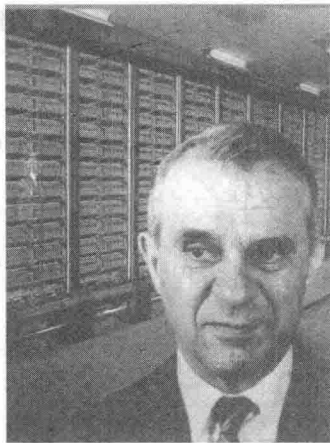
为解列昂惕夫的 42 个方程, 编写 Mark II 计算机程序需要几个月的工作, 他急于知道计算机解这个问题需要多长时间. Mark II 计算机运算了 56 个小时, 才得到最后的答案. 我们将在 1.6 节和 2.6 节中讨论这个解的性质.

列昂惕夫获得了 1973 年诺贝尔经济学奖, 他打开了经济数学建模的新时代的大门. 1949 年在哈佛的工作标志着应用计算机分析大规模数学模型的开始. 从那以后, 许多其他领域中的研究者应用计算机来分析数学模型. 由于所涉及的数据数量庞大, 这些模型通常是线性的, 即它们是用线性方程组描述的.

线性代数在应用中的重要性随着计算机功能的增强而迅速增加, 而每一代新的硬件和软件引发了对计算机能力的更大需求. 因此, 计算机科学就通过并行处理和大规模计算的爆炸性增长与线性代数密切联系在一起.

科学家和工程师正在研究大量极其复杂的问题, 这在几十年前是不可想象的. 今天, 线性代数对许多科学技术和商业领域中的学生的重要性可以说超过了大学其他数学课程. 本书中的材料是在许多有趣领域中作进一步研究的基础. 这里举出几个例子, 以后将列举其他一些领域.

- 石油探测. 当勘探船寻找海底石油储藏时, 它的计算机每天要解几千个线性方程组. 方程组的地震数据从气喷枪的爆炸引起水下冲击波获得. 这些冲击波引起海底岩石的震动, 并通过用几英里长的电缆拖在船后的地震测波器采集数据.
- 线性规划. 许多重要的管理决策是在线性规划模型的基础上做出的, 这些模型包含几百个变量, 例如, 航运业使用线性规划调度航班、监视飞机的飞行位置, 或计划维修和机场运作.
- 电路. 工程师使用仿真软件来设计电路和微芯片, 它们包含数百万个晶体管. 这样的软件技术依赖于线性代数方法与线性方程组.





线性方程组是线性代数的核心，本章使用它通过简单而具体的设置来引入线性代数的许多重要概念。1.1节和1.2节介绍求解线性方程组的一个系统方法，这个算法在全书的计算中都会用到。1.3节和1.4节指出线性方程组等价于向量方程与矩阵方程。这种等价性把向量的线性组合问题化为线性方程组的问题。线性表示、线性无关和线性变换的基本概念将在本章后半部分研究，它们在整本书中起着关键的作用，并使我们体会到线性代数的魅力和威力。

## 1.1 线性方程组

包含变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性方程是形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

的方程，其中  $b$  与系数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数或复数，通常是已知数。下标  $n$  可以是任意正整数。在本书的例题中， $n$  通常在 2 与 5 之间。在实际问题中， $n$  可以是 50、5000 或更大。

方程

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 \text{ 和 } x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

都是线性方程，因为它们可以化为

$$3x_1 - 5x_2 = -2 \text{ 和 } 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}$$

方程

$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \text{ 和 } x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$$

都不是线性方程，因为第一个方程中包含  $x_1x_2$ ，第二个方程中包含  $\sqrt{x_1}$ 。

线性方程组是由一个或几个包含相同变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性方程组成的。例如，

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned} \quad (2)$$

线性方程组的解是一组数  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ，用这组数分别代替  $x_1, x_2, \dots, x_n$  时所有方程的两边相等。例如，方程组 (2) 有一组解  $(5, 6.5, 3)$ ，这是因为，在 (2) 中用这些值代替  $x_1, x_2, x_3$  时，方程组变成等式  $8=8$  和  $-7=-7$ 。

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集。若两个线性方程组有相同的解集，则这两个线性方程组称为等价的。也就是说，第一个方程组的每个解都是第二个方程组的解，第二个方程组的每个解都是第一个方程组的解。

求包含两个变量的两个线性方程组成的方程组的解，等价于求两条直线的交点。一个典型的例子是

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

这两个方程的图形都是直线，分别用  $l_1$  和  $l_2$  表示，数对  $(x_1, x_2)$  满足这两个方程当且仅当点  $(x_1, x_2)$  是这两条直线的交点。容易验证，这个方程组有唯一的解  $(3, 2)$ ，如图 1-1 所示。

当然，两条直线不一定交于一个点，它们可能平行，也可能重合，重合的两条直线上的每个点都是交点。图 1-2 是与下面两个方程组对应的图形：